Motifs et traces de Tate des variétés projectives homogènes

Charles De Clercq, Anne Quéguiner-Mathieu

September 9, 2022

Abstract.

Contents

Acknowledgments.

1. Introduction

Cette première version de l'article est rédigée pour mon mémoire d'habilitation.

Soit F un corps et X une F-variété projective homogène sous l'action d'un groupe algébrique semisimple. Si F est séparablement clos, la variété X est cellulaire, en vertu de la décomposition de Bruhat. Son motif est alors de Tate pur, c'est à dire isomorphe à une somme directe finie de motifs de Tate. En outre, le nombre de ces facteurs de Tate et leurs décalages sont déterminés de manière unique par le groupe de Weyl de G et le type d'un sous-groupe parabolique associé à X, comme montré par Köck [13].

La situation est bien plus mystérieuse si F n'est pas séparablement clos et si l'on considère des motifs à coefficients entiers ou finis. Les travaux menés à la fin des années quatre-vingt-dix par Rost et Vishik au sujet des motifs des quadriques projectives sont une pierre angulaire au programme de classification des motifs de variétés projectives homogènes. Outre le fait qu'ils constituent une étape cruciale de la preuve de la conjecture de Milnor due à Voevodsky ([33][34]), ceux-ci ont révolutionné la théorie algébrique des formes quadratiques, permettant notamment la résolution de conjectures profondes ([16],[30]). Parmi ces résultats, un des théorèmes les plus remarquables de Vishik est son critère d'isomorphisme, qui stipule que les motif de deux quadriques sont isomorphes si et seulement si les formes quadratiques associées ont même indice de Witt, sur toute extension du corps de base ([32], voir [11] et [15] pour es preuves en toute caractéristique).

Les quadriques (projectives) sont homogènes sous l'action des groupes orthogonaux et spinoriels. En parallèle, dès la fin des années quatre-vingt-dix, Karpenko obtient un critère d'isomorphisme dans un autre cas fondamental, celui des variétés de Severi-Brauer, à coefficients entiers puis à coefficients finis ([15],[17]). Les travaux de Calmès, Chernousov, Karpenko, Gille, Merkurjev, Petrov, Semenov et bien d'autres mettent à jour des subtilités qui n'apparaissent pas pour les quadriques, notamment le défaut d'unicité des décompositions motiviques à coefficients entiers ([5],[4]). Les motifs à coefficients finis s'avèrent ainsi plus riches, et en pratique suffisants pour toutes les applications connues ou en vue, si bien que les regards de la communauté se tournèrent vers les coefficients $\mathbb{F}_p$.

Plus récemment, la notion de variété critique introduite dans [8] permet d'établir une nouvelle classe de variétés projectives homogènes dont on peut classifier les motifs, cette fois en fonction des indices de Tits des groupes semisimples associés. Ce résultat permet d'étendre le critère de Vishik à tous les groupes classiques, et notamment aux motifs des variétés d'involutions considérées par Tao [28].

Notons que tous les critères précédemment cités comparent les motifs de variétés projectives homogènes sous l'action de groupes de même type (c'est à dire au bas mot tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi-déployé). Les sous-groupes paraboliques associés à ces variétés projectives homogènes sont de plus eux aussi toujours supposés de même type, les deux étant des paires de quadriques, de variétés de Severi-Brauer, ou encore de variétés d'involution. Le présent article fournit un premier critère d'isomorphisme entre motifs de variétés projectives homogènes, indépendamment des types des groupes semisimples considérés et des sous-groupes paraboliques associés. Le critère obtenu (Corollaire 3.4) met en jeu la trace de Tate, un nouvel invariant motivique qui contrôle l'isotropie des variétés projectives homogènes. L'expression de la trace de Tate en fonction des indices discrets classiques des groupes semisimples recouvre les critères précédemment cités et les étend tout facteur direct du motif d'une variété projective homogène, à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.

On donne ensuite en quatrième section une application du Théorème 3.3 à l'équivalence motivique des groupes semisimple, c'est à dire à leur classification en fonction des motifs de leurs variétés projectives homogènes [9]. Plus précisément, on obtient une généralisation du critère principal de [9] au sous ensembles d'un sommet du diagramme de Dynkin d'un groupe semisimple qui dominent un sous-groupe parabolique donné (Théorème 4.7).

2. Motifs géométriquement de Tate pur, motifs supérieurs

Dans toute la suite, ayant fixé au préalable un corps de base F et un nombre premier p, on travaille dans la catégorie $\mathbf{Mot}_F(\mathbb{F}_p)$ des motifs de Grothendieck construits à partir des groupes de Chow à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ (voir [1],[11],[24]). Les variétés considérées seront toujours lisses, projectives et sauf mention du contraire, les groupes algébriques semisimples seront dans la suite tous supposés intérieurs (les groupes extérieurs feront l'objet d'une prochaine version).

Soit G un groupe semisimple sur F et X une variété projective homogène sous l'action de G, c'est à dire une F-variété isomorphe après extension à une clôture séparable F_{sep}/F à un quotient de $G_{F_{sep}}$ par un sous-groupe parabolique.

Si F est séparablement clos, alors la variété X est cellulaire [7]. En particulier, le motif $\mathcal{M}(X_{F_{sep}})$ est isomorphe à une somme directe finie de motifs de Tate (on les note $\mathbb{F}_p[i]$, où $i \in \mathbb{Z}$). Plus généralement, on dit qu'un motif $\mathcal{M}$ de $\mathbf{Mot}_F(\mathbb{F}_p)$ est *géométriquement de Tate pur* s'il est isomorphe après extension à toute clôture séparable à une somme directe finie de motifs de Tate.

DÉFINITION 2.1. *Soit $\mathcal{M} \in \mathbf{Mot}_F(\mathbb{F}_p)$ un motif géométriquement de Tate pur. On note F_{sep}/F une clôture séparable de F.*

(1) *Le rang absolu de $\mathcal{M}$ est le nombre de motifs de Tate qui composent $\mathcal{M}_{F_{sep}}$.*
(2) *L'amorce du motif $\mathcal{M}$ est le plus petit entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{F}_p[n]$ est un facteur direct de $\mathcal{M}_{F_{sep}}$ (on écarte ici le cas où $\mathcal{M}_{F_{sep}}$ est trivial).*

Le rang absolu et l'amorce d'un motif ne dépendent pas du choix d'une clôture séparable. De manière équivalente, le rang absolu d'un motif $\mathcal{M}$ de géométriquement de Tate pur est la dimension du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel donné par la somme directe

$$\mathrm{CH}_*(\mathcal{M}; \mathbb{F}_p) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mot}_{F_{sep}}(\mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p[i], \mathcal{M}_{F_{sep}}),$$

tandis qu'en supposant à nouveau par commodité que $\mathcal{M}$ n'est pas géométriquement trivial, son amorce est l'entier $n \in \mathbb{Z}$ minimal pour lequel

$$\mathrm{CH}_n(\mathcal{M}; \mathbb{F}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mot}_{F_{sep}}(\mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p[n], \mathcal{M}_{F_{sep}})$$

n'est pas nul.

