Feuille d'exercices 7

Diagonalisation

Exercice 1

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f : (x, y, z) \mapsto (3x - z, 2x + 4y + 2z, -x + 3z)$.

1. Déterminer la matrice $A = Mat(f)_{\mathcal{B}}$ de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de f. En déduire les valeurs propres de f.
3. Déterminer une base pour chaque espace propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Trouver une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on explicitera.
5. Déterminer la matrice A^n, pour tout $n \geq 1$.

Solution 1

1. La matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique est donnée par

$$Mat(f)_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Le polynôme caractéristique de f est celui associé à la matrice A :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

Je développe ce déterminant par rapport à la deuxième colonne, puisqu'elle contient un maximum de termes nuls. On a donc

$$p_A(\lambda) = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1).$$

On a pas d'autre choix que de développer la parenthèse pour en trouver les racines, ce qui donne

$$p_A(\lambda) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8).$$

Le polynôme $\lambda^2 - 6\lambda + 8$ est de degré 2, on sait donc facilement trouver ses racines en en calculant le discriminant et on obtient les deux racines 4 et 2, autrement dit

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 4)^2(\lambda - 2).$$

3. On rappelle que les espaces propres de A, notés E_λ où λ est une valeur propre de A, sont simplement définis par

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I_3).$$

Il s'agit donc simplement ici de déterminer des bases pour des noyaux, ce que l'on sait parfaitement faire avec la méthode de Gauss ou par résolution d'un système.

— Base de $E_2 = \ker(A - 2I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Une base de E_2 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

— Base de $E_4 = \ker(A - 4I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Une base de E_4 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

On a donc $\dim(E_2) + \dim(E_4) = 3$ et A est diagonalisable.

4. Notons
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
la matrice de passage obtenue grâce aux vecteurs de la question précédente. Le cours assure que l'on a alors
$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

5. Pour toute matrice B et pour tout entier n, on a toujours
$$(PBP^{-1})^n = PB(P^{-1}P)BP^{-1}...PB(P^{-1}P)BP^{-1} = PB^nP^{-1}.$$
On a donc pour tout entier n
$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}.$$
On calcule donc l'inverse de P avec la méthode de Gauss par exemple et on trouve
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

On calcule donc

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 0 & 1 - 2^n \\ 2(2^n - 1) & 2^{n+1} & 2(2^n - 1) \\ 1 - 2^n & 0 & 2^n + 1 \end{pmatrix}$$

Ne vous inquiétez pas si vous ne trouvez pas le même résultat, on ne vous demandera pas à l'examen de faire des calculs aussi lourds... L'important est que vous compreniez la méthode.

***Exercice* 2**

Diagonaliser les matrices suivantes, lorsque cela est possible.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

***Solution* 2**

— Matrice A.

On commence par calculer le polynôme caractéristique de A. On pourrait le simplifier en faisant les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ mais faisons comme si nous n'avions pas cette astuce en tête et développons le "bêtement".

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

On a donc en développement par rapport à la première ligne disons,

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

et donc on obtient en un temps fini $p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$. Arrivé à ce point, on remarque que 1 est une racine évidente et donc le polynôme $p_A(\lambda)$ est divisible par $\lambda - 1$. Pour trouver les autres racines du polynôme, on effectue donc sa division euclidienne par $\lambda - 1$:

$$\begin{array}{rr|l} & -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 & \lambda - 1 \\ \cline{3-3} - & -\lambda^3 \quad +\lambda^2 \quad & -\lambda^2 - 4\lambda - 4 \\ \cline{2-2} & -4\lambda^2 \quad +4 & \\ - & -4\lambda^2 + 4\lambda & \\ \cline{2-2} & -4\lambda \quad +4 & \\ - & -4\lambda \quad +4 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

On a donc montré que $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4)$ et il reste à trouver les racines du polynôme de la seconde parenthèse qui est de degré 2. Lucidité ou discriminant, vous trouvez que -2 en est une racine double et donc

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et -2, on calcule les espaces propres associés. Pour E_1 on trouve une base à $\ker(A - I_3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\longrightarrow}{\begin{array}{c} C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\longrightarrow}{C_3 \leftrightarrow C_3 + C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Une base de E_1 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

De même pour E_{-2}, on trouve une base à $\ker(A + 2I_3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\longrightarrow}{\begin{array}{c} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et une base de E_{-2} est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

On a donc $\dim(E_1) + \dim(E_{-2}) = 3$ et A est diagonalisable et le cours assure que si l'on pose la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors on a

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

— Matrice B.

