Structures Algébriques

Exercices pour le TD du 12 Novembre 2020

Je vous invite à refaire les exercices de l'interrogation de la semaine dernière (en tout cas ceux que vous n'avez pas réussi. Je vous fournirai le corrigé de l'examen ce jeudi. Le premier exercice a été traité quasiment intégralement en TD, il ne reste plus qu'à déterminer les groupes distingués et les quotients respectifs.

Exercice 1

Soit $\mathbb{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ [1] le groupe des quaternions. Ecrire la table de multiplication dans $\mathbb{H}_8$, et montrer que tous les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$ sont distingués. Identifier tous les quotients possible de $\mathbb{H}_8$ par un sous-groupe.

Solution

	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	$-j$	j	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	j	$-j$	i	$-i$	1	-1

Par Lagrange un sous-groupe non-trivial de $\mathbb{H}_8$ est de cardinal 2, ou 4. On peut vérifier à la main mais si H est un sous-groupe d'ordre 4 il est distingué car d'indice 2. Le groupe $\mathbb{H}_8$ possède autant de sous-groupes d'ordre 2 que d'éléments d'ordre 2, i.e. l'élément -1. Puisque les éléments de $\{\pm 1\}$ commutent avec tous les éléments de G, c'est un sous-groupe distingué (c'est même le centre de $\mathbb{H}_8$)

Exercice 2

Montrer que si p et q sont des nombres premiers distincts, tout groupe abélien G d'ordre pq est cyclique. Et si G n'est pas abélien ?

Indication : nous avons vu lors du dernier TD que le groupe G possède nécessairement un élément d'ordre p et un d'ordre q (théorème de Cauchy, ici pour les groupes abéliens).

Solution

On a vu lors des TDs précédents que G possède un élément g d'ordre p et un élément g' d'ordre q. Bien entendu l'élément gg' n'est pas neutre (sinon on aurait $g' = g^{-1}$). De même aussi $(gg')^p = g'^p \neq e$, et $(gg')^q = g^q \neq e$. Donc gg' est d'ordre pq et G est cyclique.

Cela ne fonctionne pas pour les groupes non-commutatifs, même s'ils contiennent eux aussi des éléments d'ordre p et q (Théorème de Cauchy). Considérer par exemple le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 3

Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^*$, on a un isomorphisme $m\cdot(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(n/\mathrm{pgcd}(m, n))\mathbb{Z}$.

Solution

Le sous-ensemble $m\cdot(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ correspond simplement au sous-groupe engendré par $\bar{m}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On a vu dans les exercices précédents que l'ordre de $\bar{m}$ engendre un sous-groupe cyclique d'ordre $n/\mathrm{pgcd}(m, n)$, donc $< \bar{m} > \simeq \mathbb{Z}/(n/\mathrm{pgcd}(m, n))\mathbb{Z}$.

1. On définit la loi dans $\mathbb{H}_8$ par $ij = -ji = k$ et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.