DÉFINITION 2.2. *On note $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ la sous-catégorie épaisse (c'est à dire pleine, additive et stable par facteurs directs) engendrée par les tordus à la Tate de motifs de F-variétés projectives homogènes.*

Concrètement, $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mot}_F(\mathbb{F}_p)$ dont les objets sont les sommes directes finies de facteurs directs motiviques de variétés projectives homogènes dans $\mathbf{Mot}_F(\mathbb{F}_p)$, éventuellement tordus par un motif de Tate.

Tous les objets de $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ sont géométriquement de Tate purs et bien entendu, les motifs des variétés projectives en font partie. En raison du principe de Nilpotence de Rost, la catégorie $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ est de Krull-Schmidt : tout objet $\mathcal{M}$ de $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ admet une décomposition en une somme directe d'objets indécomposables, unique à isomorphisme et permutation de ces facteurs près ([5],[17]).

L'analyse des objets indécomposable de $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ est cruciale : ceux-ci font l'objet d'une étude intensive depuis les travaux pionniers de Vishik et sont au coeur des avancées récentes qui les lient à la dimension canonique des variétés ([31], [14]).

Considérons deux variétés X et Y sur F, ainsi qu'une correspondance $\alpha : X \rightsquigarrow Y$ de degré 0 entre X et Y à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, c'est à dire un élément du groupe de Chow $\mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times Y; \mathbb{F}_p)$. La projection $p : X \times Y \longrightarrow X$ sur le second facteur induit un push-forward

$$p_* : \mathrm{CH}_*(X \times Y; \mathbb{F}_p) \longrightarrow \mathrm{CH}_*(X; \mathbb{F}_p).$$

À la correspondance α on associe ainsi sa *multiplicité*, notée $\mathrm{mult}(\alpha)$, qui est l'élément de $\mathbb{F}_p$ défini par $p_*(\alpha) = \mathrm{mult}(\alpha) \cdot [X]$ (cf [11, §75]).

DÉFINITION 2.3. *Soit p un nombre premier et X une variété projective homogène. Un facteur direct (X, π) du motif de X dans $\mathbf{Mot}_F(\mathbb{F}_p)$ est dit supérieur si le projecteur π est une correspondance $\pi : X \rightsquigarrow X$ de multiplicité 1.*

Soit X une variété projective homogène. Une décomposition complète (c'est à dire où chaque facteur est indécomposable) de $\mathcal{M}(X)$ dans $\mathbf{Mot}_F(\mathbb{F}_p)$ étant fixée, celle-ci comporte un unique facteur direct à la fois indécomposable et supérieur.

Ne faisant pas de distinction entre ce motif et sa classe d'isomorphisme, on dira qu'il est le *motif supérieur de* X à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.

Remarque 2.4. Un facteur direct du motif d'une variété projective homogène est supérieur si et seulement s'il est d'amorce nulle. Plus généralement, on dit donc qu'un facteur direct $\mathcal{N}$ d'un objet $\mathcal{M}$ de $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ est *supérieur* si les motifs $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ ont même amorce.

Les motifs supérieurs des variétés projectives homogènes sont les avatars des faisceaux simpliciaux à la Čech considérés par Vishik au cours de son étude des motifs de quadriques [31]. Le théorème de structure de Karpenko stipule qu'à torsion par un motif de Tate près, tout facteur direct indécomposable du motif d'une variété projective homogène à coefficient dans $\mathbb{F}_p$ est isomorphe à un motif supérieur [18, §1]. Ceux-ci sont donc au cœur l'étude qualitative des motifs des variétés projectives homogènes, à coefficients finis.

Les invariants suivants contrôlent le déploiement des objets de $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$.

Définition 2.5. *La trace de Tate $\mathcal{M}$ de $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ est (la classe d'isomorphisme d') un facteur direct de Tate pur de $\mathcal{M}$ de rang absolu maximal.*

La trace de Tate supérieure de $\mathcal{M}$ est la donnée des traces de Tate de $\mathcal{M}_E$, où E parcoure toutes les extensions de F.

Si X est une variété projective homogène, la trace de Tate de $\mathcal{M}(X) \in \mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ est triviale si et seulement si X n'admet pas de zéro-cycle de degré premier à p (on dit alors que la variété X est *p-anisotrope*). À l'inverse, si le motif $\mathcal{M}(X)$ est de Tate pur (par exemple, lorsque F est séparablement clos, ou si le groupe semisimple sous-jacent est déployé) alors $\mathcal{M}(X)$ est isomorphe à sa trace de Tate.

3. Un critère d'isomorphisme dans $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$

Soient X et Y deux variétés sur F et p un nombre premier. On dit que X *domine* Y *modulo* p s'il existe une correspondance $X \rightsquigarrow Y$ de degré 0 et de multiplicité 1. La multiplicité de la composée de deux correspondances est le produit de leurs multiplicités respectives, la relation de domination modulo p définit donc un préordre sur l'ensemble des variétés sur F. Par la suite on note $X \succcurlyeq_p Y$ le fait que X domine Y modulo p et la relation d'équivalence engendrée par $\succcurlyeq_p$ est notée $\approx_p$. Cette relation d'équivalence correspond à une version locale en p de l'équivalence birationnelle stable.

On étend la relation $\succcurlyeq_p$ en un préordre sur les objets de $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ comme suit.

Définition 3.1. *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux motifs de $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$. On dit que $\mathcal{M}$ domine $\mathcal{N}$ (noté $\mathcal{M} \succcurlyeq \mathcal{N}$) si les conditions suivantes sont vérifiées.*

(1) *les motifs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ ont même amorce;*

(2) *il existe un facteur direct indécomposable et supérieur $\mathcal{M}'$ (resp. $\mathcal{N}'$) de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$), ainsi qu'une correspondance $\mathcal{M}' \rightsquigarrow \mathcal{N}'$ de degré 0 et de multiplicité 1 entre ces facteurs.*

Si $\mathcal{M} \succcurlyeq \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$, on dit que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont équivalents.