On commence par calculer le polynôme caractéristique de B. On trouve

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3.$$

A nouveau, on remarque que 1 est une solution évidente de $p_B(\lambda)$, on effectue donc sa division euclidienne par $\lambda - 1$.

$$\begin{array}{rr|l} & -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 & \lambda - 1 \\ \cline{3-3} - & -\lambda^3 + \lambda^2 & -\lambda^2 + 2\lambda + 3 \\ \cline{2-2} & 2\lambda^2 + \lambda - 3 & \\ - & 2\lambda^2 - 2\lambda & \\ \cline{2-2} & 3\lambda - 3 & \\ - & 3\lambda - 3 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

On a donc

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 2\lambda + 3)$$

et on calcule le discriminant du polynôme $-\lambda^2 + 2\lambda + 3$ pour trouver ses racines 3 et -1, le polynôme caractéristique de B s'écrit donc

$$p_B(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

La matrice B a 3 valeurs propres distinctes, on sait donc déjà d'après le cours qu'elle est diagonalisable. Calculons tout de même les espaces propres assocés aux trois valeurs propres de B. On commence par E_1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

et une base de E_1 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

De même pour E_{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et une base de E_{-1} est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

De même pour E_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et une base de E_3 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

En considérant donc la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

le cours assure que l'on a

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Exercice 3

Diagonaliser les matrices A suivantes. En déduire les valeurs de A^7.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 3

— En développant le déterminant par rapport à la seconde ligne, on trouve facilement que

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda + 2)^2.$$

On commence par déterminer l'espace propre E_2. On sait déjà qu'il est de dimension 1 par le cours, car la multiplicité algébrique de 2 dans p_A vaut 1. Il suffit donc de trouver un vecteur non nul dans E_2 pour en avoir une base, mais faire l'algorithme bêtement n'est pas bien plus long.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On a donc que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E_2.

On passe à E_{-2}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1]{C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Une base de E_{-2} est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Le cours permet donc d'affirmer qu'en considérant la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a alors

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Même procédure pour B. On trouve

$$p_B(\lambda) = -\lambda^3 + 13\lambda - 12.$$

On observe que 1 est une racine évidente, et on passe donc à la division euclidienne du polynôme par $\lambda - 1$.

$$
\begin{array}{crr|l}
 & -\lambda^3 & +13\lambda-12 & \lambda-1 \\ \cline{4-4}
- & -\lambda^3+\lambda^2 & & -\lambda^2-\lambda+12 \\ \cline{2-3}
 & & -\lambda^2+13\lambda-12 & \\
- & & -\lambda^2 \quad +\lambda & \\ \cline{2-3}
 & & 12\lambda-12 & \\
- & & 12\lambda-12 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

On a donc

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - \lambda + 12).$$

et on trouve facilement que la seconde parenthèse a pour racines 3 et -4, on a donc

$$p_B(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 4).$$

La matrice est donc diagonalisable car elle a trois valeurs propres distinctes et on détermine les espaces propres rapidement, avant d'être définitivement ravagés par ces calculs. On a pour E_1

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\overset{C_2 \leftrightarrow C_1}{\longrightarrow}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\overset{C_2 \leftarrow C_2 + 3C_3}{\longrightarrow}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)
$$

Une base de E_1 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

De même pour E_3.

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\overset{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{\longrightarrow}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\overset{C_2 \leftrightarrow C_1}{\longrightarrow}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\overset{C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1}{\longrightarrow}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\overset{C_3 \leftrightarrow C_3 - C_2}{\longrightarrow}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

Une base de E_3 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

De même pour E_{-4}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{C_2 \leftarrow 2C_2 - C_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{C_2 \leftrightarrow C_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{C_2 \leftarrow C_2 - 5C_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & -10 & 0 \\ -2 & 10 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{C_3 \leftarrow 2C_3 - C_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 6 & 6 \\ 5 & -2 & 0 & 2 & -10 & -10 \\ -2 & 10 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Une base de E_{-4} est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Le cours permet donc d'affirmer qu'en considérant la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a alors

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exercice 4

Déterminer pour quelles valeurs des réels a, b et c la matrice A suivante est diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Solution 4

On remarque déjà que si $c = 1$, alors la matrice n'est pas diagonalisable.

Supposons en effet par l'absurde que c vaille 1. Le polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$ vaut bien évidemment $(\lambda - 1)^3$, autrement dit 1 est la seule valeur propre de A. Mais si A était diagonalisable, on aurait alors l'existence d'une matrice P inversible telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = I_3,$$

or A n'est pas l'identité.

On suppose désormais que $c \neq 1$. On sait d'après le cours que l'espace propre E_c est de dimension 1 car le polynôme caractéristique de la matrice est

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - c)$$

et la dimension de E_c est inférieure à sa multiplicité algébrique. La matrice A est donc diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1) + \dim(E_c) = 3$, c'est à dire si $\dim(E_1) = 2$. Maintenant, on remarque que la matrice $A - I_3$ s'écrit de manière très simple

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}$$

et calculer son noyau E_1 est aisé : comme $c-1$ n'est pas nul il est de dimension 2 si et seulement si a est nul.

On peut donc conclure : la matrice A est diagonalisable si et seulement si $c \neq 1$ et $a \neq 0$.