Clairement, si X et Y sont deux variétés projectives homogènes, le motif $\mathcal{M}(X)$ domine $\mathcal{M}(Y)$ dans $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ si et seulement si X domine Y modulo p. Le lemme suivant est essentiellement contenu dans [18] et [31].

Lemme 3.2. *Soit F un corps et p un nombre premier. Deux objets indécomposables de $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ sont isomorphes si et seulement s'ils sont équivalents.*

Preuve. Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont objets indécomposables de $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$, les deux conditions (être équivalents ou isomorphes) impliquent clairement chacune qu'ils ont même amorce, disons n. Quitte à tordre ces motifs par $\mathbb{F}_p[-n]$, on peut donc supposer qu'ils sont tous deux d'amorce 0. Les motifs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont alors isomorphes aux motifs supérieurs de deux variétés projectives homogènes et on entre dans les conditions de [14, Corollary 2.15]. □

La flexibilité apportée par la catégorie $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ permet de produire le critère suivant qui stipule qu'à coefficients finis, les classes d'isomorphismes des motifs de variétés projectives homogènes sont contrôlées par leur déploiement.

Theorème 3.3. *Soit F un corps et p un nombre premier. Deux motifs de $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ sont isomorphes si et seulement s'ils ont même trace de Tate supérieure.*

Preuve. La propriété de Krull-Schmidt assure que si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux objets isomorphes de $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$, ils ont même trace de Tate supérieure.

Réciproquement, supposons que les traces de Tate supérieures de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ coincident. Remarquons qu'en notant F_{sep}/F une clôture séparable de F, les motifs $\mathcal{M}_{F_{sep}}$ et $\mathcal{N}_{F_{sep}}$ ont même trace de Tate et ainsi $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ ont même rang absolu.

On raisonne par récurrence sur le rang absolu commun de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Si ces motifs sont de rang absolu 0, ils sont triviaux ; supposons donc que les deux sont de rang absolu $n > 0$. On fixe deux ensembles finis $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$, ainsi que des décompositions

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{M}_i[a_i] \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N} = \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} \mathcal{N}_j[b_j], \tag{1}$$

de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ comme somme d'objets indécomposables, avec les $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ et $(\mathcal{N}_j)_{j\in\mathcal{J}}$ tous d'amorces nulles.

Notons que puisque les traces de Tate de $\mathcal{M}_{F_{sep}}$ et $\mathcal{N}_{F_{sep}}$ sont isomorphes, les amorces de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont égales à un entier m (celui-ci correspond aux décalage minimal apparaissant dans les décompositions de (1)). En particulier, quitte à tordre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ par $\mathbb{F}_p[-m]$, on peut supposer que les deux sont d'amorce nulle.

Considérons les sous-ensembles

$$\mathcal{I}_0 := \{i \in \mathcal{I},\ a_i = 0\} \text{ et } \mathcal{J}_0 := \{j \in \mathcal{J},\ b_j = 0\}\,.$$

Un facteur indécomposable $\mathcal{M}_i$ de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}_j$ de $\mathcal{N}$) est supérieur si et seulement si $i \in \mathcal{I}_0$ (resp. $j \in \mathcal{J}_0$). Soit donc $\mathcal{M}_{i_0}$ un facteur indécomposable supérieur de $\mathcal{M}$. En vertu de [17], $\mathcal{M}_{i_0}$ est isomorphe au motif supérieur d'une variété projective homogène X_0 ; on le note (X_0, π_0) pour un projecteur $\pi_0 \in \mathrm{End}_{\mathbf{Mot}_F(\mathbb{F}_p)}(\mathcal{M}(X))$.

Considérons $F(X_0)/F$, le corps des fonctions de X_0. Le motif $(\mathcal{M}_{i_0})_{F(X_0)}$ possède un facteur direct isomorphe à $\mathbb{F}_p[0]$ car X_0 acquiert un zéro-cycle de degré 1 sur son corps des fonctions. Par hypothèse, les traces de Tate de $\mathcal{M}_{F(X_0)}$ et $\mathcal{N}_{F(X_0)}$ sont isomorphes. La propriété de Krull-Schmidt assure donc qu'il existe un indice

$j_1 \in \mathcal{J}_0$ tel que $\mathcal{N}_{j_1}$ possède lui-même un facteur direct isomorphe à $\mathbb{F}_p[0]$, après extension des scalaires à $F(X_0)$.

À nouveau, écrivons $\mathcal{N}_{j_1}$ comme le motif supérieur (X_1, π_1) d'une variété projective homogène X_1. La variété X_1 admet un zéro-cycle de degré 1 sur le corps des fonctions de X_0, on a donc une correspondance $\alpha : X_0 \rightsquigarrow X_1$ de degré 0 et de multiplité 1 ([11, §75]). La correspondance $\pi_1 \circ \alpha \circ \pi_0 : \mathcal{M}_{i_0} \rightsquigarrow \mathcal{N}_{j_1}$ est aussi de degré 0 et de multiplicité 1, si bien qu'on a montré que $\mathcal{M}_{i_0} \succcurlyeq \mathcal{N}_{j_1}$.

On itère le processus, en notant $F(X_1)$ le corps des fonctions de la variété projective homogène X_1. Puisque les traces de Tate des motifs $\mathcal{M}_{F(X_1)}$ et $\mathcal{N}_{F(X_1)}$ sont isomorphes, il existe un indice $i_2 \in \mathcal{I}_0$ tel que le facteur indécomposable $\mathcal{M}_{i_2}$ de $\mathcal{M}$ contienne, après extension des scalaires à $F(X_1)$, un facteur direct isomorphe à $\mathbb{F}_p[0]$. On obtient ainsi une correspondance $\mathcal{N}_{j_1} \rightsquigarrow \mathcal{M}_{i_2}$, c'est à dire $\mathcal{N}_{j_1} \succcurlyeq \mathcal{M}_{i_2}$.

Le motif $\mathcal{M}_{i_2}$ n'a aucune raison d'être $\mathcal{M}_{i_0}$. Néanmoins en itérant, on construit une suite décroissante dans $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$ de motifs

$$\mathcal{M}_{i_0} \succcurlyeq \mathcal{N}_{j_1} \succcurlyeq \mathcal{M}_{i_2} \succcurlyeq \mathcal{N}_{j_3} \succcurlyeq ...$$

Les ensembles $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont finis, cette suite est donc périodique et il existe un entier positif k tel que

$$\mathcal{M}_{i_k} \succcurlyeq \mathcal{N}_{j_{k+1}} \succcurlyeq ... \succcurlyeq \mathcal{M}_{i_k}.$$

Les motifs $\mathcal{M}_{i_k}$ et $\mathcal{N}_{j_{k+1}}$ sont donc équivalents et isomorphes, par le Lemme 3.2 . La trace de Tate étant compatible avec la somme directe dans $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$, les motifs

$$\bigoplus_{i \in \mathcal{I} \setminus \{i_k\}} \mathcal{M}_i[a_i] \qquad \text{et} \qquad \bigoplus_{j \in \mathcal{J} \setminus \{j_{k+1}\}} \mathcal{N}_j[b_j]$$

sont de même rang absolu strictement inférieur à n. Ils sont donc isomorphes par hypothèse de récurrence, ce qui conclut la preuve. □

Corollaire 3.4. *Soient X et Y deux variétés projectives homogènes sur F. Les motifs $\mathcal{M}(X)$ et $\mathcal{M}(Y)$ sont isomorphes dans $\mathbf{Mot}_F(\mathbb{F}_p)$ si et seulement si pour toute extension E/F, les traces de Tate de $\mathcal{M}(X_E)$ et $\mathcal{M}(Y_E)$ sont isomorphes.*

Remarque 3.5. Le Théorème 3.3 et le Corollaire 3.4 suffisent à classifier les motifs de toutes les variétés projectives homogènes, à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. En effet, les deux résultats s'étendent aux groupes semisimple p-intérieurs en remplaçant pour leur preuves les variétés projectives homogènes par des variétés projectives quasi-homogènes, voir [18]. S'ensuit le cas des groupes semisimples arbitraires qui découle du cas p-intérieur, les isomorphismes entre motifs à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ pouvant être vérifiés après une extension de degré premier à p.

3.0.1. *Motifs et invariants algébriques classiques.*

On montre désormais comment déduire du Théorème 3.3 des critères d'isomorphismes motiviques mettant en jeu les indices classiques associés aux groupes semisimples et au structures algébriques associées.

Corollaire 3.6 (Critère de Vishik). *Soient q et q' deux formes quadratiques sur un corps F, dont on note Q et Q' les quadriques projectives respectives.*
Les motifs $\mathcal{M}(Q)$ et $\mathcal{M}(Q')$ sont isomorphes si et seulement si pour toute extension E/F, les indices de Witt des formes q_E et q'_E sont égaux (à coefficients entiers ou dans $\mathbb{F}_2$).

Preuve. Le foncteur de changement des coefficients de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{F}_2$ induit une bijection sur les classe d'isomorphismes de motifs de quadriques projectives [12], on peut donc se cantonner aux coefficients $\mathbb{F}_2$.

Soit q une forme quadratique sur F, dont on note Q la quadrique projective associée. Les décomposition motiviques des quadriques isotropes de Rost [26] assurent que la trace de Tate du motif $\mathcal{M}(Q) \in \mathbf{Mot}_F(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe à

$$\mathbb{F}_2[0] \oplus ... \oplus \mathbb{F}_2[i_w(q)] \oplus \mathbb{F}_2[\dim(Q) - i_w(q)] \oplus ... \oplus \mathbb{F}_2[\dim(Q)].$$

La trace de Tate du motif d'une quadrique projective est ainsi uniquement déterminée par l'indice de Witt de la forme quadratique sous-jacente et il reste à appliquer le Théorème 3.4. $\square$

COROLLAIRE 3.7. *Soient F un corps, p un nombre premier et A, B deux F-algèbres simples centrales de même dimension.*
Les motifs de deux variétés de drapeaux d'idéaux anisotropes $M(X(i_1, ..., i_n; A))$ et $M((X(i_1, ..., i_n; B))$ sont isomorphes à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si les parties p-primaires de A et B engendrent le même sous-groupe du groupe de Brauer de F.

Si (A, σ) est une algèbre à involution, on note $i_{w,2}(\sigma)$ la dimension réduite maximale d'un idéal σ-isotrope de A.

COROLLAIRE 3.8 ([8]). *Soient (A, σ) et (B, τ) deux algèbre à involutions orthogonales, dont on note X_σ et X_τ les variétés d'involutions respectives. Les motifs $\mathcal{M}(X_\sigma)$ et $\mathcal{M}(X_\tau)$ sont isomorphes à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ si*

$$A \simeq B \quad \text{et} \quad i_{w,2}(\sigma_E) = i_{w,2}(\tau_E) \text{ pour toute extension } E/F$$

Preuve. Tout d'abord, les deux conditions impliquent que les variétés X_σ et X_τ sont de dimension égale, disons d. De plus, si les motifs $\mathcal{M}(X_\sigma)$ et $\mathcal{M}(X_\tau)$ sont isomorphes, les algèbres A et B sont isomorphes [8], on le suppose donc désormais.

Soit (A, s) une algèbre à involution orthogonale isotrope, et X_s la variété d'involution associée. Le motif $\mathcal{M}(X_s)$ se décompose une somme directe

$$\bigoplus_{k=0}^{r} \mathcal{M}(\mathcal{SB}(A))[k(\deg(A) - 1)] \oplus \mathcal{M}(X_{s_{an}}) \oplus \bigoplus_{k=0}^{r} \mathcal{M}(\mathcal{SB}(A))[d - k(\deg(A) - 1))]$$

où $\mathcal{M}(X_{s_{an}})$ est la variété d'involution associée à la partie anisotrope de (A, s) et où r est un entier. Le théorème d'anisotropie [19] assure que le motif $\mathcal{M}(X_{s_{an}})_{F(\mathcal{SB}(A))}$ obtenu après restriction au corps des fonctions de la variété de Severi Brauer de A est de trace de Tate nulle. Le motif $\mathcal{M}(X_{s_{an}})_{F(\mathcal{SB}(A))}$ est donc de trace de Tate

$$\bigoplus_{k=0}^{(r+1)(\deg(A)-1)} \mathbb{F}_2[k] \oplus \mathbb{F}_2[\dim(X_s) - k].$$

L'algèbre à involution $(A, s)_{F(\mathcal{SB}(A))}$ étant isomorphe à un espace quadratique (V, q_s), on a alors l'égalité

$$i_{w,2}(A, s) = i_w(q_s) = (r + 1)(\deg(A) - 1)$$

si bien que la trace de Tate de X_s détermine le 2-indice $i_{w,2}(A, s)$, et réciproquement. On a donc obtenu qu'étant donnée une extension E/F, on a l'égalité $i_{w,2}(\sigma_E) = i_{w,2}(\tau_E)$ si et seulement si les traces de Tate de $\mathcal{M}(X_\sigma)_E$ et $\mathcal{M}(X_\tau)_E$ sont isomorphes. $\square$

Remarque 3.9. Un raisonnement similaire permet d'étendre le résultat aux involutions symplectiques et unitaires et ainsi obtenir complètement [8, Corollary 3.18].

4. Application à l'équivalence motivique des groupes semisimples

On présente ici quelques premières conséquences de ce résultat dans le cadre de l'équivalence motivique des groupes semisimples [9]. La classification de Tits des groupes semisimples repose sur des données combinatoires, les indices de Tits (ou diagrammes de Satake) dont nous rappelons brièvement la construction. Rappelons les acteurs en jeu ([21],[22],[23],[25],[27],[29]).

Soit G un groupe algébrique semisimple, défini sur un corps F dont on note toujours F_{sep}/F une clôture séparable. Un tore maximal T de G étant fixé, on associe à la paire (G,T) un diagramme Dynkin $\Delta(G)$ qui ne dépend pas du choix de T. Dans la suite, on notera indifféremment $\Delta(G)$ pour le diagramme de Dynkin de G ou pour l'ensemble de ses sommets.

Le Galois absolu $\mathrm{Gal}(F_{sep}/F)$ agit naturellement sur les systèmes de racines simples associés à la paire (G,T). Après torsion par un un élément du groupe de Weil, on obtient donc une action de $\mathrm{Gal}(F_{sep}/F)$ sur $\Delta(G)$, la $*$-action, qui ne dépend pas non plus du choix initial d'un tore maximal. On dit que G est *intérieur* si la $*$-action est triviale, et que G est *p-intérieur* s'il devient intérieur après une extension p-primaire E/F, pour un nombre premier p.

À tout sous-ensemble Θ de $\Delta(G)$ invariant pour la $*$-action, on associe une F-variété projective homogène que l'on note $X_{\Theta,G}$. La classification de Borel-Tits [2] stipule que cette assignation induit une bijection

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{sous-ensembles} \\ *\text{-invariants de } \Delta(G) \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} F\text{-classes d'isomorphismes de} \\ \text{variétés projectives } G\text{-homogènes} \end{array} \right\} . \\ \Theta & \longmapsto & X_{\Theta,G} \end{array}$$

On dit alors qu'une variété projective homogène est de *de type* Θ si elle est isomorphe à la variété $X_{\Theta,G}$ de manière G-équivariante.

Remarque 4.1. Il existe deux conventions opposées dans la littérature concernant le type des variétés projectives homogènes. Dans cet article, on se place suivant celle pour laquelle la variété Borel d'un groupe semisimple G est de type $\Delta(G)$.

L'*indice de Tits* de G est la donnée du diagramme de Dynkin $\Delta(G)$ muni de la $*$-action et d'un sous ensemble $\Delta_0(G) \subset \Delta(G)$ de *sommets distingués.* L'ensemble $\Delta_0(G)$ est défini comme suit : un sommet i de $\Delta(G)$ appartient à $\Delta_0(G)$ s'il existe une $*$-orbite Θ contenant i et telle que la variété $X_{\Theta,G}$ admet un point rationnel.

Si $\Delta_0(G) = \Delta(G)$ (ou de manière équivalente, si G contient un tore maximal déployé) on dit que G est un *groupe quasi-déployé.* Tout groupe semisimple G est forme intérieure d'un groupe quasi-déployé, défini de manière unique à isomorphisme et dont le diagramme de Dynkin caractérise celui de G, muni de la $*$-action du groupe de Galois absolu.

Étant donné un sous-ensemble Θ des sommets du diagramme de Dynkin d'un groupe semisimple G, il existe une extension finie, séparable et minimale après laquelle Θ devient $*$-invariant. Cette extension est définie de manière unique à isomorphisme près ; on la note $F_{\Theta,G}/F$.

Définition 4.2. *Soit G un groupe semisimple, Θ un sous-ensemble de $\Delta(G)$ et p un nombre premier. Le motif standard de type Θ de G à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ est la classe d'isomorphisme du motif $\mathcal{M}(\mathrm{corr}_{F_{\Theta,G}/F}(X_{\Theta,F_{\Theta,G}}))$ d'une corestriction à F d'une $F_{\Theta,G}$-variété projective homogène de type Θ ; on le note $\mathcal{M}_{\Theta,G}$.*

Notons que dans les énoncés de cette version, on se limite aux groupes semisimples intérieurs. Les sous-ensembles des diagrammes de Dynkin considérés sont donc tous $*$-invariants, auquel cas le motif standard $\mathcal{M}_{\Theta,G}$ est le motif $\mathcal{M}(X_{\Theta,G})$ d'une variété projective homogène de type Θ de G.

Les considérations motiviques à coefficients finissont à l'origine des versions locales en un nombre premier p des indices de Tits, introduites dans [9] (voir aussi [10]). Le *p-indice de Tits* de G est l'indice de Tits de G_{F_p}, où F_p/F est une clôture p-spéciale de F [11, §101.B] ; on le note $\mathrm{Tits}_p(G)$. Cet indice ne dépend pas du choix d'une clôture p-spéciale et on dit qu'un sommet de $\Delta(G)$ est *p-distingué* s'il est distingué dans l'indice de Tits de $\Delta(G_{F_p})$. L'ensemble des sommets p-distingués de G est noté $\Delta_{0,p}(G)$.

Remarque 4.3. De manière équivalente, un groupe semisimple G et un nombre premier p fixés, un sommet i de $\Delta(G)$ est p-distingué si et seulement s'il existe un sous-ensemble $Gal(F_{sep}/F)$ invariant contenant i, et tel qu'une variété projective G-homogène de type Θ admet un zéro-cycle de degré premier à p.

Notation 4.4. Soit G un groupe algébrique semisimple et Θ, Θ' deux sous-ensembles des sommets du diagramme de Dynkin de G. On dit que Θ domine Θ' modulo p (noté $\Theta \succcurlyeq_p \Theta'$) si le motif $\mathcal{M}_{\Theta,G}$ domine $\mathcal{M}_{\Theta',G}$ dans $\mathbf{C}_F^{[-]}(\mathbb{F}_p)$.

On dispose désormais des outils pour définir l'équivalence motivique des groupes semisimples, qui vise à produire une classification de ces groupes algébriques en fonctions des motifs des variétés projectives homogènes associées.

Définition 4.5. *Soit F un corps et p un nombre premier. Soient G et G' deux groupes algébriques semisimples sur F, tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi-déployé. On dit que G et G' sont motiviquement équivalents modulo p s'il existe un isomorphisme de leurs diagrammes de Dynkin*

$$\varphi : \Delta(G) \longrightarrow \Delta(G')$$

qui commute aux actions du groupe de Galois absolu et tel que pour tout $\Theta \subset \Delta(G)$, les motifs standards $\mathcal{M}_{\Theta,G}$ et $\mathcal{M}_{\varphi(\Theta),G'}$ sont isomorphes, à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.

Remarque 4.6. Deux groupes spéciaux linéaires (ou projectifs linéaires) G et G' de même rang sont ainsi motiviquement équivalents modulo p si et seulement si pour toute suite d'entiers $i_1 \leq ... \leq i_k$, les motifs des variétés de drapeaux de dimensions fixées $\mathcal{M}(X_{\{i_1,...,i_k\},G})$ et $\mathcal{M}(X_{\{i_1,...,i_k\},G'})$ sont isomorphes, à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. Même remarque pour les groupes spéciaux orthogonaux et spinoriels, avec cette fois les variétés de drapeaux de sous-espaces isotropes de dimension fixée.

Le résultat suivant expose le lien profond qui unit les motifs des variétés projectives homogènes et l'isotropie des groupes semisimples. Son énoncé généralise le résultat principal de [9] aux sous-ensembles du diagramme de Dynkin d'un groupe semisimple qui dominent des sommets donnés.

THEORÈME 4.7. *Soient G et G' deux groupes algébriques semisimples sur F, tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi-déployé. Fixons un sous-ensemble Θ_0 de $\Delta(G)$, ainsi qu'un isomorphisme*

$$\varphi : \Delta(G) \longrightarrow \Delta(G')$$

qui commute aux actions du groupe de Galois absolu de F.
Les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) *Pour tout sous ensemble $\Theta \subset \Delta(G)$ qui contient Θ_0, les motifs standards $\mathcal{M}_{\Theta,G}$ et $\mathcal{M}_{\varphi(\Theta),G'}$ sont isomorphes dans $\mathbf{Mot}_F(\mathbb{F}_p)$;*

(2) *Pour toute extension E/F pour laquelle Θ_0 est p-distingué, la restriction*

$$\varphi_{|\Delta_{p,0}(G_E)} : \Delta_{p,0}(G_E) \longrightarrow \Delta_{p,0}(G'_E)$$

à $\Delta_{p,0}(G_E)$ est une bijection compatible avec les actions du groupe de Galois absolu qui identifie les sommets p-distingués de G_E et de G'_E.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) Soit E/F une extension pour laquelle le sous-ensemble Θ_0 est p-distingué dans $\mathrm{Tits}_p(G_E)$. Montrons premièrement que l'hypothèse (1) implique que pour toute extension E/F, Θ_0 est p-distingué dans $\mathrm{Tits}_p(G_E)$ si et seulement si est $\varphi(\Theta_0)$ l'est aussi dans le p-indice de Tits de G'_E.

Soit E_p/E une clôture p-spéciale de E. Par hypothèse, la variété projective G_{E_p}-homogène $X_{\Theta_0,G_{E_p}}$ a un point rationnel sur son corps des fonctions $E_p(X_{\Theta_0,G_{E_p}})$. Par fonctorialité, motifs $\mathcal{M}(X_{\Theta_0,G_{E_p}})$ et $\mathcal{M}(X_{\varphi(\Theta_0),G'_{E_p}})$ sont isomorphes. Par Krull-Schmidt leurs motifs supérieurs sont tout autant isomorphes et $\mathcal{M}(X_{\varphi(\Theta_0),G'_{E_p}})$ possède un facteur direct isomorphe à un motif de Tate $\mathbb{F}_p[0]$.

La variété $X_{\varphi(\Theta_0),G'_{E_p}}$ admet ainsi un point rationnel après extension des scalaires à $E_p(X_{\Theta_0,G_{E_p}})$, elle y devient donc rationnelle [20]. Notons K l'extension composée de $E_p(X_{\Theta_0,G_{E_p}})$ et du corps des fonctions de la E_p-variété $X_{\varphi(\Theta_0),G'_{E_p}}$. On a montré que l'extension $K/E_p(X_{\Theta_0,G_{E_p}})$ est transcendante pure.

Le même raisonnement en échangeant les rôles des variétés $X_{\Theta_0,G_{E_p}}$ et $X_{\varphi(\Theta_0),G'_{E_p}}$ implique que la première est rationnelle après extension au corps des fonctions $E_p(X_{\varphi(\Theta_0)0,G'_{E_p}})/E_p$ de la seconde. L'extension $K/E_p(X_{\varphi(\Theta_0),G'_{E_p}})$ est ainsi elle aussi transcendante pure.

On a donc obtenu un diagramme commutatif d'extensions

$$\begin{tikzcd}
 & K & \\
E_p(X_{\Theta_0,G_{E_p}}) \arrow[ur, "tr"] & & E_p(X_{\varphi(\Theta_0),G'_{E_p}}) \arrow[ul, "tr"'] \\
 & E_p \arrow[ul, "tr"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où les extensions notées "*tr*" sont transcendantes pures. En en faisant le tour dans le sens anti-horaire, on obtient que si Θ_0 est p-distingué dans $\mathrm{Tits}_p(G)$, alors $\varphi(\Theta_0)$ l'est aussi dans $\mathrm{Tits}_p(G'_{E_p})$, et réciproquement.

Soit désormais E/F une extension pour laquelle Θ_0 est p-distingué dans l'indice de Tits de G_E. Un raisonnement similaire au précédent en remplaçant Θ_0 par l'ensemble $\Delta_{p,0}(G_E)$ des sommets p-distingués de G_E assure que que $\varphi(\Delta_{p,0})$ est p-distingué pour G'_E. Le même raisonnement est aussi valable pour φ^{-1} puisque l'on a montré que Θ_0 est p-distingué pour G_E si et seulement si $\varphi(\Theta_0)$ l'est pour G'_E. On obtient donc que

$$\varphi_{|\Delta_{p,0}(G_E)} : \Delta_{p,0}(G_E) \longrightarrow \Delta_{p,0}(G'_E)$$

est une bijection compatible avec les actions du groupe de Galois absolu.

(2) $\Rightarrow$ (1) Fixons un sous-ensemble Θ qui contient Θ_0 et prouvons que les motifs $\mathcal{M}_{\Theta,G}$ et $\mathcal{M}_{\varphi(\Theta),G'}$ sont isomorphes à l'aide du Théorème 3.3.

On commence par montrer que les motifs supérieurs de $\mathcal{M}_{\Theta,G}$ et $\mathcal{M}_{\varphi(\Theta,G')}$ sont isomorphes. En effet, puisque le motif $\mathcal{M}_{\Theta,G}$ est isomorphe au motif $\mathcal{M}(X_{\Theta,G})$ d'une variété projective homogène de type Θ, il acquiert un facteur direct isomorphe à $\mathbb{F}_p[0]$ après extension des scalaires à son corps des fonctions $F(X_{\Theta,G})$. Par hypothèse Θ domine Θ_0 modulo p, on en déduit donc que les sommets de Θ_0 sont p-distingués dans $\Delta(G_{F(X_{\Theta,G})})$, et donc par (2) que les sommets de $\varphi(\Theta)$ sont eux mêmes distingués dans $\mathrm{Tits}_p(G'_{F(X_{\Theta,G})})$.

Le motif $(\mathcal{M}_{\varphi(\Theta),G'})_{F(X_{\Theta,G})}$ admet donc lui aussi un facteur direct isomorphe à $\mathbb{F}_p[0]$. Par le même raisonnement, en écrivant $\mathcal{M}_{\varphi(\Theta),G'}$ comme le motif d'une variété projective G'-homogène de type $\varphi(\Theta)$, on obtient que $\mathcal{M}_{\Theta,G}$ admet un facteur direct isomorphe à $\mathbb{F}_p[0]$ après extension des scalaire au corps des fonctions $F(X_{\varphi(\Theta),G'})$. On a donc construit deux correspondances

$$\alpha : Y \rightsquigarrow Z \text{ et } \beta : Z \rightsquigarrow Y$$

de degré 0 et de multiplicité 1 : les motifs supérieurs de $\mathcal{M}_{\Theta,G}$ et $\mathcal{M}_{\varphi(\Theta),G'}$ sont isomorphes par le Lemme 3.2.

Montrons désormais que les trace de Tate supérieures de $\mathcal{M}_{\Theta,G}$ et $\mathcal{M}_{\varphi(\Theta),G'}$ sont isomorphes, par récurrence sur le rang commun de G et G' (c'est dire le nombre de sommets de leurs diagrammes de Dynkin).

On débute par les extensions pour lesquelles ces motifs sont de trace de Tate triviale. Soit E/F une extension pour laquelle la trace de Tate de $\mathcal{M}_{\Theta,G_E}$ est nulle. Le motif $\mathcal{M}_{\varphi(\Theta),G'_E}$ ne peut contenir de facteur direct de Tate car si tel était le cas, il contiendrait un facteur isomorphe à $\mathbb{F}_p[0]$ et le motif supérieur de $\mathcal{M}_{\Theta,G}$ serait de Tate. Le trace de Tate de $\mathcal{M}_{\varphi(\Theta),G'_E}$ est donc elle aussi triviale.

Supposons désormais que E/F est une extension pour laquelle la trace de Tate de $\mathcal{M}_{\Theta,G_E}$ n'est pas nulle. Il contient donc un facteur direct isomorphe à $\mathbb{F}_p[0]$ et il en va de même pour $\mathcal{M}_{\Theta,G_E}$ car leur motifs supérieurs sont isomorphes. Les deux variétés X_{Θ,G_E} et $X_{\varphi(\Theta),G'_E}$ sont donc p-isotropes et en vertu des décompositions de Chernousov, Gille et Merkurjev [6] (voir aussi [3]), on a un isomorphisme

$$\mathcal{M}_{\Theta,G_E} \simeq \bigoplus_{\delta\in\Delta} \mathcal{M}(Z_{\delta,G_{E,\Theta}})[l(\delta)]$$

où Δ est un ensemble d'orbites de $\Delta(G_{E,\Theta})$, les $l(\delta)$ sont des entiers, $G_{E,\Theta}$ est la partie semisimple de la composante de Levi de G_E associée à Θ, et les $Z_{\delta,G_{E,\Theta}}$ sont des variétés projectives homogènes avec δ qui contient Θ. Ces données sont toutes déterminés par le p-indice de Tits de $G_{E,\Theta}$. Le p-indice de Tits du groupe semisimple $G_{E,\Theta}$ est uniquement déterminé par restriction de celui de G_E, son diagramme de Dynkin $\Delta(G_{E,\Theta})$ étant obtenu en ôtant Θ à celui de $\Delta(G_E)$. Par hypothèse le sous ensemble Θ_0 est p-distingué sur E.

Les automorphismes des diagrammes de Dynkin des groupes semisimples, lorsqu'ils sont connexes, sont tous triviaux sauf pour les groupes de type A_n et D_n $(n > 1)$ ainsi que pour les groupes exceptionnels de type E_6. Une analyse cas par cas de ces automorphismes montre donc que la restriction de φ identifie les p-indices de Tits de $G_{E,\Theta}$ et $G'_{E,\Theta}$. Par hypothèse de récurrence, on obtient ainsi une suite d'isomorphismes sur E

$$\mathcal{M}_{\Theta,G_E} \simeq \bigoplus_{\delta\in\Delta} \mathcal{M}(Z_{\delta,G_{E,\Theta}})[l(\delta)] \simeq \bigoplus_{\delta\in\Delta'} \mathcal{M}(Z_{\varphi(\delta),G'_{E,\Theta}})[l(\delta)] \simeq \mathcal{M}_{\varphi(\Theta),G'_E}.$$

En vertu de cet isomorphisme, les traces de Tate des motifs $\mathcal{M}_{\Theta,G_E}$ et $\mathcal{M}_{\varphi(\Theta),G'_E}$ sont donc en particulier isomorphes, ce qui conclut la preuve. □

S'ensuit le critère général d'équivalence motivique mettant en jeu les p-indices de Tits supérieurs des groupes semisimples.

Corollaire 4.8. *Soient G et G' deux groupes algébriques semisimples, tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi-déployé. Fixons un isomorphisme*

$$\varphi : \Delta(G) \longrightarrow \Delta(G)$$

qui commute aux actions du groupe de Galois absolu de F.

Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. *les groupes G et G' sont motiviquement équivalents modulo p via φ;*
2. *pour toute extension E/F, φ identifie les p-indices de Tits des groupes semisimples G_E et de G'_E.*

Preuve. Il s'agit du théorème précédent, apppliqué au sous ensemble $\Theta_0 = \emptyset$. □

Bibliography

[1] André, Y., *Motifs de dimension finie (d'après S.-I. Kimura, P. O'Sullivan...)*, Astérisque vol. 299, Soc. Math. France, 2005, Séminaire Bourbaki. Vol. 2003/2004, Exp. no929, p115-145.

[2] Borel, A. et Tits, J., *Groupes réductifs*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 27, 659–755, 1965.

[3] Brosnan, P., *On motivic decompositions arising from the method of Białynicki-Birula*, Invent. Math. 161, No. 1, 91-111, 2005.

[4] Calmès, B., Semenov, N., Petrov, V., Zainoulline, K., *Chow motives of twisted flag varieties*, Compos. Math. 142, No. 4, 1063–1080, 2006.

[5] Chernousov, V. et Merkurjev, A., *Motivic decomposition of projective homogeneous varieties and the Krull-Schmidt theorem*, Transform. Groups 11, No. 3, 371–386, 2006.

[6] Chernousov, V., Gille, S., Merkurjev, A., *Motivic decomposition of isotropic projective homogeneous varieties*, Duke Math. J. 126, No. 1, 137–159, 2005.

[7] C. Chevalley, *On the cellular decompositions of the spaces G/B*, Proc. Symp. Pure Math. 56, 1–23, 1994.

[8] De Clercq, C., Quéguiner, A., Zhykhovich, M., *Critical varieties and motivic equivalence for involutions*, to appear in Trans. Am. Math. Soc.

[9] De Clercq, C., *Motivic equivalence of semisimple algebraic groups*, Compos. Math. 153, No. 10, 2195–2213, 2017.

[10] De Clercq, C., Garibaldi, S., *Tits p-indexes of semisimple algebraic groups*, J. Lond. Math. Soc., II. Ser. 95, No. 2, 567–585, 2017.

[11] Elman, R., Karpenko, N. et Merkurjev, A., The algebraic and geometric theory of quadratic forms. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2008.

[12] Haution, O., *Lifting of coefficients for Chow motives of quadrics*, Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology, 239–247, Dev. Math., 18, Springer, 2010.

[13] Köck, B., *Chow motif and higher Chow theory of G/P*, Manuscr. Math. 70, No. 4, 363–372, 1991.

[14] Karpenko, N., *Canonical dimension*, Proceedings of the international congress of mathematicians (ICM 2010), Hyderabad, India, Vol. II, 2010.

[15] Karpenko, N., *Criteria of motivic equivalence for quadratic forms and central simple algebras*, Math. Ann. 317, No. 3, 585–611, 2000.

[16] Karpenko, N., *On the first Witt index of quadratic forms*, Invent. Math. 153, No. 2, 455–462, 2003.

[17] Karpenko, N., *Upper motives of algebraic groups and incompressibility of Severi-Brauer varieties*, J. Reine Angew. Math. 677, 179–198, 2013.

[18] Karpenko, N., *Upper motives of outer algebraic groups*, In Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology, vol. 18 of Dev. Math. Springer, New York, 249–258, 2010.

[19] Karpenko, N. (with an Appendix by J.-P. Tignol), *Isotropy of orthogonal involutions*, Amer. J. Math. 135, 1–15, 2013.

[20] Kersten, I. et Rehmann, U., *Generic splitting of reductive groups*, Tohoku Math. J. (2) 46, No. 1, 35–70, 1994.

[21] Knus, M-A., Merkurjev, A., Rost, M., Tignol, J-P., *The book of involutions*, with a preface by J. Tits, Colloquium Publications, American Mathematical Society Series Volume 44, 1998.

[22] Merkurjev, A., Panin, I. et Wadsworth, A., *Index reduction formulas for twisted flag varieties. I*, K-Theory 10, No. 6, 517–596, 1996.

[23] Merkurjev, A., Panin, I. et Wadsworth, A., *Index reduction formulas for twisted flag varieties. II*, K-Theory 14, No. 2, 101–196, 1998.

[24] Manin, J., *Correspondances, motifs et transformations monoïdales*, Math. USSR Sbornik 6, p 439-470, 1968.

[25] Petrov, V. et Stravrova, A., *The Tits indices over semilocal rings*, Transform. Groups 16, 193–217, 2011.

[26] Rost, M. *The motive of a Pfister form*, disponible sur la page web de l'auteur, 1998.

[27] Springer, T.A., *Linear algebraic groups, 2nd edition*, Birkhäuser, Basel, 1998.

[28] Tao, D., *A variety associated to an algebra with involution*, J. Algebra 168, No. 2, 479-520, 1994.

[29] Tits, J., *Classification of algebraic semisimple groups*, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics IX, American Mathematical Society, Providence, RI, 1966.

[30] Vishik, A., *Fields of u-invariant* $2^r + 1$, Prog. Math. 270, 661–685, 2009.

[31] Vishik, A., *Motives of quadrics with applications to the theory of quadratic forms*, Geometric methods in the algebraic theory of quadratic forms, Lect. Notes Math. 1835, 25–101, 2004.

[32] Vishik, A., *Integral motives of quadrics*, Max Planck Institut für Mathematik (Bonn), 1–82, 1998.

[33] Voevodsky, V., *Reduced power operations in motivic cohomology*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 98, 1–57, 2003.

[34] Voevodsky, V., *Motivic cohomology with* $\mathbb{Z}/2$*-coefficients*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 98, 59–104, 2003.

Charles De Clercq, Equipe Topologie Algébrique, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse.