Synthèse de travaux scientifiques

en vue de l'obtention de

l'Habilitation à Diriger des Recherches

présentée à

l'Université Sorbonne Paris Nord

en

Mathématiques

par

Charles De Clercq

Motifs, traces de Tate et groupes profinis lisses

soutenue publiquement le 13 janvier 2023.

Rapporteurs :	M.	Patrick Brosnan
	M.	Philippe Gille
	M.	Jörg Wildeshaus

Jury :	M.	Patrick Brosnan
	M.	Cyril Demarche
	M.	Philippe Gille
	M.	Jean-Pierre Tignol
	M.	Jörg Wildeshaus
	M.	Olivier Wittenberg

À ma mère

REMERCIEMENTS

Les premières pensées vont à Philippe Gille et Patrick Brosnan, à qui je dois bien plus que leurs rapports sur ce mémoire. Au cours de ma thèse, Philippe est le premier à m'avoir invité à donner un exposé en séminaire. Il est aussi celui qui m'a fait comprendre en un regard, lorsque je composais mon jury de thèse, qu'il ne fallait pas hésiter et aller au devant d'Andrei Suslin, pour la rencontre mathématique qui m'aura sans doute le plus touché. Patrick quant à lui nous a suivis avec Mathieu Florence dès les prémices de la théorie des groupes profinis lisses, toujours sourire, toujours avec entrain et bienveillance.

Il en va bien sûr de même pour Jörg Wildeshaus. Référence motivique du LAGA lors de mon arrivée, Jörg a toujours été de précieux conseils. Au-delà de notre travail pédagogique, de nos rires devant des élèves tous les ans plus « créatifs », Jörg à su me motiver. Après tout ce n'est pas rien, une *Habilitationsschrift* !

Je remercie chaleureusement Cyril Demarche, Olivier Wittenberg et Jean-Pierre Tignol pour leur présence au sein de mon jury. Cyril et Olivier ont toujours été pour moi des grand frères, membres immuables du séminaire Variétés Rationnelles autant que Campion de la Girasole. Jean-Pierre de son côté fut d'une aide précieuse pour plusieurs des travaux ici présentés, toujours dans son style si caractéristique, empreint d'humour et de curiosité. Je suis si heureux et honoré de vous avoir tous à mes côtés.

L'aventure mathématique est solitaire, mais ses voyages sont le fruit de plusieurs : je pense ainsi à mes co-auteurs. J'ai tant appris auprès de Skip Garibaldi, Mathieu Florence, Giancarlo Lucchini-Arteche, Anne Quéguiner et Maksim Zhykhovich. J'espère que cette synthèse fait honneur à nos travaux communs et vous remercie.

Les recherches présentées aujourd'hui ont été réalisées au sein du LAGA, dans un cadre exceptionnel. Travailler dans l'ambiance amicale et productive de la Sorbonne du Grand Nord -malgré son nom un peu gênant- est un plaisir de chaque instant. Je remercie tous les collègues chercheurs, enseignants et administratifs pour ces moments partagés, quelle chance d'être aussi bien entouré ! Mes pensées vont bien sûr aux membres de l'équipe Topologie Algébrique qui ont su prendre à la rigolade mon incompétence crasse dès qu'en séminaire on entend le mot « opérade ».

Un mot bien sûr pour les membres du bureau D-409 Hakim Boumaza, Emmanuel Audusse et Olivier Lafitte (techniquement le plus présent d'entre nous). Bien que nous ne nous réunissions tous sur site qu'en cas de force majeure, le D-409 est élu bureau de l'année par un panel de consommateurs depuis plusieurs années, c'est clairement mérité.

Plus proche de mes racines mathématiques et non loin de Paris 13, c'est au séminaire Variétés Rationnelles organisé à Jussieu, à l'ENS et à Polytechnique que j'ai pu prendre mes aises. Désormais organisateur malgré ma fâcheuse habitude d'invoquer les algèbres simples centrales pour décrire le groupe de Brauer, j'ai le plaisir d'y avoir lié tant d'amitiés autour des exposés. Jean-Louis Colliot-Thélène, Cyril Demarche, Mathieu Florence, Ofer Gabber, Philippe Gille, David Harari, Diego Izquierdo... Merci pour ce temps passé !

Je remercie mes maîtres Nikita Karpenko, Alexander Merkurjev, Andrei Suslin et Anatoly Yakovlev de l'école de Saint-Pétersbourg. Ceux-ci ont su m'enseigner les mathématiques et m'accueillir à leur manière : je leur dois tout. S'ensuivent mes frères de thèse Olivier, Maksim et Raphaël qui m'ont toujours accompagné. Enfin, je pense aux professeurs des Universités d'Amiens, Troyes, Reims et Paris qui m'ont admis dans ma jeunesse, alors que je ne savais quoi faire des mathématiques : M. Beureux, M. Cortier, M. Ginot, Mme Jager et M. Polo en premier.

Ce mémoire évoque la théorie des groupes profinis lisses que nous élaborons avec Mathieu Florence depuis de nombreuses années. Fruit de notre amitié, ce voyage entamé entre le Delly's et le Prévoyant nous pousse dans nos retranchements autant qu'il est l'aventure mathématique d'une vie. La conjecture de lissité en point de mire, nous continuons à avancer : d'une manière ou d'une autre, je ne sais sous quelle forme, nos efforts porteront leurs fruits. Au milieu du tumulte, le mot qui me vient à l'esprit est un simple « merci ».

Je remercie enfin pour leur soutien ma famille, mes amis des mathématiques (notamment le V.) et ceux d'ailleurs. Leur visages, les résultats obtenus avec Mathieu, les percées motiviques avec Anne et mon premier étudiant en thèse me confortent un peu plus dans l'idée que s'il est des équations insolubles, nous aurions bien tort de ne pas les contempler.

TABLE DES MATIÈRES

Dans ce mémoire, les corps sont supposés commutatifs, les schémas sont supposés noethériens et par variété, on entend schéma de type fini sur un corps. Les variétés projectives homogènes le seront toujours sous l'action d'un groupe algébrique semi-simple.

1 Introduction

« Qu'est-ce qu'un corps ? » Depuis leurs études les mathématiciennes comme les mathématiciens le savent bien : un corps est un anneau commutatif, dont tous les éléments non-neutres sont inversibles. Nous avons tous pu manipuler depuis nos études des corps classiques : les corps des nombres réels et rationnels, celui des nombres complexes, les corps finis, les corps de nombres, les corps p-adiques... Pourtant, la théorie des corps réserve d'autres surprises encore que ces exemples déjà fondamentaux. Elle se révèle même d'une richesse inouïe, comme nous pouvons en témoigner dès nos premiers émois avec la théorie de Galois. D'une finesse insondable, la théorie des corps recèle de théorèmes surprenants, de phénomènes étonnants. En voici un exemple aussi élémentaire qu'éclairant.

Soit F un corps. Associons tout d'abord à F un invariant numérique appelé son u-invariant, défini en 1953 comme suit ([44], [28], [29]) :

$$u(F) = \sup \{\dim(q),\ q \text{ forme quadratique anisotrope définie sur } F\}.$$

Le u-invariant de F est ainsi, s'il n'est pas infini, la dimension maximale d'une forme quadratique anisotrope définie sur F. Concernant les exemples de corps évoqués précédemment, leur u-invariants sont connus depuis un certain temps : alors que celui des nombres complexes est égal à 1, celui des nombres réels et rationnels est infini. On peut ainsi construire à partir des exemples cités plus haut des corps de u-invariant 2^n, pour tout entier n positif.

Appuyés par ces exemples et d'autres considérations, on attribuait alors à Kaplansky la conjecture selon laquelle le u-invariant d'un corps, s'il est fini, ne pourrait être qu'une puissance de 2. Il fallu plus de trente ans à la communauté pour montrer qu'il n'en est rien : en introduisant une classe de corps très sophistiquée, Merkurjev parvint en 1989 à construire des corps des u-invariant 6 [62], et même pouvant valoir n'importe quel nombre pair [63]. Plus récemment encore, en 2001, A. Vishik parvint grâce à des techniques motiviques à construire un corps de u-invariant 9 [43], et même de valeur 2^n+1, pour tout tout $n \geq 3$ [87]. Au-delà de ces propriétés, ces corps exotiques demeurent très mystérieux :

nous sommes encore loin de pouvoir imaginer ce que la théorie des corps peut engendrer.

Soit donc F, un corps. Comme à l'habitude, on attache à F des invariants numériques, des structures algébriques que l'on souhaiterait classifier, pour mieux l'appréhender. Au cœur de ce travail, nous rencontrerons donc les suivants :

— les formes quadratiques définie sur F (son groupe de Witt)

— les algèbres simples centrales définies sur F (son groupe de Brauer)

— les groupes algébriques semi-simples définis sur F et les variétés projectives homogènes qui leur sont associées (les indices de Tits réalisés sur F)

— les extensions (algébriques) de F (géométrie birationnelle des variétés)

— le groupe de Galois absolu $Gal(F_{sep}/F)$ de F et ses représentations.

Pour étudier cette constellation d'invariants et exhiber leurs relations, nous ferons usage de deux outils principaux. Le premier est la théorie des motifs construits par Grothendieck à partir des groupes de Chow, qui sous l'impulsion de Brosnan, Gille, Karpenko, Merkurjev, Rost, Semenov, Suslin, Vishik, Voevodsky et tant d'autres a révolutionné depuis la fin des années quatre-vingt-dix la théorie algébrique des formes quadratiques ainsi que celle des algèbres à involution. Le second est la théorie des groupes profinis lisses, mise au point en collaboration avec Mathieu Florence, qui a pour objectif de fournir un cadre adéquat à l'étude du relèvement des systèmes locaux et représentations Galoisiennes à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, ainsi que d'offrir un nouvel éclairage au *norm residue isomorphism theorem* (précédemment conjecture de Bloch et Kato en cohomologie Galoisienne).

Après avoir rappelé brièvement les résultats issus des techniques développées dans ma thèse (correspondant aux articles [12],[13],[14],[15],[16]), ce mémoire d'habilitation développe les deux axes de recherches ultérieures suivants.

1.1 Motifs des variétés projectives homogènes ([17],[18],[19],[25])

— *Équivalence motivique des groupes semi-simples*
  Peut-on obtenir une classification des groupes algébriques semi-simples en fonction des motifs des variétés projectives homogènes qui leurs sont associées ?
  L'article [17], y répond positivement en introduisant la notion d'équivalence motivique. On y construit de nouveaux indices discrets, les p-indices de Tits supérieurs, qui contrôlent les classes d'équivalence motiviques des groupes algébriques semi-simples. Ces derniers s'exprimant en fonction d'invariants numériques classiques, les critères généraux d'équivalence motivique obtenus exhibent le lien qu'entretiennent les motifs les structures algébriques classiques définies sur les corps.

— *Détermination des p-indices de Tits*
  L'équivalence motivique des groupes semi-simples met en jeu de nouveaux invariants algébriques associés à ces groupes : les p-indices de Tits. L'article [18] en commun avec Skip Garibaldi détermine toutes les valeurs possibles de ces indices. En corollaire de cette description on obtient de nombreux critères d'équivalence motivique qui lient la théorie des motifs et les invariants cohomologiques des groupes semi-simples, notamment de type exceptionnel.

— *Variétés critiques*
  Introduites en commun avec Anne Quéguiner Mathieu et Maksim Zhykhovich, les variétés critiques sont des variétés projectives homogènes qui font office de *variétés-test* pour l'équivalence motivique des groupes semi-simples. Bien que l'existence de telles variétés ne soit pas assurée en général, l'article [19] en construit pour tous les groupes de type classiques ainsi que pour certains de type exceptionnel. Ce résultat permet notamment d'étendre le critère d'équivalence des quadriques dû à Vishik à tous les groupes classiques.

— *Classification des motifs des variétés projectives homogènes*
  Présenté en appendice de ce mémoire, le travail récent [25] présente la classification complète des motifs de variétés projectives homogènes sous l'action de groupes semi-simples p-intérieurs, à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. On y produit un critère d'isomorphisme pour ces motifs qui met en jeu un nouvel invariant, la trace de Tate, ainsi que des applications, entre autres, à l'équivalence motivique.

1.2 Groupes profinis lisses et leurs représentations ([20],[21],[22],[23])

La théorie des groupes profinis lisses et les articles suivants sont le fruit d'un travail commun avec Mathieu Florence, avec pour objectif l'étude des relèvements des représentations Galoisiennes à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ et de notre *Conjecture de lissité*.

— *Relèvements des systèmes locaux en basse dimension*
Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ une représentation Galoisienne. Peut-on relever ρ en une représentation de plus haute torsion ? On démontre dans l'article [20] que cette conjecture est vraie pour tout corps si $n = 2$, ou pour n allant jusque 4 pour $p = 2$. La preuve présentée généralise ce résultat aux représentations continues des groupes dits *cyclotomiques*. Le résultat vaut ainsi pour un certain nombre de groupes fondamentaux étales, c'est à dire pour des systèmes locaux à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.

— *Relèvements des fibrés vectoriels en caractéristique p*
Soit S un schéma de caractéristique p. Pour $r \geq 2$, on note $\mathbf{W}_r(S)$ le schéma des vecteurs de Witt de longueur r de S. Si V est un fibré vectoriel défini sur S, peut-on le réaliser comme la restriction d'un fibré vectoriel sur $\mathbf{W}_r(S)$? L'article [21] en commun avec Mathieu Florence et Giancarlo Lucchini-Arteche étudie la question et certaines de ses variations pour S réduit. On y explicite les classes de cohomologie qui contrôlent l'existence de ces relèvements. En corollaire, on démontre que les fibrés tautologiques des Grassmanniennes $\mathrm{Gr}(k, n)$ ne se relèvent pas à $\mathbf{W}_2(S)$, dès que $2 \leq k \leq n - 2$.

— *La conjecture de lissité*
La série d'articles *Smooth Profinite Groups* ([22], [32], [23]) pose les fondements de la théorie des groupes profinis lisses et les jalons d'une stratégie de démonstration pour la conjecture de lissité, qui implique notamment une nouvelle preuve au *norm residue isomorphism theorem*. Il s'agit d'une part de généraliser la théorie de Kummer en montrant que les groupes cyclotomiques sont lisses, puis d'utiliser des théorèmes généraux issus de relèvements des représentations des groupes lisses. Ce

travail est en cours et nous détaillons dans la suite les résultats obtenus ainsi que le chemin restant vers la conjecture de lissité.

2 Rappels et résultats issus de ma thèse

On introduit ici les objets et les résultats issus de ma thèse, qui seront utiles au cours du premier axe de recherche de ce mémoire d'habilitation.

2.1 Motifs des variétés projectives homogènes

2.1.1 Motifs de Chow

Les détails de la construction de la catégorie des motifs de Grothendieck obtenue à partir des groupes de Chow font l'objet de nombreuses expositions dans la littérature (voir par exemple [1], [27], [30], [59], [77]). Esquissons-en brièvement les étapes principales.

Soit F un corps et $\mathbf{Var}_F$ la catégorie des variétés projectives et lisses définies sur F. Étant donné un anneau commutatif Λ, il s'agit de construire la catégorie $\mathbf{Mot}_F(\Lambda)$ dite des motifs (de Chow) à coefficients dans Λ, pour laquelle nous allons voir qu'on dispose d'un foncteur

$$\Phi : \mathbf{Var}_F \longrightarrow \mathbf{Mot}_F(\Lambda)$$

qui associe à toute variété sur F son motif $\mathrm{M}(X)$ (à coefficients dans Λ).

i) On considère tout d'abord la catégorie $\mathbf{Var}_F$, dont on veut enrichir les morphismes. Soient donc X et Y deux variétés projectives définies sur F. On note $X_1, ..., X_n$ les composantes irréductibles de X, de dimensions respectives $d_1, ..., d_n$. Pour tout entier relatif i, on pose

$$\mathrm{Corr}_i(X, Y; \Lambda) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{CH}_{i+d_k}(X_k \times Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda,$$

où $\mathrm{CH}_*(\cdot)$ désigne les groupes de Chow gradués des cycles algébriques sur les variétés définies sur F, modulo équivalence rationnelle.

On définit alors la catégorie $\mathrm{CR}_F(\Lambda)$ des correspondances de Chow graduées à coefficients dans Λ. Ses objets sont donnés par les couples $X[i]$, où X désigne une variété projective sur F, et où i est un entier relatif, tandis que ses morphismes sont définis par

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CR}_F(\Lambda)}(X[i], Y[j]) = \mathrm{Corr}_{i-j}(X, Y; \Lambda)$$

et sont munis de la composition habituelle des correspondances. La catégorie $\mathrm{CR}_F(\Lambda)$ est pré-additive.

ii) La catégorie $\mathbf{Mot}_F(\Lambda)$ des motifs de Chow sur F à coefficients dans Λ est ensuite définie comme l'enveloppe pseudo-abélienne de la complétion additive de la catégorie $\mathrm{CR}_F(\Lambda)$. Ses objets sont donc des sommes directes finies de triplets de la forme

$$(X, \pi)[i] \text{ où } \begin{cases} X \text{ est une variété projective et lisse définie sur } F \\ \pi \text{ est un endomorphisme de } X \text{ dans } \mathrm{CR}_F(\Lambda) \\ i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On dispose ainsi du foncteur

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbf{Var}_F & \longrightarrow & \mathbf{Mot}_F(\Lambda) \\ & X & \longmapsto & \mathrm{M}(X) \overset{def}{=} (X, [\Gamma_{id_X}])[0] \end{array}$$

où $[\Gamma_{id_X}]$ désigne la classe du graphe de l'identité de X.

2.2 Motifs de Tate purs, propriété de Krull-Schmidt

Soif F un corps et Λ un anneau commutatif. Les motifs tordus à la Tate du point dans $\mathbf{Mot}_F(\Lambda)$, c'est à dire les $\mathrm{M}(\mathrm{Spec}(F))[i]$ (avec $i \in \mathbb{Z}$), sont essentiels. Il s'agit des motifs de Tate, que l'on note comme à l'accoutumée $\Lambda[i]$ (avec $i \in \mathbb{Z}$).

Définition 2.1. *Soit F un corps et Λ un anneau commutatif.*
Un motif $\mathrm{M} \in \mathbf{Mot}_F(\Lambda)$ est dit de Tate pur s'il est isomorphe à une somme directe de motifs de Tate.

Exemple 2.2. Il est bien connu que le motif d'un espace projectif est de Tate pur puisqu'on a

$$\mathrm{M}(\mathbb{P}^n_F) = \Lambda[0] \oplus ... \oplus \Lambda[n].$$

Exemple 2.3. Plus généralement, si G est un groupe algébrique semi-simple et déployé sur F (par exemple, lorsque F est algébriquement clos), alors les motifs des variétés projectives homogènes sous l'action de G sont de Tate purs [57].

On dit qu'une F-variété projective X est géométriquement déployée à coefficients dans Λ s'il existe une extension E/F telle qu'après extension à E, son motif est de Tate pur.

En vertu du théorème de Köck [57], toute F-variété projective X homogène sous l'action d'un groupe semi-simple est géométriquement de Tate pur. En outre, X satisfait au *principe de nilpotence de Rost*, qui stipule que tout endomorphisme du motif $\mathrm{M}(X)$ devenant nul sur une extension E/F est nilpotent.

Démontré en premier lieu pour les quadriques par Rost [76], le principe de nilpotence est une propriété fascinante, aussi vérifiée par les variétés projectives homogènes sous l'action d'un groupe semi-simple en vertu du théorème de Chernousov, Gille et Merkurjev [11] (voir [6], [7] pour des preuves ultérieures).

Les deux propriétés précédentes assurent que pour Λ un anneau fini et connexe, les motifs de variétés projectives homogènes satisfont à la propriété de Krull-Schmidt ([2],[45]). Si X est une F-variété projective homogène, son motif $\mathrm{M}(X) \in \mathbf{Mot}_F(\Lambda)$ admet donc une décomposition en une somme directe d'objets indécomposables, unique à isomorphisme et permutation des facteurs près. On peut ainsi parler de *la* décomposition motivique (complète) de X, qui s'avère être un invariant fondamental à l'étude de ses propriétés géométriques.

2.2.1 Motifs supérieurs

Initiée dès la fin des années quatre-vingt-dix par Vishik pour les quadriques, l'étude des décompositions motiviques a révolutionné l'étude des variétés projectives homogènes. Parmi ses plus belles réussites, on trouve plusieurs solutions à des conjectures profondes : conjecture de Hoffman [50] et Kaplansky ([43],[87]) conjecture de 2-anisotropie des algèbres à involutions ([46],[47]) ainsi que l'émergence du motif de Rost, qui prend une part essentielle à la démonstration de la conjecture de Milnor, due à Voevodsky ([90],[91]).

Les faisceaux simpliciaux à la Čech associés aux quadriques projectives sont un outil essentiel mis en place par Vishik pour l'étude de leurs motifs [88]. Ces éléments de la catégorie $\mathrm{DM}_F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ des motifs de Voevodsky à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ détectent notamment l'existence de points rationnels et suivant cette philosophie, Karpenko étend la notion au cas des variété projectives homogènes sous l'action d'un groupe semi-simple p-

intérieur ([48]). Les avatars des faisceaux simpliciaux à la Čech de Vishik dans la catégorie des motifs de Chow sont les motifs dits supérieurs.

Définition 2.4. *Soit X une variété projective homogène sous l'action d'un groupe semi-simple. Pour tout p premier, une décomposition à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en étant fixée, il existe un unique facteur indécomposable du motif de X, noté U_X^p, tel que*

$$\mathrm{CH}_0(\mathrm{U}_X^p; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \neq 0.$$

La classe d'isomorphisme du motif U_X^p est appelée le motif supérieur de X, à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.

Bien qu'il ne soit pas un motif de nature purement géométrique, le motif supérieur renferme des informations essentielles sur la variété qui le porte : il encode notamment sa dimension p-canonique [51] (un résultat déjà entrevu par Vishik pour les quadriques).

2.3 Le choix de l'anneau des coefficients

Si l'étude originelle des motifs des quadriques projectives se focalisait sur les coefficients entiers, de plus amples investigations firent tourner les regards vers les coefficients finis. En effet, en vertu d'un théorème dû à Haution [39] (aussi connu de Vishik sans qu'il ait été publié), le foncteur de changement des coefficients

$$coeff_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} : \mathbf{Mot}_F(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{Mot}_F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

relève les classes d'isomophismes des motifs de quadriques projectives.

L'observation est d'autant plus féconde que pour des variétés projectives homogènes plus générales, les motifs à coefficients finis se révèlent bien plus robustes que leurs analogues à coefficients entiers, pour lequel on perd notamment la propriété de Krull-Schmidt ([8],[10]).

Rappelons que si $A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, on dit que le foncteur de changement des coefficients

$$coeff_A^B : \mathbf{Mot}_F(A) \longrightarrow \mathbf{Mot}_F(B)$$

relève les décompositions motiviques des variétés projectives homogènes s'il préserve l'indécomposabilité de leurs facteurs directs motiviques. Le résultat suivant tiré de [13] permet de définitivement sceller l'anneau des coefficients $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ comme étant le plus propice.

Théorème 2.5. *Soit p un nombre premier et G un groupe semi-simple p-intérieur sur un corps F. Pour tout corps fini k de caractéristique p, le foncteur de changement des coefficients*

$$coeff^k_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} : \mathbf{Mot}_F(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{Mot}_F(k)$$

relève les décompositions motiviques des variétés projectives G-homogènes.

Notons qu'en vertu d'un théorème de Vishik et Yagita, ce résultat s'étend au cas le plus général possible, c'est à dire si k est un anneau fini, local et dont corps résiduel de caractéristique p ([89, Corollary 2.6]).

Enfin, notons que l'étude des motifs des variétés projectives G-homogènes est le plus souvent limitée au cas des groupes p-intérieurs dans la littérature, puisque le Théorème 2.5 comme la quasi-totalité des résultats que nous mentionnerons dans la suite ne valent pas en dehors de cette situation.

2.4 Classification des motifs supérieurs de type A_n

L'article [14] est consacré à la classification complète des motifs supérieurs pour les variétés projectives homogènes sous l'action de groupes semi-simples intérieurs de type A_n (les groupes spéciaux linéaires et projectifs linéaires, notamment).

Précisons un peu plus la situation. Une algèbre A sur un corps F est dite simple centrale si elle est de dimension finie sur F, de centre F, et si elle ne possède pas d'idéal bilatère non-trivial. La dimension d'une F-algèbre centrale simple est toujours un carré parfait et son degré est alors donné par $deg(A) = \sqrt{\dim_F(A)}$.

Deux F-algèbres simples centrales A et B sont dites semblables s'il existe deux entiers n et m tels que $M_n(A) \simeq M_m(B)$. Les classes de similitude d'algèbres centrales simples sur F munies du produit tensoriel forment le groupe de Brauer de F, noté $\mathrm{Br}(F)$. L'ordre de la classe d'une F-algèbre simple centrale dans $\mathrm{Br}(F)$, noté $\exp(A)$, est l'exposant de A. Toute algèbre simple centrale A est semblable (à isomorphisme près) à une unique algèbre centrale à division dont le degré est l'indice de A, noté $\mathrm{ind}(A)$.

Dans toute la suite, les problèmes que nous considérerons ne dépendent pas des classes d'isogénies des groupe semi-simples considérés, nous pourrons donc à loisir imposer que nos groupes sont simplement connexes, ou adjoints.

Fixons donc groupe semi-simple intérieur et adjoint de type A_n sur F, qui correspond alors au groupe projectif linéaire $\mathrm{PGL}_1(A)$ d'une F-algèbre simple centrale, de degré $n+1$. Les variétés projectives homogènes associées à $\mathrm{PGL}_1(A)$ sont les variétés de drapeaux d'idéaux à droite de A, de dimension fixée.

Notation 2.6. La dimension réduite d'un idéal $I \subset A$ est donnée par

$$\mathrm{rdim}(I) = \frac{\dim_F(I)}{\deg(A)}.$$

Si $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq \deg(A)$ est une suite d'entiers, la variété des drapeaux d'idéaux $I_1 \subset ... \subset I_k$ de dimensions réduites $i_1, ..., i_k$ est notée $\mathrm{SB}(i_1, ..., i_k; A)$.

La variété $\mathrm{SB}(A) := \mathrm{SB}(1; A)$ des idéaux à droite de dimension réduite 1 est la variété de Severi-Brauer de A, tandis que les variétés $\mathrm{SB}(d; A)$ sont les variétés de Severi-Brauer généralisées de A.

Dans le cas déployé, c'est à dire lorsque A est une algèbre de matrices, les groupes intérieurs de type A_n sont les groupes projectifs linéaires classiques et les variétés projective homogènes associées sont alors les Grassmaniennes et variétés de drapeaux de sous-espaces habituelles.

Le théorème suivant regroupe les résultats de [14] qui propose une classification complète des motifs supérieurs pour les groupes semi-simples intérieurs de type A_n (on se limite ici au cas des variétés dites p-anisotropes -le plus important-, c'est à dire ne possédant pas de zéro-cycle de degré premier à p).

Théorème 2.7.
Soit p un nombre premier et A et B deux F-algèbres simples centrales de même dimension. Soient X et Y deux variétés projectives homogènes p-anisotropes sous l'action respective de $\mathrm{PGL}_1(A)$ et $\mathrm{PGL}_1(B)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- *i) les motifs supérieurs U^p_X et U^p_Y sont isomorphes ;*
- *ii) les composantes p-primaires de A et B engendrent le même sous-groupe dans le groupe de Brauer de F.*

En particulier, si les motifs supérieurs de deux variétés de drapeaux p-anisotropes

$$\mathrm{U}^p_{\mathrm{SB}(i_1,...,i_k;A)} \text{ et } \mathrm{U}^p_{\mathrm{SB}(i_1,...,i_k;B)}$$

sont isomorphes, alors tous les motifs supérieurs associés à $\mathrm{PGL}_1(A)$ et $\mathrm{PGL}_1(B)$ sont deux à deux isomorphes.

Notons que classifier les motifs supérieurs des variétés projectives homogènes est plus aisé que de classifier leurs motifs. En effet, par réduction au cas des algèbres p-primaire, le Theorème 2.7 se traduit en terme d'équivalence birationnelle stable des variétés de Severi-Brauer généralisées. On peut alors faire usage de la K-théorie algébrique, et plus précisément invoquer les formules de réductions de l'indices de Merkurjev, Panin et Wadsworth ([65], [66]).

Cette propriété des groupes projectifs linéaires est très particulière et il est légitime d'interroger le fait qu'elle s'étende à d'autres groupes semi-simples. L'article [15] clôt la question : en raffinant les méthodes de [14], on obtient un critère similaire au Theorème 2.7 pour les produits de groupes projectifs linéaires, mais qui met en jeu non seulement l'indice, mais aussi l'exposant des algèbres simples centrales considérées. L'hypothèse s'avère optimale, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.8. Considérons une extension transcendante pure $\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3)$ du corps des rationnels ainsi que l'algèbre cyclique $\Delta_1 = (\mathbb{Q}(\zeta_5)(x_1, x_2, x_3), x_1)$ associée à une racine primitive 5-ème de l'unité d'exposant 4 et d'incide 4. Les deux algèbres biquaternions $\Delta_2 = (\mathbb{Q}(\sqrt{5})(x_1, x_2, x_3), x_1) \otimes (\mathbb{Q}(\sqrt{2})(x_1, x_2, x_3), x_2)$ et $\Delta_3 = (\mathbb{Q}(\sqrt{5})(x_1, x_2, x_3), x_1) \otimes (\mathbb{Q}(\sqrt{3})(x_1, x_2, x_3), x_3)$ sont toutes deux d'indice 4 et d'exposant 2 et on constate que les variétés projectives homogènes $\mathrm{SB}(2; \Delta_1) \times \mathrm{SB}(2; \Delta_2)$ et $\mathrm{SB}(2; \Delta_1) \times \mathrm{SB}(2; \Delta_3)$ sont stablement birationnellement équivalentes, sans pour autant que les couples d'algèbres $\{A, B\}$ et $\{A, C\}$ n'engendrent le même sous-groupe dans le groupe de Brauer de $\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3)$. Le Théorème 2.7 ne vaut ainsi pas pour les produits de groupes projectifs linéaires.

2.5 Rigidité motivique des variétés de Severi-Brauer généralisées

Les résultats précédents démontrent un comportement motivique très particulier des groupes intérieurs de type A_n : si parmi les motifs supérieurs de tels groupes deux sont isomorphes sans être de Tate purs, alors ils sont en réalité tous isomorphes deux à deux. La conjecture de rigidité motivique des variétés de Severi-Brauer (voir [16], [93]) renforce cette propriété en posant la question suivante : l'indice d'une algèbre simple centrale suffit-il à déterminer la combinatoire des décompositions motiviques des variétés projectives homogènes associées ?

Conjecture. 2.9. *(Rigidité motivique des groupes projectifs linéaires)*
Soit A une F-algèbre simple centrale et X une variété projective homogène sous l'action de

$\mathrm{PGL}_1(A)$. *Si E/F est une extension telle que $ind(A) = ind(A_E)$, alors pour tout premier p, le foncteur d'extension des scalaires*

$$res_{E/F} : \mathbf{Mot}_F(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{Mot}_E(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

relève la décomposition motivique de $\mathrm{M}(X_E)$ *en celle de* $\mathrm{M}(X)$.

À nouveau, par "relève la décomposition motivique de $\mathrm{M}(X_E)$ en celle de $\mathrm{M}(X)$", on entend ici que le foncteur d'extension des scalaires $res_{E/F}$ préserve l'indécomposabilité des facteurs entrant dans la décomposition du motif $\mathrm{M}(X)$.

Hors cas triviaux, ce résultat était connu avant ma thèse uniquement pour les variétés de Severi Brauer, ainsi que pour les variétés de Severi-Brauer généralisées $\mathrm{SB}(2; D)$. L'article [16] produit une nouvelle famille de variétés d'idéaux pour laquelle la conjecture de rigidité motivique vaut, et en dehors de laquelle la conjecture demeure ouverte.

Théorème 2.10. *La conjecture de rigidité est vérifiée par les variétés projectives homogènes sous l'action de* $\mathrm{PGL}_1(A)$, *où A est d'indice impair sans facteur cubique ou d'indice divisant $8n$, avec n impair sans facteur cubique.*

La preuve de ce théorème repose sur une étude qualitative des facteurs indécomposables qui apparaissent au coeur des décompositions motiviques de ces variétés de Severi-Brauer généralisées, obtenue à l'aide du calcul du rang de certains groupes de Chow réduits.

3 Vers une classification des motifs de variétés projectives homogènes

Comme évoqué précédemment, les applications aux variétés projectives homogènes connues et en vue proviennent de l'étude de leurs motifs à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. On se limite en outre dans la suite au cas des groupes semi-simples dits p-intérieurs (définition ci-après). Les groupes classiques et la grande majorité des groupes de type exceptionnels satisfont cette hypothèse, qui est en outre optimale : en dehors de ce contexte, ni le Théorème 2.5, ni la théorie des motifs supérieurs ne persistent.

Alors qu'il existe un critère d'isomorphisme entre motifs supérieurs qui met en jeu l'équivalence birationnelle stable ([45], [88]), la classification des motifs des variétés projectives homogènes s'avère bien plus délicate. Les critères d'isomorphismes sont toutefois connus dans les cas fondamentaux suivants :

i) pour les quadriques et les variétés de Severi-Brauer ([88],[49])

ii) pour les variétés de Borel ([70], [71]).

Ces exemples mettent en valeur le lien étroit qu'entretiennent le déploiement des groupes semi-simples et les motifs des variétés projectives homogènes, un phénomène matérialisé par l'équivalence motivique des groupes semi-simples.

4 Équivalence motivique des groupes semi-simples

Issue de la conjecture de rigidité motivique des variétés de Severi-Brauer, l'équivalence motivique des groupe semi-simples vise à donner classification complète de ces groupes en fonction des motifs de leurs variétés projectives homogènes. L'article [17] introduit cette notion et construit les invariants discrets qui la contrôlent à coefficients dans $\mathbb{F}_p$: les p-indices de Tits.

Les p-indices de Tits des groupes semi-simples sont construits à partir de leurs indices de Tits classiques, eux-mêmes au cœur de la classification de Tits et Satake ([56],[73],[80],[84]). Par transposition de ces indices en fonction des invariants classiques des structures naturellement associées aux groupes semi-simples (formes quadratiques, algèbres simples centrales, algèbres à involution...) l'équivalence motivique fournit ainsi un dictionnaire complet liant motifs des variétés projectives homogènes, structures algébriques et invariants cohomologiques.

4.1 Classification de Tits

Commençons par rappeler les acteurs en jeux. Fixons tout d'abord un groupe semi-simple G sur un corps F séparablement clos, dont on note B_0 un sous-groupe de Borel, T_0 un tore maximal contenu dans B_0 et Δ un système de racines simples associé à cette donnée. Dans notre situation le diagramme de Dynkin $\Delta(G)$ dont les sommets sont donnés par Δ suffit à déterminer G à isogénie centrale près. La situation est plus délicate sur un corps quelconque, où la classification des groupes semi-simples fait appel aux indices de Tits.

Considérons donc désormais un groupe semi-simple G, défini sur un corps F quelconque dont on note F_{sep}/F une clôture séparable. L'indice de Tits de G (parfois aussi appelé le diagramme de Satake de G) est noté $Tits(G)$ et correspond à la donnée suivante :

i) le diagramme de Dynkin de G, défini par $\Delta(G) \stackrel{def}{=} \Delta(G_{F_{sep}})$, dont on note toujours Δ l'ensemble des sommets ;

ii) une action du groupe de Galois absolu $Gal(F_{sep}/F)$ sur Δ ;

iii) un sous-ensemble de sommets dits *distingués* de Δ, invariant sous l'action de $Gal(F_{sep}/F)$ que l'on note $\Delta_0(G)$.

Plus précisément, en fixant un tore maximal T de G, le groupe de Galois absolu $Gal(F_{sep}/F)$ permute les systèmes de racines simples associés à $G_{F_{sep}}$ et $T_{F_{sep}}$, si bien que l'on peut modifier cette action par un élément du groupe de Weyl pour qu'il préserve le diagramme de Dynkin de G. L'action obtenue du groupe de Galois absolu sur $\Delta(G)$ ne dépend pas du choix de T et est appelée la $*$-action.

Définition 4.1. *Un groupe semi-simple G est intérieur si la $*$-action sur le sommets de $\Delta(G)$ est triviale. On dit que G est p-intérieur (pour un nombre premier p) si G devient intérieur sur une extension de degré p^n de son corps de définition.*

Par souci de précision, on note dans la suite indifféremment Δ ou $\Delta(G)$ le diagramme de Dynkin de G ainsi que l'ensemble de ses sommets. La classification de Borel et Tits stipule qu'il existe une bijection entre les classes d'isomorphismes de variétés projectives homogènes sous l'action de G et les sous-ensembles des sommets de son diagramme de Dynkin, invariants pour la $*$-action (voir ci-après).

On colore donc les sommets du diagramme de Dynkin de G comme suit : un sommet s de $\Delta(G)$ est dit *distingué* s'il existe une $*$-orbite $\mathcal{O}(s) \subset \Delta(G)$ contenant s telle que les variétés projectives G-homogène de type $\mathcal{O}(s)$ admettent un point rationnel. Le sous-ensemble Δ_0 évoqué dans l'indice de Tits de G vu précédemment correspond au complémentaire de l'ensemble des sommets ainsi distingués de Δ.

4.2 Classification de Borel-Tits

Fixons toujours G un groupe semi-simple sur un corps F. Une G-variété X est une variété projective G-homogène si elle devient isomorphe sur une clôture séparable de F à un quotient de G par un sous-groupe parabolique. La classification de Borel-Tits [5] établit une bijection

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{sous-ensembles}\\ *\text{-invariants de } \Delta(G)\end{array}\right\} & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{c}F\text{-classes d'isomorphismes de}\\ \text{variétés projectives } G\text{-homogènes}\end{array}\right\} .\\
\Theta & \longmapsto & X_{\Theta,G}
\end{array}$$

Si Θ est un sous-ensemble $*$-invariant des sommets du diagramme de Dynkin de G, on dira ainsi qu'une variété projective homogène sous l'action de G est de *type* Θ si elle est isomorphe à $X_{\Theta,G}$.

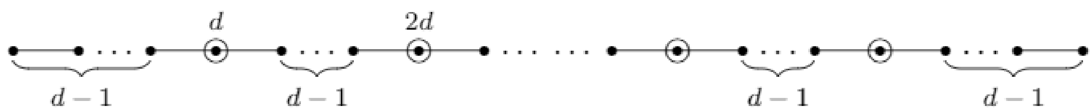
Notation 4.2. Il existe deux conventions différentes pour la bijection précédente dans la littérature : dans ce texte, nous optons pour celle pour laquelle la variété de Borel d'un groupe semi-simple G est de type $\Delta(G)$.

Sous cette convention, une variété projective homogène de type Θ possède un point rationnel, si et seulement si les sommets qui composent Θ sont tous distingués.

4.2.1 Groupes intérieurs de type A_n

Un groupe adjoint et intérieur de type A_n est isomorphe au groupe projectif linéaire $\mathrm{PGL}_1(A)$ d'une algèbre simple centrale A, de degré $n+1$. Le degré et l'indice d de A déterminent alors l'indice de Tits du groupe, donné par

$({}^1A_n)$



Orbites distinguées: $\{d, 2d, ..., n+1-d\}$.

Une variété projective $\mathrm{PGL}_1(A)$-homogène de type $\{i\}$ est isomorphe à la variété de Severi-Brauer généralisée $\mathrm{SB}(i;A)$ des idéaux à droite de A de dimension réduite i rencontrée précédemment.

4.3 Equivalence motivique des groupes semi-simples

On peut désormais définir la notion d'équivalence motivique suivant [17], [19]. Un groupe semi-simple G et un nombre premier p étant fixés, on associe à tout sous-ensemble Θ des sommets de $\Delta(G)$ un motif $\mathrm{M}^p_{\Theta,G}$ de $\mathbf{Mot}_F(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, le motif standard de type Θ de G à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.

Si Θ est un sous-ensemble invariant pour la $*$-action, le motif $\mathrm{M}^p_{\Theta,G}$ est simplement le motif à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ d'une variété projective G-homogène de type Θ. En revanche, si Θ n'est pas invariant, on étend premièrement le corps de base à une extension minimale F_Θ/F sur laquelle le sous-ensemble Θ est $*$-invariant, avant de définir le motif $\mathrm{M}^p_{\Theta,G}$ comme la corestriction à F du motif $\mathrm{M}(X_{\Theta,G_{F_\Theta}})$ d'une variété projective G_{F_Θ}-homogène de type Θ, à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.

Définition 4.3. *Soient G et G', deux groupe semi-simples, tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi-déployé. On dit que G et G' sont motiviquement équivalents modulo p s'il existe un isomorphisme*

$$\varphi : \Delta(G) \longrightarrow \Delta(G')$$

compatible avec les actions du groupe de Galois absolu $Gal(F_{sep}/F)$, tel que pour tout sous-ensemble $\Theta \subset \Delta(G)$, les motifs standards $\mathrm{M}^p_{\Theta,G}$ et $\mathrm{M}^p_{\varphi(\Theta),G'}$ sont isomorphes.

Notons que le choix des coefficients finis n'est ici pas anodin : on dira que G et G' sont motiviquement équivalents si ceux-ci sont motiviquement modulo p, pour tout nombre premier p. L'équivalence motivique ainsi définie se révèle plus féconde qu'une définition similaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Soit p un nombre premier. On dit qu'un corps est p-spécial si toutes ses extensions finies sont de degré une puissance de p. Si F est un corps, il existe une extension algébrique minimale F_p/F qui est p-spéciale. Celle-ci est unique à isomorphisme près, et le degré toute extension finie intermédiaire est premier à p. On appelle cette extension F_p une clôture p-spéciale de F. Suivant [17], introduisons les invariants discrets qui permettent de caractériser l'équivalence motivique.

Définition 4.4. *Soit p un nombre premier et G un groupe semi-simple, défini sur un corps F. Le p-indice de Tits de G, noté $\mathrm{Tits}_p(G)$, est le p-indice de Tits du groupe G_{F_p}, où F_p est une clôture p-spéciale de F.*

Le p-indice de Tits de G, correspond donc à la donnée :

i) du diagramme de Dynkin $\Delta(G)$ muni de la $*$-action de $Gal(F_{sep}/F_p)$;

ii) d'un sous-ensemble $\Delta^p_0(G)$ de sommets p-distingués de $\Delta(G)$ défini ainsi. Un sommet s de $\Delta(G)$ est p-distingué s'il existe une $*$-orbite $\mathcal{O}(s)$ contenant s telle que la variété $X_{\mathcal{O}(s),G}$ a un zéro-cycle de degré premier à p.

Le p-indice de Tits supérieur de G est la donnée des p-indices de G_E, où E parcourt toutes les extensions de F. Le théorème suivant, le principal de [17], stipule que le p-indice de Tits supérieur d'un groupe algébrique semi-simple détermine sa classe d'équivalence motivique modulo p.

Théorème 4.5. *Soit p un nombre premier et G, G' des groupe semi-simples p-intérieurs sur F, tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi déployé.*

Les groupes G et G' sont motiviquement équivalents modulo p, si et seulement s'il existe une bijection

$$\varphi : \Delta(G) \longrightarrow \Delta(G')$$

qui identifie leurs p-indices de Tits supérieurs, c'est à dire compatible avec les $*$-actions et tel que $\varphi(\Delta^p_{0,G_E}) = \Delta^p_{0,G'_E}$, pour toute extension E/F.

La preuve de se résultat est scindée en deux étapes principales. La première consiste à réduire l'étude de l'équivalence motivique à celle des motifs supérieurs des variété projectives homogènes considérées. Plus précisément, on montre le résultat suivant.

Théorème 4.6. *Soit p un nombre premier et G, G' des groupes semi-simples p-intérieurs, tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi-déployé. Les conditions suivantes sont équivalentes*

i) Les groupes G et G' sont motiviquement équivalents modulo p ;

ii) Il existe une bijection

$$\varphi : \Delta(G) \to \Delta(G')$$

compatible avec les $*$-actions telle que pour tout sous-ensemble $\Theta \subset \Delta(G)$, les motifs supérieurs de $\mathrm{M}^p_{\Theta,G}$ et $\mathrm{M}^p_{\varphi(\Theta),G'}$ sont isomorphes.

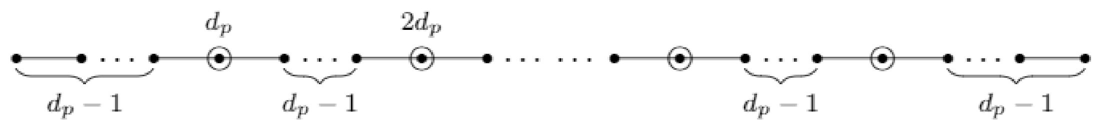
Sa preuve repose sur une raisonnement par récurrence sur le rang commun des groupes G et G' et fait usage de la notion d'extension pondérée, introduite dans [17]. Ces dernières sont des extensions particulières du corps de base qui respectent les décompositions motiviques des variétés projectives homogènes. On met alors au point un algorithme implicite qui permet de reconstruire la décomposition motivique d'une variété projective homogène à partir de celle acquise sur une extension pondérée. Par extension aux corps des fonctions d'une variété projective homogène bien choisie, on peut ainsi contrôler sa décomposition motivique et réduire la preuve du théorème 4.6 au cas isotrope, pour lequel il est loisible d'utiliser les décompositions de Chernousov, Gille et Merkurjev [11] (voir aussi [7]).

Pour conclure la preuve du théorème 4.5, il reste à lier les p-indices de Tits supérieurs et les motifs supérieurs des variétés projectives homogènes. Ceci est obtenu comme conséquence de la théorie des motifs supérieurs, en utilisant des tours de déploiement génériques de Knebusch [54], [55] et Kersten-Rehmann [52].

4.3.1 Équivalence motivique, cas intérieur de type A_n

Nous l'avons vu précédemment, l'indice de Tits d'un groupe semi-simple intérieur et de type A_n est déterminé par l'indice de l'algèbre simple centrale sous-jacente. Le p-indice de Tits est quant à lui déterminé par celui de sa composante p-primaire, notée d_p, comme suit.

$({}^1A_n, p)$



Orbites p-distinguées: $\{d_p, 2d_p, ..., n+1-d_p\}$.

Le Théorème 4.5 se transcrit pour les groupes intérieurs de type A_n comme suit.

Théorème 4.7. *Soit p un nombre premier et A, B deux algèbres simples centrales sur un corps F, de même dimension.*
Les groupes projectifs linéaires $\mathrm{PGL}_1(A)$ et $\mathrm{PGL}_1(B)$ sont motiviquement équivalents modulo p, si et seulement si les composantes p-primaires de A et B engendrent le même sous-groupe dans le groupe de Brauer de F.

Allié à la classification des motifs supérieurs de type ${}^1A_n$ réalisée dans [14] et aux résultats de [93], le Théorème 4.7 permet d'obtenir le critère général d'isomorphisme suivant pour les motifs des variétés de drapeaux d'idéaux.

Corollaire 4.8. *Soit p un nombre premier, A, B deux algèbres simples centrales de même dimension sur un corps F et $X_{\Theta,\mathrm{PGL}_1(A)}$ une variété projective homogène. Supposons que $\mathrm{M}(X_{\Theta,\mathrm{PGL}_1(A)})$ ne soit pas de Tate pur à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Les conditions suivantes sont alors équivalentes*

- *i)* *les motifs $\mathrm{M}(X_{\Theta,\mathrm{PGL}_1(A)})$ et $\mathrm{M}(X_{\Theta,\mathrm{PGL}_1(B)})$ sont isomorphes ;*
- *ii)* *les composantes p-primaires de A et B engendrent le même sous-groupe dans le groupe de Brauer de F ;*
- *iii)* *Les groupes algébriques semi-simples $\mathrm{PGL}_1(A)$ et $\mathrm{PGL}_1(B)$ sont motiviquement équivalents modulo p.*

4.3.2 Équivalence motivique des groupes spéciaux orthogonaux

En vertu du théorème d'isotropie de Springer [79] pour les formes quadratiques, le 2-indice de Tits d'un groupe orthogonal correspond à son indice de Tits. Le Théorème 4.5 se traduit donc dans le cas des groupes orthogonaux comme suit.

Théorème 4.9. *Soient q et q' deux formes quadratiques sur un corps F. Les conditions suivantes sont équivalentes*

i) les groupes $\mathrm{SO}(q)$ *et* $\mathrm{SO}(q')$ *sont motiviquement équivalents modulo* 2 *;*

ii) pour toute extension E/F les indices de Witt de q_E et q'_E sont égaux.

La condition renforce le théorème d'équivalence motivique de Vishik pour les quadriques [88]. Il implique en particulier que si les motifs de deux quadriques sont isomorphes à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il en va de même pour toutes les variétés homogènes sous l'action des groupes spéciaux orthogonaux associés, deux à deux. Par la suite, nous dirons alors que les quadriques sont des *variétés critiques*.

5 Détermination des p-indices de Tits

Si [17] introduit les p-indices de Tits et montre que ces invariants contrôlent l'équivalence motivique, une prochaine étape en vue d'établir des critères purement algébriques consiste à déterminer les valeurs que peuvent prendre ces indices, ainsi qu'à les exprimer en fonction d'invariants algébriques ou cohomologiques classiques. Ce travail est effectué en commun avec Skip Garibaldi [18].

5.1 Pour quels nombres premiers ?

Il convient d'entamer l'étude par une première réduction. L'équivalence motivique que nous considérons implique le choix crucial d'un nombre premier p pour définir l'anneau des coefficients des motifs envisagés. La théorie classique des groupes semi-simple indique alors qu'un tel groupe G étant fixé, travailler ainsi "localement en p" n'est pertinent que pour un nombre fini de premiers p. Ces nombres premiers sont les nombres premiers de torsion homologique de G, décrits dans [78] et [85]. La table suivante représente les nombres premiers de torsion homologique des groupes absolument simples.

Étant donné un groupe semi-simple G, nous nous limitons dans la suite à ces nombres premiers de torsion homologique, les autres cas étant sans difficulté.

Type	Premiers de torsion homologique
A_n	2 et diviseurs premiers de $n+1$
B_n, C_n, D_n $(n \neq 4)$	2
G_2	2
D_4, E_7	2 et 3
F_4	2 et 3
E_6	2 et 3
E_8	2, 3, et 5

5.2 Groupes de type classique

Pas soucis de simplicité, nous nous limitons dans cette partie aux corps de caractéristique différente de 2 (cas pour lequel les résultats persistent très probablement, mais où il faut notamment considérer la notion de paire quadratique pour les groupes de type D [56]).

Étant donnée une involution σ sur une algèbre simple centrale A de degré n sur un corps K, notons F le sous-corps des éléments de K fixes par σ. Si σ est une involution orthogonale ou symplectique, on a alors $K = F$, tandis que si σ est une involution unitaire, K est une extension quadratique de F. Comme il est d'usage, on autorise aussi A à être le produit direct de deux algèbres simples centrales sur F et ainsi son centre est l'algèbre étale $K = F \times F$, munie d'une involution dont la restriction à $F \times F$ est son unique automorphisme de F-algèbre non trivial. Dans ce cas, (A, σ) est alors isomorphe à l'algèbre $E \times E^{op}$, où E est une algèbre simple centrale sur F, munie de l'involution d'échange ε définie par $\varepsilon(x, y^{op}) = (y, x^{op})$. On dira alors que le degré et l'indice de A sont ceux de E.

Enfin, si (A, σ) est une F-algèbre à involution, l'indice de Witt de σ, noté $i_w(\sigma)$, est la dimension réduite maximale d'un idéal à droite σ-isotrope de A, tandis que le 2-indice de Witt de σ, noté $i_{w,2}(\sigma)$, correspond à la valeur maximale de $i_w(\sigma_E)$, où E parcoure toutes les extensions de degré impaires du corps de F [18].

Dans les cas décrits ci-dessus (y compris unitaire), nous dirons que (A, σ) est une algèbre à involution sur F. Si (A, σ) est une algèbre à involution, on note $\mathrm{PSIM}(A, \sigma)$ la composantes connexe de son groupe d'automorphismes. Il s'agit d'un groupe algébrique semi-simple et de type classique dépendant du degré de A et du type de l'involution σ. Réciproquement, comme envisagé par Weil [92], tout groupe semi-simple de type classique est isogène à un groupe $\mathrm{PSIM}(A,\sigma)$, pour une algèbre à involution (A,σ) sur F [56], [65], [66].

Notons que deux groupes $\mathrm{PSIM}(A,\sigma)$ et $\mathrm{PSIM}(B,\tau)$ sont formes intérieures d'un même groupe quasi-déployé si et seulement si σ et τ sont de même type, A et B sont de même degré (et leur centres sont isomorphes dans le cas unitaire) et si les involutions sont de même discriminant en type orthogonal. Suivant les conventions usuelles, on note ${}^tT_n$ le type d'un groupe absolument simple G, où T_n désigne le type du système de racines associé à $G_{F_{sep}}$ et où t correspond à l'ordre de la $*$-action sur le diagramme de Dynkin de G. Les groupes de types intérieurs sont ainsi ceux pour lesquels $t = 1$.

5.2.1 p-indices de Tits des groupes classiques

On déterminer les valeurs possibles des indices de Tits des groupes classiques sur les corps p-spéciaux, où p parcoure leurs nombres premiers de torsion homologique. Le travail se réduit donc à deux cas principaux :

i) si p est impair, alors en dehors des groupes déployés, seul subsiste le cas des groupes intérieurs et de type A_n. Cela découle de la description des nombres premiers de torsion homologique.

ii) si $p = 2$, l'étude est réduite à une question de nature purement algébrique :

Peut-on construire pour tous entiers positifs m et n une algèbre à involution anisotrope sur un corps 2-spécial qui soit de degré m, d'indice 2^n et de type arbitraire ?

Couvert par la détermination des indices de Tits de type ${}^1A_n$, le premier point ne pose pas grande difficulté : on construit aisément des algèbres simples centrales d'indice p^n avec n arbitraire sur un corps p-spécial. Plus délicat, le second cas est traité dans l'article [18] grâce à la technique suivante, due à Jean-Pierre Tignol.

Soit Γ_n un produit de n copies de $\mathbb{Z}_{(2)}$. Un corps F étant donné, considérons le corps F_n constitué des séries formelles

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_n} a_\gamma x^\gamma$$

à coefficients dans F et au support bien ordonné pour l'ordre lexicographique [31], [83].

Le corps F_n est muni de la valuation

$$v : K_n \longrightarrow \Gamma_n \cup \{\infty\}$$

qui fait correspondre à une telle série le plus petit élément de son support. Si (D, σ) est une algèbre à division à involution sur F, on montre que pour tout D_{F_n}-module de rang au plus k, la forme hermitienne

$$\begin{array}{cccc} h_k : & M \times M & \longrightarrow & D_{F_n} \\ & (a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{k} \sigma_{F_n}(a_i) x^{\varepsilon_i} b_i \end{array}$$

est anisotrope, où ε_i est le n-uplet dont la seule composante non nulle est la i-ième, qui vaut 1 [18, Proposition 7]. En notant ainsi σ_k l'involution adjointe, on obtient une algèbre à involution $(M_k(D_{F_n}), \sigma_k)$ anisotrope et de même type que σ.

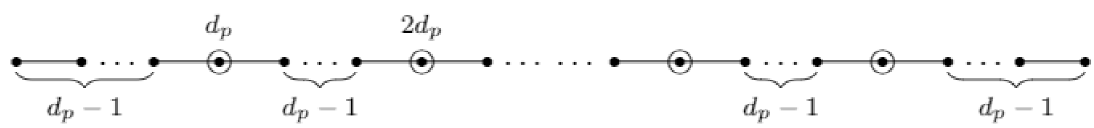
Dès lors, on construit les les algèbres à involution recherchées comme suit : soit F un corps et $E = F(x_1, ..., x_s)$ une extension transcendante pure de degré suffisant pour construire une algèbre à involution (D, σ) de degré 2^n.
En notant L/E une clôture 2-spéciale de E, le processus de Tignol décrit ci-dessus appliqué à l'algèbre à involution (D_L, σ_L) prouve l'existence sur L_n (qui est aussi 2-spécial, voir [18]) d'une algèbre à involution de degré 2^n.

On obtient donc les tables suivantes des 2-indices de Tits des groupes classiques.

5.2.2 Groupes de type ${}^1A_n$

Un groupe absolument simple de type ${}^1A_n$ est isogène au projectif linéaire $\mathrm{PGL}_1(A)$ d'une algèbre simple centrale A sur F de degré $n+1$. Notant $d_p = p^{v_p(\mathrm{ind}(A))}$ l'indice d'une composante p-primaire de A, on obtient les valeurs suivantes pour les p-indices de Tits de type ${}^1A_n$.

$({}^1A_n, p)$

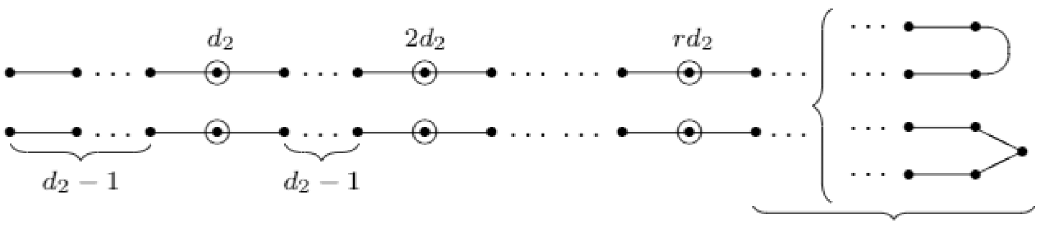


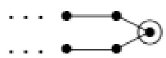
Orbites p-distinguées: $\{d_p, 2d_p, ..., n+1-d_p\}$.

5.2.3 Groupes de type ${}^2A_n$

Un groupe absolument simple de type ${}^2A_n$ est isogène à $\mathrm{PSIM}(A,\sigma)$, où (A,σ) est une algèbre de degré $n+1$, munie d'une involution unitaire (A est ici une algèbre simple centrale sur une extension quadratique E/F).

Le seul nombre premier de torsion homologique est ici 2, on note d_2 l'indice d'une composante 2-primaire de A et on note r l'entier positif tel que $i_{w,2}(\sigma) = rd_2$.

$({}^2A_n, 2)$ 

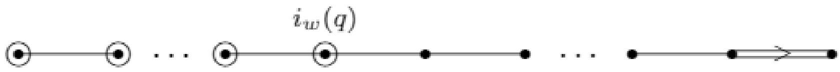
si $n+1 = rd_2$, la partie droite est 

Orbites 2-distinguées: $\{\{d_2, n+1-d_2\}, \{2d_2, n+1-2d_2\}, ..., \{rd_2, n+1-rd_2\}\}$.

5.2.4 Groupes de type B_n

Un groupe absolument simple de type B_n est isogène au groupe spinoriel $\mathrm{Spin}(V,q)$ d'un espace quadratique (V,q) de dimension $(2n+1)$ (les groupes adjoints de type B_n sont les groupes spéciaux orthogonaux).

À nouveau, l'unique nombre premier de torsion homologique de ces groupes est deux et on note $i_w(q)$ l'indice de Witt de l'espace quadratique associée. Les 2-indices de Tits obtenus sont les suivants.

$(B_n, 2)$ 

Orbites 2-distinguées: $\{1, 2, ..., i_w(q)\}$.

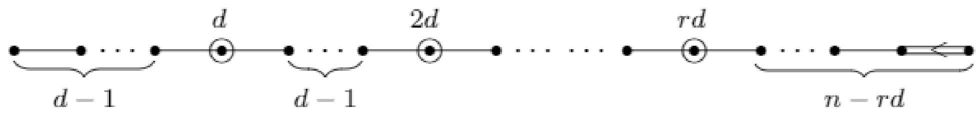
5.2.5 Groupes de type C_n

Un groupe absolument simple C_n est isogène au groupe $\mathrm{PSIM}(A,\sigma)$ associé à une algèbre simple centrale de degré $2n$, munie d'une involution symplectique.

L'unique nombre premier de torsion homologique est ici deux et on note d l'indice de A

et r l'entier tel que $i_{w,2}(\sigma) = rd$. Les 2-indices obtenus sont les suivants.

$(C_n, 2)$



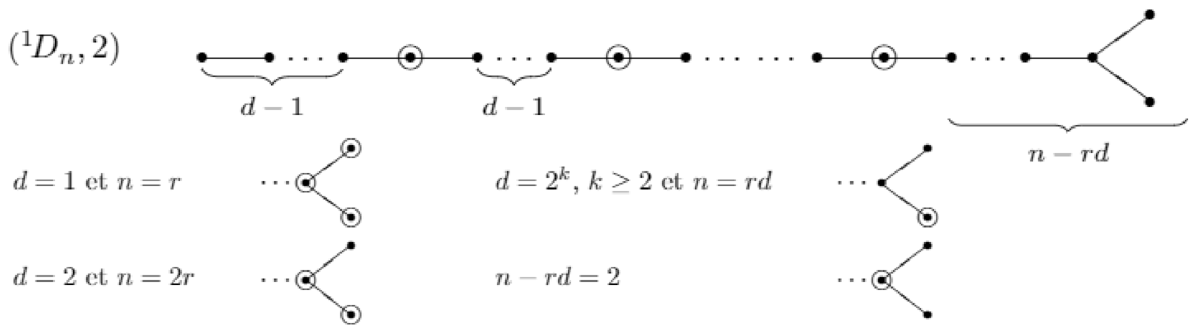
si $n = rd$, la droite devient

Orbites 2-distinguées: $\{d, 2d, ..., rd\}$.

5.2.6 Groupes de type ${}^1D_n$

Sur un corps de caractéristique impaire, un groupe absolument simple de type ${}^1D_n$ est isogène aux groupe $\mathrm{PSIM}(A, \sigma)$ associé à une algèbre à involution de (A, σ) de degré $2n$, munie d'une involution orthogonale de discriminant trivial. La généralisation en caractéristique 2 est donnée par la notion de paire quadratique (A, σ, f), décrite dans [56].

L'unique nombre premier de torsion homologique d'un tel groupe est deux et on note à nouveau d l'indice de A et r l'entier tel que $i_{w,2}(\sigma) = rd$.



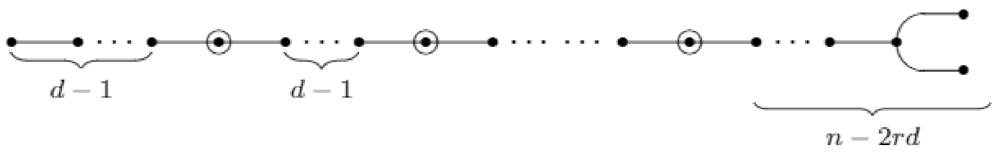
Orbites 2-distinguées: $\{d, 2d, ..., rd\}$.

5.2.7 Groupes de type ${}^2D_n$

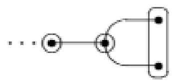
Un groupe algébrique absolument simple de type ${}^2D_n$ sur un corps de caractéristique différente de 2 est isogène au groupe $\mathrm{PSIM}(A, \sigma)$ d'une algèbre simple centrale de degré $2n$, munie d'une involution orthogonale de discriminant non-trivial (la notion adéquate en caractéristique 2 est celle de paire quadratique).

L'unique nombre premier de torsion homologique est deux, on note à nouveau d l'indice de l'algèbre simple centrale sous-jacente et r l'entier tel que $i_{w,2}(\sigma) = rd$.

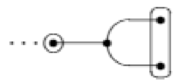
$({}^2D_n, 2)$



$n - rd = 1$ et $d = 1$



$n - rd = 1$ et $d = 2$



Orbites 2-distinguées: $\begin{cases} \{d, 2d, ..., rd\} & \text{si } rd < n-1; \\ \{d, 2d, ..., (r-1)d, \{n-1, n\}\} & \text{si } rd = n-1. \end{cases}$

5.3 p-indices de Tits des groupes exceptionnels

Soit G un groupe semi-simple sur F et $\tilde{G}$ le revêtement simplement connexe de G, dont on note Z le centre. Il existe une unique classe $\nu_G \in H^1(F, G)$ telle que le groupe G^{ν_G} soit quasi-déployé. La classe de Tits t_G du groupe G est donnée par

$$t_G := -\delta(\nu_G),$$

où $\delta : H^1(F, G) \longrightarrow H^2(F, Z)$ est le bord de la suite exacte

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Si G est un groupe absolument simple dont on note respectivement $\tilde{G}$ et $\bar{G}$ le revêtement simplement connexe et le groupe adjoint associé, on peut définir à partir de l'invariant de Rost de $\tilde{G}$ ([18], [33]) deux invariants cohomologiques

$$a(G) \in H^3(k, \mathbb{Z}/n_{\tilde{G}}\mathbb{Z}(2)) \text{ et } b(G) \in H^3(k, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(2))$$

où $n_{\tilde{G}}$ correspond à l'ordre de l'invariant de Rost de $\tilde{G}$ et où m est le plus grand diviseur de $n_{\tilde{G}}$ premier à l'exposant du centre de $\tilde{G}$.

5.3.1 Groupes de type G_2

Le seul nombre premier de torsion homologique d'un groupe de type G_2 est 2. En vertu de [18, Proposition 9], un groupe G de type G_2 est soit 2-anisotrope, soit 2-déployé et son déploiement est contrôlé par l'invariant $b(G)$. Ce dernier caractérisant les classes d'isomorphismes de groupes de type G_2 ([56], [81]) on obtient alors le critère suivant.

Théorème 5.1. *Deux groupes de type G_2 sont motiviquement équivalents modulo 2 si et seulement s'ils sont isomorphes.*

5.3.2 Groupes de type D_4

Les groupes de type ${}^1D_4$ et ${}^2D_4$ sont de types classique et ces cas ont donc déjà été traités. Seul reste ainsi le cas ${}^3D_4$ pour le nombre premier de torsion homologique $p = 3$, qui satisfait aux conditions de [18, Proposition 9]. Le 3-indice de Tits d'un tel groupe est donc soit anisotrope, soit quasi-déployé, tandis que l'équivalence motivique y est régie par l'invariant $b(G)$ [18, Corollary 10].

5.3.3 Groupes de type F_4

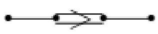
Les nombres premiers de torsion homologique des groupes de type F_4 sont 2 et 3. Si G est un groupe de ce type, il est d'usage de décomposer l'invariant $b(G) \in H^3(F, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}(2))$ en une somme $f_3(G) + g_3(G)$, où

$$f_3(G) \in H^3(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2)) \text{ et } g_3(G) \in H^3(F, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}(2))$$

Classiquement, on associe de plus à un tel groupe G une autre classe $f_5(G) \in H^5(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ([33],[56],[69]).

Groupes de type F_4, $p = 2$.

Tous les indices de Tits classiques des groupes de type F_4 apparaissent comme 2-indices de Tits puisqu'ils sont réalisés sur le corps des nombres réels. On obtient donc la table suivante, ainsi que le critère suivant d'équivalence motivique en fonction des invariants rencontrés plus tôt.

Indice de Tits de G	$f_3(G)$	$f_5(G)$	$g_3(G)$
	0	0	0
	$\neq 0$	0	0
	$f_5(G)$ et $g_3(G)$ tous deux non-nuls		

On obtient le critère suivant d'équivalence motivique ([18]).

Théorème 5.2. *Deux groupes G et G' de type F_4 sont motiviquement équivalents modulo 2 si et seulement si $f_3(G) = f_3(G')$ et $f_5(G) = f_5(G')$.*

Groupes de type F_4, $p = 3$

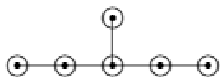
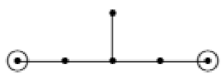
Pour le nombre premier de torsion homologique 3, les groupes de type F_4 entrent dans les conditions de [18, Proposition 9]. Les groupes de type F_4 est ainsi soit 3-anisotrope, soit 3-déployé, tandis que l'équivalence motivique modulo 3 est régie par l'invariant $b(G)$ [18, Corollary 10].

5.3.4 Groupes de type ${}^1E_6$

Les nombres premiers de torsion homologique des groupes de type E_6 sont 2 et 3.

Groupes de type ${}^1E_6$, $p = 2$

La classe de Tits d'un groupe de type ${}^1E_6$ est nulle sur un corps 2-spécial, en particulier un tel groupe ne peut être 2-anisotrope. En décomposant l'invariant $a(G) \in H^3(F, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}(2))$ en une somme $f_3(G) + g_3(G)$ pour $f_3 \in H^3(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2))$ et $g_3 \in H^3(F, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}(2))$, les 2-indices de Tits des groupes de type ${}^1E_6$ sont ainsi les suivants ([9],[56],[69]).

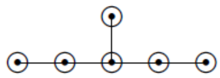
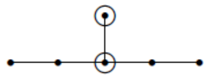
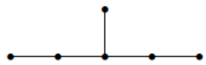
2-indices de Tits	$f_3(G)$	$g_3(G)$
	0	0
	$\neq 0$	0

On obtient ainsi le critère suivant d'équivalence motivique.

Théorème 5.3. *Deux groupes G et G' de type ${}^1E_6$ sur un corps F sont motiviquement équivalents modulo 2 si et seulement si les composantes 2-primaires de $a(G_{F_2})$ et $a(G'_{F_2})$ sont égales, où F_2 est une clôture 2-spéciale de F.*

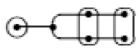
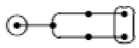
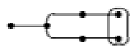
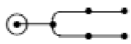
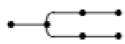
Groupes de type ${}^1E_6$, $p = 3$

L'indice qui occupe la seconde ligne du tableau précédent ne peut être le 3-indice de Tits d'un groupe G de type ${}^1E_6$ puisqu'il n'existe pas de groupe 3-anisotrope de type ${}^1D_4$. Les trois indices de Tits possibles restants pour les groupes de type ${}^1E_6$ se réalisent en tant que 3-indices, comme montré dans [35] qui tisse un lien entre ces indices et le J-invariant des groupes semi-simples.

3-indices de Tits




5.3.5 Groupes de type ${}^2E_6$

Puisqu'il s'agit ici du nombre premier de torsion homologique 2, on peut supposer que la classe de Tits des groupes considérés est nulle et les valeurs possibles des 2-indices de Tits du groupe sont alors déterminés par [34], suivant la table ci-dessous (E/F y désigne l'extension quadratique qui scinde la $*$-action).

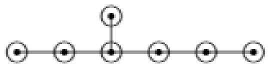
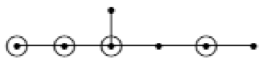
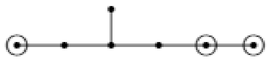
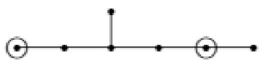
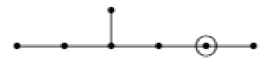
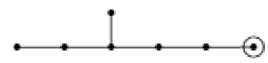
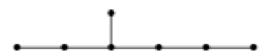
2-indice	$b(G) \in H^3(k, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}(2))$
	0
	symbole non-nul de $H^3(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2))$ trivial sur E
	symbole de $H^3(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2))$ non-trivial sur E
	pas un symbole dans $H^3(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(2))$
	$\neq 0$

5.3.6 Groupes de type E_7

À nouveau, l'étude est restreinte aux premiers 2 et 3. Si G est un groupe de type E_7, sa classe de Tits est représentée par une algèbre centrale de degré 8, que l'on nomme A [86].

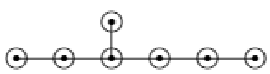
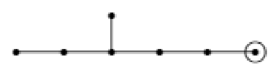
Groupes de type E_7, $p = 2$.

Un groupe de type E_7 ne peut ainsi pas avoir un noyau 2-anisotrope de type ${}^1E_6$, tandis que [18] montre que les sept autres indices de Tits classiques sont réalisables en tant que 2-indices. On obtient donc les possibilités suivantes.

2-indices de Tits	ind A
	1
	2
	1
	2
	2
	divise 4
	divise 8

Groupes de type E_7, $p = 3$.

Un groupe semi-simple G de type E_7 étant fixé, on peut supposer que le corps de base est 3-spécial, et donc que l'algèbre simple centrale A associée à la classe de Tits de G est déployée. En outre, le noyau anisotrope de G ne peut être de type D_4, et [18] montre qu'il n'existe pas de groupe 3-anisotrope de type E_7. Les 3-indices de Tits de type E_7 sont les suivants, qui donnent lieu au critère ci-après.

3-indices de Tits	ind A
	1
	1

L'annulation de l'invariant $b(G)$ contrôle ainsi l'équivalence motivique modulo 3 des groupes de type E_7 et on obtient le critère suivant ([18]).

Théorème 5.4. *Deux groupes G et G' de type E_7 sur un corps F sont motiviquement équivalents modulo 3 si et seulement si $b(G) = \pm b(G') \in H^3(F, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}(2))$.*

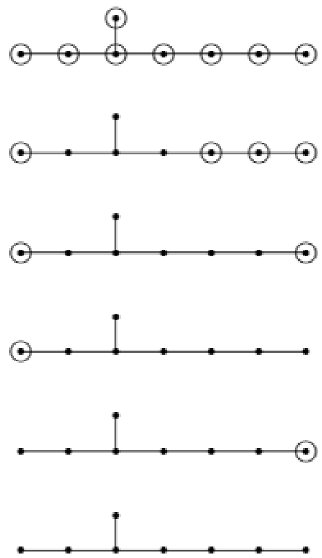
5.3.7 Groupes de type E_8

Les nombres premiers de torsion homologique des groupes de type E_8 sont 2, 3 et 5.

Groupes de type E_8, $p = 2$.

En vertu des cas précédemment traités, un groupe de type E_8 sur un corps 2-spécial ne peut posséder un noyau anisotrope de type ${}^1E_6$. Les autres indices de Tits classiques sont réalisables et compulsés dans la table ci-dessous.

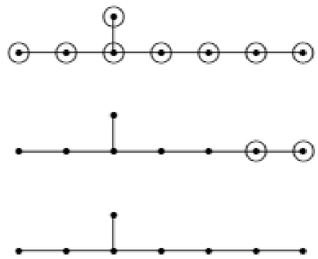
2-indices de Tits de type E_8



Groupes de type E_8, $p = 3$.

Le noyau anisotrope d'un groupe de type E_8 ne peut être de type ${}^1D_6$, ${}^1D_7$ ou E_7 sur un corps 3-spécial. Ces cas sont les seuls à exclure et la liste des 3-indices de Tits de type E_8 est la suivante.

3-indices de Tits de type E_8



Groupes de type E_8, $p = 5$.

Les groupes de type E_8 sont soit 5-anisotropes, soit 5-déployés en vertu de [18, Proposition 9]. L'équivalence motivique modulo 5 des groupes de type E_8 est ainsi contrôlée par l'invariant $b(G)$ [18, Corollary 10].

6 Variétés critiques

Nous l'avons vu précédemment, si les motifs de deux quadriques sont isomorphes, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors les groupes spéciaux orthogonaux associés sont motiviquement équivalents modulo 2 [17]. Les quadrique sont ainsi des "variétés-tests" qui suffisent à détecter l'équivalence motivique des groupes spéciaux orthogonaux. Cette observation correspond à celle de *variété critique*, une notion introduite dans [19].

Définition 6.1. *Soit p un nombre premier et G un groupe semi-simple sur un corps F, forme intérieure d'un groupe quasi-déployé G_0.*
Une variété projective homogène $X_{\Theta,G}$ est dite critique pour G modulo p si pour toute autre forme intérieure G' de G_0, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une bijection

$$\varphi : \Delta(G) \longrightarrow \Delta(G')$$

compatible avec les $*$-actions de G et G' telle que les motifs standards $\mathrm{M}^p_{\Theta,G}$ et $\mathrm{M}^p_{\varphi(\Theta),G'}$ sont isomorphes.

ii) Les groupes G et G' sont motiviquement équivalents modulo p.

Le Théorème 4.8 stipule ainsi par exemple que toute variété projective homogène sous l'action d'un groupe intérieur de type A_n est critique, dès lors que son motif n'est pas de Tate pur.

L'intérêt de construire des variétés critiques est double : outre le fait qu'elles caractérisent l'équivalence motivique, le Théorème 4.7 montre réciproquement que les p-indices de Tits contrôlent les classes d'isomorphismes des motifs de ces variétés.

6.1 Existence de variétés critiques

Signalons que l'existence de variétés critique n'est pas toujours assurée : on peut construire des groupes semi-simples qui n'en admettent pas. Dans l'article [19], en commun A. Quéguiner et M. Zhykhovich, nous démontrons toutefois l'existence de variétés critiques pour tous les groupes classiques, ainsi que pour de nombreux groupes de type exceptionnel.

Théorème 6.2. *Tout groupe classique G admet une variété critique.*
Les variétés suivantes sont critiques pour l'équivalence motivique modulo 2 :

i) Si G est de type A_n (avec $n \geq 2$), $X_{\{1,n\},G}$ est critique ;

ii) Si G est de type B_n, $X_{\{1\},G}$ est critique ;

iii) Si G est de type C_n (avec $n \geq 2$), $X_{\{2\},G}$ est critique ;

iv) Si G est de type D_n (avec $n \geq 3$), $X_{\{1\},G}$ est critique.

Le théorème précédent met en jeu des structures algébriques très différentes, il n'est donc pas surprenant que les variétés critiques obtenues diffèrent suivant le type des groupes considérés. Toutefois, les preuves de leur existence suivent une stratégie similaire (en dehors du cas trialitaire) par passage à des corps de déploiement partiel bien choisis. Par soucis de concision, on introduit donc la notation suivante.

Notation 6.3. Soit (A, σ) une algèbre à involution. Suivant le type du groupe semi-simple $G = \mathrm{PSIM}(A, \sigma)$, on note X_σ les variétés suivantes :

i) Si G est de type A_n, avec $n \geq 2$, on pose $X_\sigma = X_{\{1,n\},G}$;

ii) Si G est de type B_n ($n \geq 1$) ou D_n ($n \geq 3$), on pose $X_\sigma = X_{\{1\},G}$;

iii) Si G est de type C_n, avec $n \geq 2$, on pose $X_\sigma = X_{\{2\},G}$.

Remarque 6.4. Dans le cas des involutions orthogonales (c'est à dire en type B_n et D_n), les variétés X_σ sont les variétés d'involution étudiées par Tao [82].

Soit donc (A, σ) une algèbre à involution. Il s'agit de montrer que si (B, τ) est une algèbre à involution de même type et de même degré, l'existence d'un isomorphisme entre les motifs $\mathrm{M}(X_\sigma)$ et $\mathrm{M}(X_\tau)$ implique que les groupes $\mathrm{PSIM}(A, \sigma)$ et $\mathrm{PSIM}(B, \tau)$ sont motiviquement équivalents modulo 2.

La preuve proposée dans [19] repose sur le Théorème 4.5 et sur les théorèmes d'anisotropie des involutions de Karpenko [47]. On commence par une réduction.

Proposition 6.5. *Soient (A, σ) et (B, τ) deux algèbres à involution de même type. Si les motifs $\mathrm{M}(X_\sigma)$ et $\mathrm{M}(X_\tau)$ sont isomorphes à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors :*

i) (cas orthogonal) A et B sont isomorphes et σ, τ ont même discriminant ;

ii) (cas symplectique) A et B sont isomorphes ;

iii) (cas unitaire) les centres de A et B sont isomorphes et leurs composantes 2-primaires engendrent le même sous-groupe dans leurs groupes de Brauer (après identification des deux centres).

Pour démontrer ce résultat dans les cas symplectiques et unitaires, on s'appuie sur une étude des décompositions motiviques des variétés projectives homogènes isotropes de type A_n et C_n. Le cas orthogonal repose de son côté sur l'étude de la K-théorie des variétés d'involutions menée par Tao [82].

6.1.1 Réduction générique de l'indice

Un argument essentiel consiste ensuite à considérer des extensions après lesquelles l'isotropie des algèbres à involution est contrôlée par celle d'une quadrique.

Définition 6.6. *Soit (A, σ) une algèbre à involution sur F.*
Le corps de réduction générique F_σ/F de (A, σ) est défini de la manière suivante.

i) Si (A, σ) est orthogonale, F_σ est le corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer de A ;

ii) Si (A, σ) est symplectique, F_σ est le corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer généralisée $\mathrm{SB}(2; A)$;

iii) Si (A, σ) est unitaire de centre K non déployé, F_σ est le corps des fonctions de la restriction à la Weil à F de la variété de Severi-Brauer de A, tandis que si K est déployé, F_σ est le corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer de A.

Après extension à un corps de réduction générique de l'indice, l'isotropie d'une algèbre à involution s'exprime en fonction de l'isotropie d'une forme quadratique bien choisie que l'on note Q_σ [19, §2.1]. Plus précisément, Q_σ est la quadrique naturelle associée $\mathrm{PSIM}(A, \sigma)_{F_\sigma}$ dans le cas orthogonal, tandis que dans les cas symplectiques et unitaires,

Q_σ est une forme trace de la forme hermitienne associée à (A,σ). On obtient le résultat suivant.

Proposition 6.7. *Soient (A,σ) et (B,τ) deux algèbres à involution de même type et de même degré sur un corps F. On suppose de plus que*

i) (type orthogonal) A et B sont isomorphes et leur discriminants coïncident ;

ii) (type symplectique) A et B sont isomorphes ;

iii) (type unitaire) les centres de A et B sont isomorphes et les composantes 2-primaires de A et B engendrent le même sous-groupe dans le groupe de Brauer de ces centres.

En notant L/F l'extension composée des corps de déploiement génériques F_σ et F_τ, les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\mathrm{PSIM}(A,\sigma)$ *et* $\mathrm{PSIM}(B,\tau)$ *sont motiviquement équivalents modulo 2 ;*

ii) $\mathrm{PSIM}(A,\sigma)_L$ *et* $\mathrm{PSIM}(B,\tau)_L$ *sont motiviquement équivalents modulo 2 ;*

iii) Les motifs des quadriques Q_σ et Q_τ sont isomorphes, à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Allié aux critères généraux d'équivalence motivique de [17], le Théorème 6.2 permet de généraliser le critère d'équivalence motivique des quadriques de Vishik à tous les groupes classiques comme suit.

Théorème 6.8. *Soient (A,σ) et (B,τ) deux algèbres à involution de type orthogonal ou symplectique. Les motifs des variétés X_σ et X_τ sont isomorphes à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si et seulement si*

$$A \simeq B \text{ et } i_{w,2}(\sigma_E) = i_{w,2}(\tau_E) \text{ pour toute extension } E/F.$$

Si (A,σ) et (B,τ) deux algèbres à involution de type unitaire, les motifs des variétés X_σ et X_τ sont isomorphes à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si et seulement si les centres de A et B sont isomorphes, les composantes 2-primaires de A et B engendrent les mêmes sous-groupes dans le groupe de Brauer de leurs centres et

$$i_{w,2}(\sigma_E) = i_{w,2}(\tau_E) \text{ pour toute extension } E/F.$$

Enfin, l'étude des p-indices de Tits menée par [18] permet de construire variétés critiques pour de nombreux groupes de types exceptionnels, par passage au corps des fonctions d'une variété p-anisotrope.

Théorème 6.9. *Soit G un groupe semi-simple et p un nombre premier, parmi les exemples suivants :*

i) $p = 2$ *et* G *est de type* G_2 *ou* ${}^1E_6$ *;*

ii) $p = 3$ *et* G *est de type* F_4 *ou* ${}^1E_7$ *;*

iii) $p = 5$ *et* G *est de type* E_8.

Alors pour tous ces cas, toute variété projective G-homogène p-anisotrope est critique pour l'équivalence motivique modulo p.

6.2 Équivalence motivique des groupes classiques et isomorphisme

L'étude menée par Izhboldin ([41], [42]) sur le lien qu'entretiennent les classes d'isomorphisme des quadriques et celles de leur motifs est étonnant : alors que les deux notions coïncident pour les formes de dimension impaires, cela n'est plus le cas en dimension paire. Récemment, Hoffmann précise ce résultat montrant que sous certaines hypothèses supplémentaires sur le corps de base, les notions sont équivalentes [40]. L'article [19] le généralise à tous les groupes classiques.

Théorème 6.10. *Soit F un corps et (A, σ), (B, τ) sont deux algèbres à involutions sur F de même type. Supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

i) F *est de dimension cohomologique inférieure à* 2 *et non formellement réel ;*

ii) F *est formellement réel, de dimension cohomologique virtuelle inférieure à* 2 *et satisfait la propriété ED.*

Alors si les motifs $\mathrm{M}(X_\sigma)$ et $\mathrm{M}(X_\tau)$ sont isomorphes à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors (A, σ) et (B, τ) sont isomorphes.

Nous renvoyons à [19], pour les définitions des hypothèses du théorème précédent, mais notons qu'elles couvrent les corps locaux et globaux. Leur présence est chevillée au résultat de Lewis et Tignol [58] qui stipule que sur de tels corps, les invariants cohomologiques classiques et la signature sont suffisants pour classifier les algèbres à involution. Dès lors, le théorème de Hoffmann [40] appliqué aux quadriques Q_σ et Q_τ obtenues après réduction générique de l'algèbre permettent de sceller la question.

7 Traces de Tate motiviques des variétés projectives homogènes

Pour conclure cet axe de recherches, on évoque un travail récent dont une version préliminaire est donnée en appendice de ce texte ([25]). Nous avons précédemment évoqué ou démontré les principaux critères d'isomorphismes connus entre les motifs de variétés projectives homogènes :

i) Lorsque ces variétés sont des quadriques [88], [49] ;

ii) Lorsque ces variétés sont des variétés de Severi-Brauer [45] ou plus généralement des variétés de drapeaux de type ${}^1A_n$ [17] ;

iii) Lorsque ces variétés sont des variétés d'involutions, ou plus généralement des variétés critiques associées à un groupe algébrique semi-simple [19] ;

iv) Lorsque les variétés sont des variétés de Borel de deux groups semi-simples de même type [72].

Pour tous ces exemples, les variétés considérées sont de même type et associées à des groupes semi-simples eux-mêmes au bas mot supposés de type similaire. On introduit dans [25] un nouvel invariant pour les motifs de variétés projectives homogènes, la *trace de Tate*, qui caractérisent les classes d'isomorphismes de ces motifs selon le résultat suivant.

Théorème 7.1 ([25])**.** *Soit p un nombre premier et X, Y deux F-variétés projectives homogènes pour des groupes p-intérieurs. Les motifs* $\mathrm{M}(X)$ *et* $\mathrm{M}(Y)$ *à coefficients dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *sont isomorphes si et seulement si pour toute extension E/F, les traces de Tate de* $\mathrm{M}(X_E)$ *et* $\mathrm{M}(Y_E)$ *sont isomorphes.*

Le résultat vaut plus généralement pour tous objets de la sous-catégorie de $\mathbf{Mot}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ engendrée par les facteurs directs de motifs de variétés projectives homogènes des groupes p-intérieurs. Il permet en outre de généraliser le théorème principal de [17] aux familles de motifs standards dominant une variété projective homogène donnée. Ces résultats et d'autres applications sont présentées dans l'article *Motives of projective homogeneous varieties and the Tate traces* en commun avec Anne Quéguiner Mathieu, présenté à l'occasion de ce mémoire d'habilitation en appendice.

8 Groupes profinis lisses

Soit k un corps de carctéristique p, et G un groupe profini. La théorie des groupes profinis lisses, introduite dans [22] en commun avec Mathieu Florence, a pour but de fournir un cadre robuste pour l'étude de la théorie de la déformation des représentations continues

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k),$$

et plus précisément à l'existence de relèvement en haute torsion pour les systèmes locaux à coefficients de caractéristique p.

Un exemple fondamental de cette étude est donné par les représentations Galoisiennes, dont l'existence de relèvements fait déjà l'objet de nombreux résultats, notamment pour les corps locaux et globaux [4]. Khare montre ainsi par exemple que si G est le groupe de Galois absolu d'un corps de nombres et k est un corps fini, toute représentation Galoisienne réductible de dimension 2 de G se relève à l'anneau $\mathbf{W}(k)$ des vecteurs de Witt construits à partir de k [53], tandis qu'en vertu des travaux de Ramakrishna et Hamblen [37],[74],[75], les représentations du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$ admettent de tels relèvements complets.

8.1 Paires cyclotomiques et relèvements en basse dimension

Dans l'article [20], nous obtenons des théorèmes de relèvements pour les groupes profinis dits cyclotomiques, c'est à dire qui prennent place dans une *paire cyclotomique* [22]. Une telle paire correspond à un groupe profini muni d'un module spécifique qui puisse jouer un rôle similaire à celui du caractère cyclotomique en cohomologie Galoisienne.

Soit k un corps parfait, de caractéristique $p > 0$. On note $\mathbf{W}_n(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n. On a $\mathbf{W}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et nous nous limitons pour l'instant aux vecteurs de Witt de longueur finie.

Définition 8.1. *Soient deux entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $e \in \mathbb{N}$.*
Une paire (n, e)-cyclotomique est un couple $(G, \mathbb{Z}/p^{1+e}(1))$ où G est un groupe profini et $\mathbb{Z}/p^{1+e}(1)$ est un $\mathbb{Z}/p^{1+e}\mathbb{Z}$-module libre de rang 1, muni d'une action continue de G, vérifiant la condition suivante.

i) Pour tout sous-groupe ouvert $H \subset G$, la flèche naturelle

$$H^n(H, \mathbb{Z}/p^{1+e}(n)) \longrightarrow H^n(H, \mathbb{F}_p(n))$$

induite par le quotient $\mathbb{Z}/p^{1+e}(n) \longrightarrow \mathbb{F}_p(n)$ *est surjective.*

On dit dans ces conditions que le groupe profini G est (n,e)-cyclotomique et que $\mathbb{Z}/p^{e+1}(1)$ est un module cyclotomique pour G, de profondeur e.

Un module cyclotomique de profondeur e attaché à un groupe profini G correspond à un caractère continu

$$\chi : G \longrightarrow \mathbf{W}_{e+1}(k)^{\times}.$$

Le contexte des paires cyclotomiques est ainsi propice à étendre la théorie de Kummer à une classe plus générale que celle des groupes de Galois absolus.

Si G est un groupe de Galois absolu et $\varprojlim_r \mu_{p^r}$ est le module de Tate des racines de l'unité d'ordre une puissance de p, la paire $(G, \varprojlim_r \mu_{p^r})$ est $(1,\infty)$-cyclotomique en vertu de la théorie de Kummer classique [24].

On montre que le groupe fondamental $\pi_1(S,\bar{s})$ d'un schéma S en un point géométrique $\bar{s}$ est cyclotomique dans les cas suivants [20, §3] :

i) si S est un schéma semilocal sur $\mathbb{Z}[1/p]$;

ii) si S est un schéma affine sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;

iii) si S est une courbe lisse sur un corps algébriquement clos ;

iv) si S est une variété projective lisse sur un corps algébriquement clos, tel que pour tout revêtement étale U/S, le groupe de Néron-Severi de U est sans torsion.

Étant donnée une représentation Galoisienne $\rho_1 : \mathrm{Gal}(F_{sep}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_p)$, on dit que ρ_1 se relève modulo p^2 s'il existe une représentation Galoisienne de p^2-torsion $\rho_2 : \mathrm{Gal}(F_{sep}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(F_{sep}/F) \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[dr, "\rho_1"'] & \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
 & \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_p)
\end{tikzcd}$$

Définition 8.2. *Soit G un groupe profini et r,s deux entiers tels que $1 \leq r \leq s$. Soit V_r un $(\mathbf{W}_r(k),G)$-module libre.*

On dit que V_r se relève en p^s-torsion s'il existe un $(\mathbf{W}_s(k),G)$-module libre V_s et un isomorphisme entre V_r et $V_s \otimes_{\mathbf{W}_s(k)} \mathbf{W}_r(k)$.

On dit que V_r se relève stablement en p^s-torsion s'il existe un sous-groupe ouvert d'indice premier à p $G_0 \subset G$ tel que V_r se relève en p^s-torsion, en tant que $(\mathbf{W}_r(k),G_0)$-module.

Le résultat suivant est l'un des principaux de [20].

Théorème 8.3. *Soit k un corps fini de caractéristique p et $e \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.*
Soit G un groupe $(1, e)$-cyclotomique relativement à k et V un (k, G)-module.
Supposons qu'il existe un sous-groupe ouvert $G_0 \subset G$ d'indice premier à p et deux (k, G_0)-modules de permutation A et B tels que V_1 siège en une suite

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow V_1 \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

Alors, V se relève en p^2-torsion et se relève stablement en p^{e+1}-torsion.

Pour obtenir ce résultat, il suffit de montrer que V se relève stablement en p^{e+1}-torsion, en vertu de [20, Lemma 3.4]. Pour se faire, notons que quitte à remplacer G_0 par son intersection avec les noyaux de l'action sur le caractère cyclotomique, on peut supposer que A et B sont de permutation sur k. Dès lors, par définition de la lissité, V loge dans un diagramme de $(\mathbf{W}_{e+1}(k), G_0)$-modules

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{W}_{e+1}(k)^Y \arrow[r] \arrow[d] & V_{e+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{W}_{e+1}(k)^X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & k^Y \arrow[r] & V \arrow[r] & k^X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où X et Y sont des G_0-ensembles bien choisis. Pour clore la preuve, il faut enfin s'assurer que le $(\mathbf{W}_{e+1}(k), G_0)$-module V_{e+1} est donne bien lieu à un relevé de V en p^{e+1}-torsion.

Les représentations des groupes profinis lisses de dimensions 2 (ou de dimensions inférieure à 4 si $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) satisfont aux hypothèses du Théorème 8.3. On obtient immédiatement en corollaire le résultat suivant.

Théorème 8.4. *Soit k un corps de caractéristique p, $e \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et G un groupe profini $(1, e)$-cyclotomique (par exemple, un groupe de Galois absolu). Soit*

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_2(k)$$

une représentation continue (par exemple, une représentation Galoisienne).
Alors ρ se relève en p^2-torsion.
Si $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le même résultat persiste pour les représentations jusqu'en dimension 4.

8.2 Relèvements en fibrés de Witt

Dans cette section, les faisceaux considérés le sont toujours pour la topologie de Zariski. L'article [21] en commun avec M. Florence et G. Lucchini-Arteche développe le langage des fibrés dits de Witt et étudie les relèvements de fibrés vectoriels sur les schémas de caractéristique p, ainsi que deux problèmes associés.

Soit p un nombre premier et S un schéma de caractéristique p. Pour tout entier $r \geq 2$, on note $\mathbf{W}_r(S)$ le schéma des vecteurs de Witt de longueur r de S. Ce schéma est un épaississement naturel de S, de caractéristique p^r.

Question : Soit V un fibré vectoriel défini sur S. Peut-on écrire V comme la restriction à S d'un fibré vectoriel défini sur $\mathbf{W}_r(S)$?

Si tel est le cas, on dit que V se relève en p^r-torsion. Cette question est étroitement liée aux deux problèmes classiques suivants :

i) Soit S un schéma sur un corps parfait k de caractéristique p. Peut-on relever S en un $\mathbf{W}_2(k)$-schéma plat S_2 ? (voir [26])

ii) Même question, en imposant de plus que le morphisme Frobenius de S se relève à S_2 (voir [61]).

On produit dans [21, §5] des équivalences de catégories qui permettent d'interpréter ces trois problèmes dans le cadre des fibrés de Witt. Ces équivalences sont valables dès lors que S est un schéma réduit et généralisent les obstructions classiques, généralement formulées pour S lisse. En application de ces résultats, on obtient des descriptions explicites des obstructions cohomologiques qui permettent de déterminer l'existence ou non de relèvements pour les schémas *Frobenius-split* [60] et pour les fibrés tautologiques des Grassmanniennes.

Définition 8.5. *Soit S un schéma de caractéristique p et $r \geq 1$ un entier. L'association*

$$U \longmapsto \mathbf{W}_r(\mathcal{O}_S(U))$$

définit un faisceau d'anneaux commutatifs sur S. On le note $\mathbf{W}_r(\mathcal{O}_S)$.

Étant donnés deux entiers $s \leq r$, on considère la transformation naturelle

$$\pi_{r,s} : \mathbf{W}_r(\mathcal{O}_S) \longrightarrow \mathbf{W}_s(\mathcal{O}_S).$$

Les définitions suivantes proviennent de [21].

Définition 8.6. *Soit $S = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine de caractéristique p et $r \geq 1$ un entier. Un $\mathbf{W}_r(A)$-module* M *étant donné, la formule*

$$U \longmapsto \mathrm{M} \otimes_{\mathbf{W}_r(A)} \mathbf{W}_r(\mathcal{O}_S(U))$$

définit un préfaisceau sur S. Le faisceau associé est un faisceau de $\mathbf{W}_r(\mathcal{O}_S)$-modules que l'on note $\tilde{\mathrm{M}}$.

Définition 8.7. *Soit S un schéma de caractéristique p et $r \geq 1$ un entier. On dit qu'un faisceau de $\mathbf{W}_r(\mathcal{O}_S)$-modules est un module de Witt de hauteur r s'il est localement isomorphe à un faisceau de la forme* $\tilde{\mathrm{M}}$ *(cf définition précédente).*

Définition 8.8. *Soit S un schéma de caractéristique p et r, n deux entiers positifs. Un fibré de Witt de rang n et de hauteur r est un module de Witt de hauteur r localement isomorphe à $\mathbf{W}_r(\mathcal{O}_S)^n$.*

Notons que par définition un module de Witt de hauteur 1 sur S est un $\mathcal{O}_S$-module quasicohérent, tandis qu'un $\mathbf{W}_1$-fibré est un fibré vectoriel que S. S'il n'y a pas d'ambiguité sur le rang des fibrés considérés, on dira pour faire court qu'un fibré de Witt de hauteur r est un $\mathbf{W}_r$-fibré.

Remarque 8.9. Les modules de Witt de hauteur r (resp. les $\mathbf{W}_r$-fibrés) peuvent être définis de manière alternative à partir des modules (resp. fibrés vectoriels) sur le schéma $\mathbf{W}_r(S)$, par restriction à S par le foncteur de Greenberg [3].

Définition 8.10. *Soit $r \geq 1$ un entier et V_r un $\mathbf{W}_r$-fibré sur S.*

i) Soit $s > r$. Un relèvement de V_r en un $\mathbf{W}_s$-fibré est la donnée d'un fibré de Witt V_s de hauteur s sur S, ainsi que d'un isomorphisme

$$f_r : (\pi_{r,s})_*(V_r) \xrightarrow{\sim} V_s.$$

S'il en existe, on dit que V_r se relève en p^s-torsion.

ii) Un relèvement complet de V_r est la donnée, pour tout $s \geq r$, d'un fibré de Witt V_s de hauteur s sur S, ainsi que d'un isomorphisme

$$f_{s+1} : (\pi_{s+1,s})_*(V_{s+1}) \xrightarrow{\sim} V_s.$$

La donnée d'un relèvement complet d'un $\mathbf{W}_r$-fibré V_r correspond à l'existence d'un relèvement de V_r à un $\mathbf{W}_\infty$-fibré, où $\mathbf{W}_\infty = \varprojlim \mathbf{W}_r$. Par exemple, un relèvement complet d'un fibré vectoriel V_1 sur $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ correspond à un $\mathbb{Z}_p$-module libre V_∞, avec un isomorphisme de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels $V_\infty/p \xrightarrow{\sim} V_1$.

Un premier cas à considérer est celui des fibrés en droites, pour lesquels on dispose de tels relèvements [21, Definition 3.1]. En effet si L est un fibré en droites sur S, alors pour tout entier $r \geq 1$, il existe un relèvement naturel de L en un fibré de Witt de hauteur r, le *r-ième relevé de Teichmüller de L*. Ce relevé est noté $\mathbf{W}_r(L)$ et la suite $(\mathbf{W}_r(L))_{r\geq 1}$ fournit un relèvement complet de L.

Soit S un schéma de caractéristique p et V un fibré vectoriel de rang n sur S.
Notons

$$f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow S$$

le fibré projectif associé. Le résultat suivant stipule que sur un schémas de base affine, le fibré tautologique sur $\mathbb{P}(V)$ admet un relèvement compatible avec la suite exacte tautologique associée.

Théorème 8.11 ([21, Theorem 4.2])**.** *Supposons S affine de caractéristique p.*
Si V un fibré vectoriel sur S, alors il admet un relèvement complet.

En outre, pour tout choix d'un relèvement complet $(V_r)_{r\geq 1}$ de V, il existe un relèvement complet $(T_r)_{r\geq 1}$ au fibré tautologique T sur $\mathbb{P}(V)$, tel que pour tout $r \geq 1$, on ait une suite exacte de fibrés de Witt sur $\mathbb{P}(V)$

$$0 \longrightarrow T_r \longrightarrow f^*(V_r) \longrightarrow \mathbf{W}_r(\mathcal{O}(1)) \longrightarrow 0.$$

Revenons à la question de départ ainsi qu'aux problèmes (1) et (2). Le résultat suivant décrit la classe de cohomologie classique qui contrôle le relèvement des fibrés sur S [21, Remark 5.30].

Théorème 8.12. *Soit V un fibré vectoriel sur un schéma S de caractéristique p. L'obstruction à relever V en un $\mathbf{W}_2$-fibré est donnée par la classe de la 2-extension*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Frob}^*(V) \xrightarrow{\mathrm{Ver}_V} \mathrm{Sym}^p_{\mathcal{O}_S}(V) \longrightarrow \Gamma^p_{\mathcal{O}_S}(V) \xrightarrow{\mathrm{Frob}_V} \mathrm{Frob}^*(V) \longrightarrow 0$$

Le théorème précédent repose sur l'équivalence de catégories [21, Theorem 5.16] qui offre une traduction de [26, Theorem 3.5] dans le langage des modules de Witt. À l'aide de cette description, on montre qu'en dehors des cas évoqués pour le Theorème 8.11, les fibrés tautologiques des Grassmanniennes en caractéristique p n'admettent pas de relèvement.

Théorème 8.13 ([21, Theorem 5.32]). *Soit S un schéma de caractéristique p et $2 \leq k \leq n-2$. Le fibré tautologique de la Grassmannienne* $\mathrm{Grass}(k,n)$ *des k-plans dans un espace de dimension n n'admet pas de relèvement en un $\mathbf{W}_2$-fibré.*

L'équivalence donnée par [21, Theorem 5.16] implique en outre l'existence de relèvements pour les schémas *Frobenius-split* sur un corps k parfait et de caractéristique p (voir [60]).

Théorème 8.14. *Soit S un k-schéma réduit Frobenius-split, c'est à dire tel que la suite exacte de $\mathcal{O}_S$-modules*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathrm{Frob}_*(\mathcal{O}_S) \longrightarrow \mathrm{Frob}_*(B^1_S) \longrightarrow 0$$

est scindée ([60]). Alors, S admet un relèvement en un $\mathbf{W}_2(k)$-schéma plat S_2.

Enfin, [21, Proposition 5.20] décrit l'obstruction qui contrôle les relèvements du problème (2).

8.3 Groupes profinis lisses

Soit $m \geq 1$ un entier et F un corps de caractéristique première à p. En notant μ_m le module Galoisien des racines m-ièmes de l'unité dans une clôture séparable F_{sep} de F, considérons la suite exacte de Kummer

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow F_{sep}^\times \longrightarrow F_{sep}^\times \longrightarrow 1.$$

Le morphisme de Bockstein, c'est à dire le bord

$$\delta^1_{F,m} : F^\times \longrightarrow H^1(F, \mu_m),$$

est surjectif et de noyau $F^{\times m}$, en vertu du théorème 90 de Hilbert.

Pour les groupes de cohomologies supérieures $H^n(F, \mu_m^{\otimes n})$, il légitime d'espérer obtenir une description de même saveur, avec générateurs et relations, mais ce problème s'avère bien plus difficile. Dans ce but et inspiré par les relations de Steinberg qui apparaissent dans la description du K_2 des corps due à Matsumoto, Milnor introduit dans les années soixante ses K-groupes, que l'on note $K_n^M(F)$. Bass et Tate parviennent ensuite construire des morphismes

$$h^n_{F,m} : K_n^M(F) \longrightarrow H^n(F, \mu_m^{\otimes n})$$

qui généralisent le Bockstein ci-dessus et qu'on nomme le symbole Galoisien. Sans le formuler explicitement, ceux-ci conjecturent alors que ces morphismes pourraient donner lieu à des isomorphismes

$$K_n^M(F)/m \xrightarrow{\sim} H^n(F, \mu_m^{\otimes n})$$

pour tout corps de caractéristique première à m, un énoncé par la suite nommé la conjecture de Bloch et Kato en cohomologie Galoisienne.

Une percée majeure en direction d'une preuve de cette conjecture est due à Merkurjev et Suslin, qui la démontrent en 1982 pour $n = 2$ [67]. En 1996, Voevodsky parvient à démontrer la conjecture de Milnor, qui correspond à la conjecture de Bloch et Kato dans le cas où m est une puissance de 2 ; une preuve qui lui valut la médaille Fields [90],[91]. Enfin, après des efforts admirables de la communauté, la conjecture de Bloch et Kato est démontrée en 2008 dans toute sa généralité par les travaux conjoints de Rost, Suslin, Voevodsky et Weibel [38].

L'objectif de la série d'articles *Smooth Profinite groups* est de tenter d'obtenir une nouvelle preuve de la conjecture de Bloch et Kato, afin notamment de fournir des bornes sur le nombre de symboles apparaissant dans les décompositions obtenues. La stratégie que nous empruntons consiste à tisser un lien entre cette conjecture et celle des relèvement des représentations Galoisiennes, comme suit.

L'énoncé suivant est équivalent à la conjecture de Bloch et Kato (voir [64] pour $p = 2$ et [36] pour p quelconque).

Conjecture de Bloch et Kato, formulation équivalente.
Soit F un corps et p un nombre premier inversible dans F. Alors, le morphisme de Bockstein

$$\beta : H^n(F, \mu_p^{\otimes n}) \longrightarrow H^{n+1}(F, \mu_p^{\otimes n})$$

associé à la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mu_p^{\otimes n} \longrightarrow \mu_{p^2}^{\otimes n} \longrightarrow \mu_p^{\otimes n} \longrightarrow 1$$

est trivial pour tout entier $n \geq 1$, ou de manière équivalente, le morphisme

$$H^n(\mathrm{Gal}(F_{sep}/F), \mu_{p^2}^{\otimes n}) \longrightarrow H^n(\mathrm{Gal}(F_{sep}/F), \mu_p^{\otimes n})$$

est surjectif.

Le langage des groupes et paires cyclotomiques défini précédemment s'accommode parfaitement à cette formulation et nous mène ainsi vers la conjecture de lissité [24].

Conjecture. 8.15 (Conjecture de lissité)**.** *Si* $(G, \mathbb{Z}_p(1))$ *est une paire* $(1, \infty)$*-cyclotomique, alors* $(G, \mathbb{Z}_p(1))$ *est* $(n, 1)$*-cyclotomique, pour tout* $n \geq 1$*.*

8.3.1 Vers la conjecture de lissité

La série d'articles [22], [32], [23], élabore une stratégie pour montrer la Conjecture 8.15, qui la relie à la conjecture de relèvement des représentations (disons Galoisiennes, pour le moment). Bien que les preuves de [22] et celles de [23] aient été vérifiées, ce dernier fait usage du résultat principal de [32], qui s'avère erroné. La série d'articles ne fournit donc pas en l'état une preuve de la conjecture de lissité, ni de la conjecture de Bloch et Kato, et nous espérons combler cette faille à l'avenir. Je tiens à remercier Peter Scholze pour son aide précieuse et sa bienveillance lors de la relecture de ce travail.

On développe désormais les premières pierres angulaires obtenues pour ce travail ainsi que le chemin que nous comptons emprunter vers la conjecture de lissité.

Une différence notable entre la conjecture de Bloch et Kato et la conjecture de relèvement des représentations Galoisiennes est que l'énoncé de cette dernière ne fait *pas* entrer en jeu le module de Tate. Cette dissemblance invite à introduire une notion qui puisse être connectée à celle de paire cyclotomique $(G, \mathcal{T})$, mais qui soit intrinsèque au groupe profini G. De cette idée provient la notion de groupe profini *lisse*.

Définition 8.16. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $e \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$*. Un groupe profini* G *est dit* (n, e)*-lisse s'il vérifie la propriété suivante.*
Soit A *une* $\mathbb{F}_p$*-algèbre parfaite munie d'une action de* G *et soit* L_1 *un* A*-module localement libre de rang* 1*, muni d'une action semi-linéaire de* G*.*
Soit

$$c \in H^n(G, L_1)$$

une classe de cohomologie.
Alors, il existe un relevé de L_1 *en un* $(\mathbf{W}_{1+e}(A), G)$*-module localement libre* $L_1[c]$*, tel que* c *appartient à l'image du morphisme naturel*

$$H^n(G, L_{1+e}[c]) \longrightarrow H^n(G, L_1).$$

La lissité élabore ainsi des relèvements qui ne se limitent pas à une paire cyclotomique

$(G, \mathbb{Z}/p^{1+e}(1))$ mais valent pour n'importe quel fibré en droites muni d'une action semi-linéaire de G (voir ci-après). Cette géométrisation de la théorie de Kummer apporte une grande flexibilité pour les preuves mais a un prix : celui de ne pouvoir choisir uniformément le $\mathbf{W}_{1+e}$-fibré $L_{1+e}[c]$.

Le chemin que nous voulons suivre pour nous approcher de la conjecture de lissité s'articule autour de trois étapes principales, qui occupent respectivement [22], [32] et [23] :

i) géométriser la théorie de Kummer à coefficients dans un fibré en droites G-linéarisé en montrant que si $(G, \mathbb{Z}/p^{1+e}(1))$ est une paire (n, e)-cyclotomique, alors G est un groupe profini (n, e)-lisse ;

ii) démontrer l'existence de bons relèvements modulo p^2 pour les fibrés G-linéarisés sur un G-schéma affine de caractéristique p, en particulier celui des représentations continues des groupes lisses à coefficients dans $\mathbb{F}_p$;

iii) en déduire un théorème de relèvement pour les extensions dites filtrées de $(\mathbb{F}_p, G)$-modules sur une $(\mathbb{F}_p, G)$-algèbre, où G est un groupe profini lisse, puis conclure par un argument final de résidus utilisant la notion d'extension de Laurent associée à une paire cyclotomique.

ÉTAPE (1)

a) Fibrés G-linéarisés

Dans toute la suite, G désigne un groupe profini et les actions considérées sont toutes continues, c'est à dire de noyaux étant des sous-groupe ouverts.

Définition 8.17. *Un G-schéma S est un schéma muni d'une action de G et qui possède un recouvrement par des ouvert affines G-invariants.*

Définition 8.18. *Un G-préfaisceau sur un G-schéma S à valeur dans une catégorie $\mathcal{D}$ est un foncteur contravariant de la catégorie des ouverts G-invariants de S (où les morphismes sont les inclusions) vers $\mathcal{D}$. Un G-faisceau est un G-préfaisceau qui satisfait aux axiomes habituels des faisceaux.*

On introduit les modules de Witt et fibrés de Witt, munis de l'action d'un groupe profini.

Définition 8.19. *Soit S un G-schéma. Un $\mathcal{O}_S$-module G-linéarisé est la donnée d'un $\mathcal{O}_S$-modules quasicohérent M, muni d'une action semi-linéaire de G. Concrètement, une telle action est donnée par des isomorphismes de $\mathcal{O}_S$-modules*

$$\phi_g : \mathrm{M} \longrightarrow (g.)^*(\mathrm{M})$$

pour tout $g \in G$ qui satisfont aux conditions suivantes :

i) L'application $g \mapsto \phi_g$ est localement constante ;

ii) On a

$$\phi_{gh} = (h.)^*(\phi_g) \circ \phi_h$$

pour tout $(g,h) \in G^2$.

Pour faire court, on dit dans la suite $(G, \mathcal{O}_S)$-module pour un $\mathcal{O}_S$-module G-linéarisé. Un $(G, \mathcal{O}_S)$-module licalement libre et de rang constant est un G-fibré vectoriel sur S.

Un G-schéma affine $S = \mathrm{Spec}(A)$ est donc la donnée d'un anneau (commutatif) A muni d'une action G et un $(S, \mathcal{O}_S)$-module correspond à un A-module muni d'une action semi-linéaire de G. En particulier, si G est un groupe de Galois absolu d'un corps F et S est le point $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$, un (G, A)-module est une représentation Galoisienne de F, à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.

b) (G, M)-torseurs et extensions à la Yoneda

Si A est un groupe muni d'une action de G, on a une bijection classique entre l'ensemble $H^1(G, A)$ et les classes d'isomorphismes de G-torseurs de A. Ces classes s'interprètent de manière concrète à l'aide des extensions à la Yoneda [68], un point de vue que nous choisissons pour définir la (G, S)-cohomologie.

Définition 8.20. *Soit $n \geq 0$ un entier, S un G-schéma et A, B deux $(G, \mathcal{O}_S)$-modules sur S. On définit les ensembles $\mathbf{YExt}^n_{(G,S)-mod}(A,B)$ des n-extensions de A par B comme suit :*

i) $(n = 0)$. $\mathbf{YExt}^0_{(G,\mathcal{O}_S)-mod}(A,B) := \mathrm{Hom}_{(G,\mathcal{O}_S)-mod}(A,B)$;

ii) $(n \geq 1)$. Les objets de $\mathbf{YExt}^n_{(G,\mathcal{O}_S)-mod}(A,B)$ sont les suites exactes de $(G, \mathcal{O}_S)$-modules de la forme

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A_1 \longrightarrow .. \longrightarrow A_n \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Un morphisme entre deux telles extensions dans $\mathbf{YExt}^n_{(G,\mathcal{O}_S)-mod}(A,B)$ est un morphisme de complexes qui vaut l'identité sur A et B.

L'ensemble $\mathbf{YExt}^n_{(G,\mathcal{O}_S)-mod}(A,B)$ est muni de push-forward (resp. pull-back) le long d'un morphisme $A \longrightarrow A'$ (resp. $B' \longrightarrow B$). On dispose en outre de la somme de Baer de deux extensions $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ de $\mathbf{YExt}^n_{(G,\mathcal{O}_S)-mod}(A,B)$, notée $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ ([68]).

On dit que deux n-extensions $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont liées à la Yoneda s'il en existe une troisième $\mathcal{E}_3$ et des morphismes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_1 \arrow[dr] & & \mathcal{E}_2 \arrow[dl] \\ & \mathcal{E}_3 & \end{tikzcd}$$

La relation ainsi construite est compatible avec la somme de Baer, les push-forward et pull-back des n-extensions.

Définition 8.21. *Soit $n \geq 1$ un entier, S un G-schéma et A, B deux $(G, \mathcal{O}_S)$-modules sur S. On note $\mathrm{YExt}^n_{(G,\mathcal{O}_S)-mod}(A, B)$ le groupe abélien des classes d'équivalences de n-extensions liées à la Yoneda dans $\mathbf{YExt}^n_{(G,\mathcal{O}_S)-mod}(A, B)$.*

Toutes ces notions s'étendent au cas des modules et fibrés de Witt [22, Def 5.1] : un $\mathbf{W}_r$-module (resp. un $\mathbf{W}_r$-fibré) est est un $(G, \mathbf{W}_r)$-module (resp. un $(G, \mathbf{W}_r)$-fibré) s'il est muni d'un action semi-linéaire d'un groupe profini G. Le langage des extensions à la Yoneda est valable dans n'importe quelle catégorie abélienne, on peut donc définir la (G, S)-cohomologie comme suit.

Définition 8.22. *Soit S un G-schéma de caractéristique p. Soit $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et M un $(G, \mathbf{W}_r)$-module sur S. Pour $n \geq 0$, on pose*

$$H^n((G, S), \mathrm{M}) := \mathrm{YExt}^n_{(G,\mathbf{W}_r(\mathcal{O}_S))-mod}(\mathbf{W}_r(\mathcal{O}_S), \mathrm{M})$$

Bien entendu, la notion de relèvement des modules de Witt se transpose aux $(G, \mathbf{W}_r)$-modules. Si $s \geq r$ et M est un $(G, \mathbf{W}_r)$-module, on dit que M se relève en p^s torsion s'il existe un $(G, \mathbf{W}_s)$-module M_s avec un isomorphisme

$$\mathrm{M}_s \otimes_{\mathbf{W}_s} \mathbf{W}_r \simeq \mathrm{M}.$$

Un système complet de relèvements d'un $(G, \mathbf{W}_r)$-module M est la donnée pour tout $s \geq r$ de relèvements M_s de p^s-torsion de M compatibles.

Le théorème suivant [22, Theorem A] achève l'objectif de cette première étape.

Théorème 8.23. *Soit $(G, \mathbb{Z}/p^{1+e}(1))$ un une paire (n, e)-cyclotomique, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $e \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.*

Soit $1 \leq r \leq e$, et L un fibré en droites G-linéarisé sur un $(G, \mathbb{F}_p)$-schéma affine S parfait et de caractéristique p. Alors, la flèche naturelle

$$H^n((G,S), \mathbf{W}_{1+e}(L)(n)) \longrightarrow H^n((G,S), \mathbf{W}_r(L)(n))$$

est surjective. En particulier, G est un groupe profini (n,e)-lisse.

Le résultat implique notamment que les groupes de Galois absolu sont $(1, \infty)$-lisse, en vertu de la théorie de Kummer classique. L'ingrédient essentiel est la formule intégrale pour le Frobenius [22, Theorem 9.7], un outil purement algébrique.

Étapes (2) et (3)

Dans cette section, on explicite suivant [23] une manière d'aboutir à la conjecture de lissité, sous réserve de l'existence de bons relèvements en p^2-torsion pour les représentations des groupes profinis lisses, à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.

a) Relèvement des n-extensions filtrées

Soit R un anneau commutatif. Une 1-*extension filtrée de R-modules* est la donnée d'un suite exacte courte

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

de R-modules localement libres et de rangs finis, munie d'une filtration complète

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset ... \subset E_{\mathrm{rk}(E)} = E$$

telle que pour un entier $0 \leq i \leq \mathrm{rk}(E)$, on ait $A = E_i$.

On dit que deux 1-extensions filtrées de R-modules

$$\mathcal{E}_1 : 0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

et

$$\mathcal{E}_2 : 0 \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

sont compatibles si les deux filtrations sur B induites par $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont égales.

Définition 8.24 (n-extensions filtrées)**.** *Soit R un anneau commutatif. Une n-extension* *filtrée de R-modules est une suite exacte de R-modules localement libres de rangs finis*

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow E_0 \longrightarrow ... \longrightarrow E_{n+1} \longrightarrow 0$$

avec pour tout $j = 0, ..., n+1$ une filtration $(E_{j,i})_{i=1,...,\mathrm{rk}(E_j)}$ telles que les 1-extensions filtrées induites par les conoyaux

$$\mathcal{E}_j : 0 \longrightarrow A_j \longrightarrow E_j \longrightarrow A_{j+1} \longrightarrow 0$$

sont compatibles.

De même, si R est muni d'une action d'un groupe profini G, une n-extension filtrée de (R, G)-modules est une suite exacte

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow E_0 \longrightarrow ... \longrightarrow E_{n+1} \longrightarrow 0$$

de R-modules munis d'une action semi-linéaire de G compatible avec les flèches de $\mathcal{E}$ et respectant les filtrations $(E_{j,i})$.

Le résultat suivant motive la notion de n-extension filtrée.

Proposition 8.25. *Soit G un pro-p-groupe, A une $(\mathbb{F}_p, G)$-algèbre parfaite et L un A-module localement libre de rang 1 muni d'une action semi-linéaire de G. Toute classe de cohomologie $c \in H^n(G, L_1)$ est représentée par une n-extension filtrée*

$$\mathcal{E}(c) : 0 \longrightarrow L \longrightarrow E_1 \longrightarrow ... \longrightarrow E_n \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

de $(G, \mathbf{W}_1)$-fibrés sur A.

Les extensions filtrées sont donc suffisantes pour l'étude de la conjecture de lissité, pour laquelle on peut toujours supposer G comme étant un pro-p-groupe. Étroitement liée à la conjecture de relèvement des représentations Galoisiennes en p^2-torsion, la conjecture suivante est un point clé.

Conjecture. 8.26. *Le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}$ d'une n-extension filtrée de $\mathbb{Z}/p^2$-modules $\mathcal{E}$ est de type Kummer, c'est à dire qu'il satisfait à la propriété suivante. Pour tout groupe profini $(1,1)$-lisse G et pour toute $(\mathbb{F}_p, G)$-algèbre parfaite A, l'application naturelle*

$$H^1(G, \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\mathbf{W}_2(A)) \longrightarrow H^1(G, \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(A)),$$

est surjective (cf. [23, Definition 3.5]).

Cette conjecture implique le relèvement des extensions filtrées [23, Theorem 4.5].

Théorème 8.27. *Soit G un groupe profini $(1,1)$-lisse, A une $(\mathbb{F}_p, G)$-algèbre parfaite et*

$$\mathcal{E} : 0 \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow ... \longrightarrow E_n \longrightarrow E_{n+1} \longrightarrow 0$$

une n-extension filtrée de $(G, \mathbf{W}_1)$-fibrés sur A.

Sous réserve de la conjecture 8.26, $\mathcal{E}$ se relève en une n-extension filtrée de $(G, \mathbf{W}_2)$-fibrés sur A.

Nous pouvons désormais esquisser la stratégie envisagée pour démontrer la Conjecture 8.15. Soit donc $(G, \mathbb{Z}_p(1))$ une paire $(1,\infty)$-cyclotomique, H un sous-groupe ouvert de G et $c \in H^n(H, \mathbb{F}_p(n))$ une classe de cohomologie. Représentons grâce à la Proposition 8.25 la classe c par une extensions filtrée

$$\mathcal{E}(c) : 0 \longrightarrow \mathbb{F}_p(n) \longrightarrow E_1 \longrightarrow ... \longrightarrow E_n \longrightarrow \mathbb{F}_p \longrightarrow 0$$

de $(H, \mathbb{F}_p)$-modules.

En vertu du Théorème 8.23, G est un groupe $(1,\infty)$-lisse. Le Théorème 8.27 assure donc - sous réserve de la Conjecture 8.26 - que c se relève en un classe c_2 représentée par une n-extension filtrée

$$\mathcal{E}(c_2) : 0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow ... \longrightarrow F_n \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Pour conclure et montrer la Conjecture de lissité, il reste à montrer que l'on ajuster ce relèvement pour que F_0 soit égal à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}(n)$, c'est à dire que $c_2 \in H^n(H, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}(n))$. Ceci est fait au cours de [23, §5] à l'aide de la construction suivante qui généralise les résidus en cohomologie Galoisienne.

b) Ajustement des relèvements

Soit F un corps de caractéristique 0, dont on note Γ un groupe de Galois absolu. On dispose d'une description du groupe de Galois absolu du corps $F((t)$ des séries de Laurent, celui-ci étant isomorphe au produit semidirect $\hat{\mathbb{Z}} \rtimes \Gamma$. On étend cette construction aux paires cyclotomiques dans [22].

Définition 8.28. *Soit* $(G, \mathbb{Z}_p(1))$ *une paire* $(1, \infty)$*-cyclotomique. On pose*

$$G((t)) = \mathbb{Z}_p(1) \rtimes G.$$

La paire $(G((t)), \mathbb{Z}_p(1))$*, où* $G((t))$ *agit sur* $\mathbb{Z}_p(1)$ *via la projection naturelle* $G((t)) \longrightarrow G$*, est appelée l'extension de Laurent de* $(G, \mathbb{Z}_p(1))$*.*

Proposition 8.29 ([22, Proposition 7.2])**.** *Si* $(G, \mathbb{Z}_p(1))$ *une paire* $(1, \infty)$*-cyclotomique, alors l'extension de Laurent* $(G((t)), \mathbb{Z}_p(1))$ *est elle aussi une paire* $(1, \infty)$*-cyclotomique.*

Corollaire 8.30 (Résidus)**.** *Soit* $(G, \mathbb{Z}_p(1))$ *une paire* $(1, \infty)$*-cyclotomique. Alors pour tout entier* $n \geq 1$*, pour tout* $\mathbb{F}_p, G)$*-module* M *et pour tout entier* k*, on a une suite exacte scindée*

$$0 \longrightarrow H^n(G, M(k)) \longrightarrow H^n(G((t)), M(k)) \longrightarrow H^{n-1}(G, M(k-1)) \longrightarrow 0.$$

À l'aide de cette construction, on montre que l'on peut ajuster l'extension $\mathcal{E}(c_2)$ pour que F_0 soit $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ (cf. [23, preuve du théorème 5.1]). Notons que concernant la conjecture de lissité, cette dernière construction est la seule étape pour laquelle on a recours à des modules de profondeur infinie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] André, Y., *Motifs de dimension finie (d'après S.-I. Kimura, P. O'Sullivan...)*, Astérisque vol. 299, Soc. Math. France, 2005, Séminaire Bourbaki. Vol. 2003/2004, Exp. no929, p115-145.

[2] Bass, H., *Algebriac K-theory*, W.A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968.

[3] Bertapelle, A. et Gonzales-Aviles C.D., *The Greenberg functor revisited*, Eur. J. Math. 4, No. 4, 1340–1389, 2018.

[4] Böckle, G. et Khare, C., *Mod l representations of arithmetic fundamental groups, I*, Duke Math. J. 129, 337–369, 2005.

[5] Borel, A. et Tits, J., *Groupes réductifs*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, Tome 27, pp. 55-151, 1965.

[6] Brosnan, P., *A short proof of Rost nilpotence via refined correspondences*, Doc. Math. 8, 69–78, 2003.

[7] Brosnan, P., *On motivic decompositions arising from the method of Białynicki-Birula*, Invent. Math. 161, No. 1, 91–111, 2005.

[8] Calmès, B., Petrov, V., Semenov, N. et Zainoulline, K., *Shells of twisted flag varieties and the Rost invariant*, Compos. Math. 142, 1063-1080, 2006.

[9] Carr, M. et Garibaldi, S., *Geometries, the principle of duality and algebraic groups*, Expo. Math. 24, 195–234, 2006.

[10] Chernousov, V. et Merkurjev, A., *Motivic decomposition of projective homogeneous varieties and the Krull-Schmidt theorem*, Transform. Groups 11, No. 3, 371–386, 2006.

[11] Chernousov, V., Gille, S. et Merkurjev, A., *Motivic decomposition of isotropic projective homogeneous varieties*, Duke Math. J. 126, No. 1, 137–159, 2005.

[12] De Clercq, C., *A going-down theorem for Grothendieck Chow motives*, T*C. de Clercq*, Q. J. Math. 64, No. 3, 721–728, 2013.

[13] De Clercq, C., *Motivic decompositions of projective homogeneous varieties and change of coefficients*, C. R., Math., Acad. Sci. Paris 348, No. 17–18, 955–958, 2010.

[14] De Clercq, C., *Classification of upper motives of algebraic groups of inner type A_n*, C. R., Math., Acad. Sci. Paris 349, No. 7–8, 433–436, 2011.

[15] De Clercq, C., *Upper motives of products of projective linear groups*, J. Ramanujan Math. Soc. 28, No. 2, 159–172, 2013.

[16] De Clercq, C. *Motivic rigidity of Severi-Brauer varieties*, J. Algebra 373, 30–38, 2013.

[17] De Clercq, C., *Motivic equivalence of semi-simple algebraic groups*, Compos. Math. 153, No. 10, 2195–2213, 2017.

[18] De Clercq, C., et Garibaldi, S., *Tits p-indexes of semi-simple algebraic groups*, Compos. Math. 153, No. 10, 2195–2213, 2017.

[19] De Clercq, C., Quéguiner, A., et Zhykhovich, M., *Critical varieties and motivic equivalence for algebras with involution*, à paraître dans Trans. AMS.

[20] De Clercq, C., Florence, M., *Lifting low-dimensional local systems*, à paraître dans Math. Zeitschrift.

[21] De Clercq, C., Florence, M. et Lucchini Arteche, G., *Lifting vector bundles to Witt vector bundles*, arXiv :1812.08068.

[22] De Clercq, C., *Smooth profinite groups, I : geometrizing Kummer theory*, arXiv :2009.11130.

[23] De Clercq, C., *Smooth profinite groups, III : the Smoothness Theorem*, arXiv :2012.11027.

[24] De Clercq, C., Florence, M., *Lifting theorems and smooth profinite groups*, arXiv :1710.10631.

[25] De Clercq, C., Quéguiner, A. *Motifs et traces de Tate des variétés projectives homogènes*, appendice de ce mémoire.

[26] Deligne, P., Illusie, L., *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Inv. Math. 89, 247–270, 1987.

[27] Demazure, M., *Motifs des variétés algébriques*, Lecture Notes in Math., vol. 180, Springer, Séminaire Bourbaki, exp. 365, 19–38, 1971.

[28] Elman, R., *Quadratic forms and the u-invariant. I*, Math Z. 131, 283-304, 1973.

[29] Elman, R., *Quadratic forms and the u-invariant. II*, Ivent. Math. 21, 125-137, 1973 Math Z. 131, 283-304, 1973.

[30] Elman, R., Karpenko, N. et Merkurjev, A., *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, American Mathematical Society Colliquium Publication vol.56, Amer. Math. Soc., 2008.

[31] Engler, A.J. et Prestel, A., *Valued fields*, Springer, 2005.

[32] Florence, M.*Smooth profinite groups, II : the uplifting theorem*, arXiv :2009.11140.

[33] Garibaldi, S., Merkurjev, A. et Serre, J.-P., *Cohomological invariants in Galois cohomology*, Providence, American Mathematical Society, 2003.

[34] Garibaldi, S. et Petersson, H.P., *Groups of outer type E_6 with trivial Tits algebras*, Transf. Groups 12, no. 3, 443–474, 2007.

[35] Garibaldi, S., Petrov, V., Semenov, N., *Shells of twisted flag varieties and the Rost invariant*, Duke Math. J. 165, no. 2, 285-339, 2016.

[36] Gille, P., *Symbçole galoisien l-adique et théorème de Suslin-Voevosdky*, J. Math. Kyoto Univ. 47, 665–690, 2007.

[37] Hamblen, S., *Lifting n-dimensional Galois representations*, Canad. J. Math. 60, no. 5, 1028–1049, 2008.

[38] Haesemeyer, C. et Weibel, C., *The norm residue theorem in motivic cohomology*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 2019.

[39] HAUTION, O., *Lifting of coefficients for Chow motives of quadrics*, Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology, 239–247, Dev. Math., 18, Springer, New York, 2010.

[40] HOFFMANN, D., *Motivic equivalence and similarity of quadratic forms*, Doc. Math. Extra Vol., 265–275, 2015.

[41] IZHBOLDIN, O., *Motivic equivalence of quadratic forms*, Doc. Math. 3, 341–351, 1998.

[42] IZHBOLDIN, O., *Motivic equivalence of quadratic forms. II*, Manuscr. Math. 102, No. 1, 41–52, 2000.

[43] IZHBOLDIN, O., *Fields of u-invariant 9*, Ann. of Math (2) 154, no. 3, 529-587, 2001.

[44] KAPLANSKY, I., *Quadratic forms*, J. Math. Soc. Japan 5, 200–207, 1953.

[45] KARPENKO, N., *Upper motives of algebraic groups and incompressibility of Severi-Brauer varieties*, J. Reine Angew. Math. 677, 179–198, 2013.

[46] KARPENKO, N. (WITH AN APPENDIX FROM J.-P. TIGNOL), *Isotropy of orthogonal involutions*, Amer. J. Math. 135, 1–15, 2013.

[47] KARPENKO, N. ET ZHYKHOVICH, M., *Isotropy of unitary involutions*, Acta Math. 211, no. 2, 227–253, 2013.

[48] KARPENKO, N., *Upper motives of outer algebraic groups*, In Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology, vol. 18 of Dev. Math. Springer, New York, 249–258, 2010.

[49] KARPENKO, N., *Criteria of motivic equivalence for quadratic forms and central simple algebras*, Math. Ann. 317, No. 3, 585–611, 2000.

[50] KARPENKO, N., *On the first Witt index of quadratic forms*, Invent. Math. 153, no. 2, 455-462, 2003.

[51] KARPENKO, N., *Canonical dimension*, Proceedings of the ICM, vol. II, 146–161, 2010.

[52] KERSTEN, I. ET REHMANN, U., *Generic splitting of reductive groups*, Tohoku Math. J. (2) 46, No. 1, 35–70, 1994.

[53] KHARE, C., *Base change, lifting and Serres conjecture*, J. Number Theory 63, 387–395, 1997.

[54] Knebusch, M., *Generic splitting of quadratic forms. II*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 33, 65–93, 1976.

[55] Knebusch, M., *Generic splitting of quadratic forms. II*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 34, 1–31, 1977.

[56] Knus, M.-A., Merkurjev, A., Rost, M. et Tignol, J.-P., *The book of involutions*, with a preface of J. Tits, Providence, RI : American Mathematical Society, 1998.

[57] Köck, B., *Chow motif and higher Chow theory of G/P*, Manuscr. Math. 70, No. 4, 363–372 1991.

[58] Lewis, D. et Tignol, J.-P., *Classification theorems for central simple algebras with involution*, Manuscripta math. 100, 259–276, 1999.

[59] Manin, J., *Correspondances, motifs et transformations monoïdales*, Math. USSR Sbornik 6, p 439-470, 1968.

[60] Mehat, V. B., Ramanathan, A., *Frobenius splitting and cohomology vanishing of Schubert varieties*, Annals of Math. 122, 27-40, 1985.

[61] Mehat, V. B., Srinivas, V., *Varieties in positive characteristic with trivial tangent bundle*, Comp. Math. 64, 191–212, 1984.

[62] Merkurjev, A., *Kaplansky's conjecture in the theory of quadratic forms*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov, LOMI 175, no. Koltsa i Moduli. 3, 75-89, 163-164, 1989.

[63] Merkurjev, A., *Simple algebras and quadratic forms*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 54, no 1, 218-224, 1991.

[64] Merkurjev, A., *On the norm residue homomorphism for fields*, AMS. Transl. 174, 49–71, 1996.

[65] Merkurjev, A., Panin, I. et Wadsworth, A., *Index reduction formulas for twisted flag varieties. I*, K-Theory 10, No. 6, 517–596, 1996.

[66] Merkurjev, A., Panin, I. et Wadsworth, A., *Index reduction formulas for twisted flag varieties. II*, K-Theory 14, No. 2, 101–196, 1998.

[67] Merkurjev, A. et Suslin, *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Mathematics of the USSR - Izvestija 21, no. 2, 307-340, 1983.

[68] Oort, F., *Yoneda extensions in abelian categories*, Math. Ann. 153, 227–235, 1964.

[69] Petersson, H.P., *Structure theorems for Jordan algebras of degree three over fields of arbitrary characteristics*, Comm. Alg. 32, 1019–1049, 2004.

[70] Petrov, V. et Semenov, N., *Generically split projective homogeneous varieties*, Duke Math. J. 152, No. 1, 155–173, 2010.

[71] Petrov, V. et Semenov, N., *Generically split projective homogeneous varieties II*, J. J. K-Theory 10, No. 1, 1–8, 2012.

[72] Petrov, V., Semenov, N. et Zainoulline, K., *J-invariant of linear algebraic groups*, Ann. Ec. Norm. Sup. (4) 41, 1023–1053, 2008.

[73] Petrov, V. et Stravrova, A., *The Tits indices over semilocal rings*, Transform. Groups 16, 193–217, 2011.

[74] Ramakrishna, R., *Lifting Galois representations*, Invent. Math. 138, no. 3, 537–562, 1999.

[75] Ramakrishna, R., *Deforming Galois representations and the conjectures of Serre and Fontaine-Mazur*, Ann. of Math. 156, 115–154, 2002.

[76] Rost, M., *The motive of a Pfister form*, accessible sur la page personnelle de l'auteur https://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/motive.html, 1998.

[77] Scholl, A.J., *Classical motives*, dans Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math. vol.55, Amer. Math. Soc., p. 163-187, 1994.

[78] Serre, J.-P., *Cohomologie galoisienne : Progrès et problèmes*, Astérisque 227, 229–257, Exp. No. 783, 1995.

[79] Springer, T. A., *Sur les formes quadratiques d'indice zéro*, C. R. Acad. Sci., Paris 234, 1517–1519, 1952.

[80] Springer, T.A., *Linear algebraic groups, 2nd edition*, Birkhäuser, Basel, 1998.

[81] Springer, T.A. et Veldkamp, F.D., *Octonions, Jordan algebras and exceptional groups*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[82] Tao, D., *A variety associated to an algebra with involution*, Journal of Algebra 168, no. 2, 479–520, 1994.

[83] Tignol, J.-P. et Wadsworth, A.R., *Value functions on simple algebras, and associated graded rings*, Springer, 2015.

[84] Tits, J., *Classification of algebraic semi-simple groups*, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics IX, American Mathematical Society, Providence, RI, 1966.

[85] Tits, J., *Sur les degrés des extensions de corps déployant les groupes algébriques simples*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 315, No. 11, 1131–1138, 1992.

[86] Tits, J., *Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque*, J. Reine Angew. Math. 247, 196–220, 1971.

[87] Vishik, A., *Fields of u-invariant* 2^r+1, Algebra, Arithmetic and Geometry - In Honor of Yu.I.Manin, Birkhauser, 661-685, 2010.

[88] Vishik, A., *Motives of quadrics with applications to the theory of quadratic forms*, in the Proceedings of the Summer School "Geometric Methods in the Algebraic Theory of Quadratic Forms, Lens 2000" (ed. J.-P.Tignol), Lect. Notes in Math., 1835, 25-101, 2004.

[89] Vishik, A., Yagita, N., *Algebraic cobordisms of a Pfister quadric*, J. of the London Math. Soc. 76, n.2, 586-604, 2007.

[90] Voevodsky, V., *Reduced power operations in motivic cohomology*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 98, 1–57, 2003.

[91] Voevodsky, V., *Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$-coefficients*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 98, 59–104, 2003.

[92] Weil, A., *Algebras with involutions and the classical groups*, J. Indian Math Soc 24, 589-623, 1960.

[93] Zhykhovich, M., *Decompositions of motives of generalized Severi-Brauer varieties*, Doc. Math. 17, 151–165, 2012.

9 Appendice : Motifs et traces de Tate des variétés projectives homogènes

HIGHER TATE TRACES OF CHOW MOTIVES

CHARLES DE CLERCQ AND ANNE QUÉGUINER-MATHIEU

Abstract. We establish the complete classification of Chow motives of projective homogeneous varieties for p-inner semisimple algebraic groups, with coefficients in a finite local ring of residue characteristic p. Our results involve a new motivic invariant, the Tate trace of a motive, defined as a pure Tate summand of maximal rank. They apply more generally to objects of the Tate subcategory generated by upper motives of irreducible, geometrically split varieties satisfying the nilpotence principle. Using Chernousov-Gille-Merkurjev decompositions and their interpretation through Bialynicki-Birula-Hesselink-Iversen filtrations due to Brosnan, we then generalize the characterization of the motivic equivalence of p-inner semisimple groups through the higher Tits p-indexes. We also define the motivic splitting pattern and the motivic splitting towers of a summand of the motive of a projective homogeneous variety, which correspond for quadrics to the classical splitting pattern and Knebusch tower of the underlying quadratic form.

1. Introduction

Chow motives provide a powerful tool to study the geometry of varieties without rational points, including projective homogeneous varieties, such as quadrics and Severi-Brauer varieties. In this article we introduce a new family of motivic invariants, the Tate traces, which measures the isotropy level of motives. More precisely, the Tate Trace of a motive is a pure Tate direct summand of maximal rank. Through the Tate traces, we obtain a complete classification for the motives of projectives homogeneous varieties for p-inner semisimple algebraic groups, with coefficients in a finite local ring with residue characteristic p.

The theory of motives of projective homogeneous varieties was brought to the forefront of modern algebra in the nineties, with Voevodsky's proof of Milnor's conjecture [39] which relied on the Rost motive. This inspired an extensive study of the motives of projective quadrics by Vishik, Karpenko, Merkurjev and others, leading to numerous breakthroughs for classical problems of the algebraic theory of quadratic forms [24, 25, 36, 38]. Among these results is the classification of motives of projective quadrics [36, Thm. 4.18] (see [13, Thm. 93.1] for the result in arbitrary characteristic).

Theorem 1.1 (Vishik's criterion)**.** *Let Q and Q' be smooth projective quadrics, given by quadratic forms q and q' of the same dimension over a field F.*

The motives of Q and Q' (with coefficients in $\mathbb{Z}$ or $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) are isomorphic if and only if for all field extensions E/F, the Witt indexes of q_E and q'_E are equal.

Inspired by one of the main tools used by Vishik, the Čech simplicial schemes, Karpenko introduced in [22] their avatars for projective homogeneous varieties, the

Date: March 4, 2023.

upper motives. Upper motives are easier to handle than motives of varieties, yet they encode deep geometric information, such as their canonical p-dimension [21], and were used by Karpenko to classify motives of Severi-Brauer varieties (see [9, 26] for other applications). The classification of motives for more general flag varieties of inner type A_n is given by [9, Theorème 19].

Criteria for motivic isomorphisms were achieved in several other cases such as involution varieties [12], Borel varieties [33] and for some exceptional projective homogeneous varieties [14, 31, 32]. However, all the above cases deal with projective homogeneous varieties of the same type, and with respect to semisimple groups with the same Dynkin diagram. Theorem 3.15 extends these results with finite coefficients for arbitrary projective homogeneous varieties for p-inner semisimple algebraic groups. Moreover, its proof does not rely on the classification of semisimple groups. The class of p-inner semisimple groups is quite large: all absolutely simple groups are p-inner for some prime p, except the trialitarian groups of type ${}^6D_4$. Products of p-inner semisimple groups are p-inner, as well as Weyl restrictions of such, with respect to separable extensions of degree a power of p. Note that considering direct summands of motives of projective quadrics in Voevodsky's category of motives $\mathrm{DM}(F;\mathbb{F}_2)$, Tate traces corresponds to Vishik's isotropic motivic realization [37] and are given by Bachmann's generalized geometric fixed point functor [3, 4].

We actually show more: from Theorem 3.15, higher Tate traces characterize isomorphism classes of objects in the additive category $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$ generated by twists of upper motives of geometrically split irreducible varieties satisfying the nilpotence principle (Definition 3.11). The result thus applies to arbitrary direct summands of projective homogeneous varieties for p-inner semisimple groups, our main focus in this article, but actually holds for a broader class of motives, containing Artin-Tate motives with respect to separable p-primary field extensions, motives of projective pseudo-homogeneous varieties and much more. Our results therefore highlight the question of determining the varieties suited for the theory of upper motives, that is, the varieties whose motive is given by direct sum of initial motives.

We derive from Theorem 3.15 the following applications:

(1) computing the Tate trace of tensor products of motives, we prove a cancellation property in the category $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$ (Corollary 3.22);
(2) as Tate traces of projective homogeneous varieties for p-inner groups are determined by the Tits indexes of the underlying semisimple group, we show that their motives are determined by cohomological invariants in numerous situations (Corollaries 4.5 and 4.8);
(3) considering G, G' two p-inner semisimple groups of the same type, we relate motivic isomorphisms of projective homogeneous varieties for G and G' and their Tits indexes over field extensions (Theorem 4.12). This generalizes the main result of [9], expressing motivic equivalence of semisimple algebraic groups through their higher Tits p-indexes. The proof of Theorem 4.12 relies on the theory of upper motives, Chernousov-Gille-Merkurjev motivic decompositions [7] and their interpretation through Bialynicki-Birula-Hesselink-Iversen filtrations due to Brosnan [6].

(4) we introduce a notion of motivic splitting pattern and motivic splitting towers (Definition 5.6), which comprises the classical splitting pattern and Knebusch's tower of quadratic forms [28].

Acknowledgments. We are grateful to Skip Garibaldi, Stefan Gille, Nikita Karpenko, Srimathy Srinivasan and Alexander Vishik for their comments on a preliminary version of this paper, and insightful discussions.

1.1. **Notation.** Our main reference for the basics of Chow groups with coefficients $\mathrm{Ch}_*(\cdot)$ and Chow motives is [13]. The base field is denoted by F. Varieties over F, that is separated scheme of finite type over $\operatorname{Spec} F$, are always assumed to be smooth and projective. We denote by $\mathrm{Mot}_F(\Lambda)$ the category of Chow motives with coefficients in a commutative ring Λ. Except in a few places where we consider motives with coefficients in $\mathbb{Z}$, we will assume that Λ is a finite local ring with residue field of characteristic $p > 0$. In particular, Λ is connected.

2. Preliminary results

A *pure Tate motive* is a direct sum of Tate motives, that is $M = \Sigma_{i\in I}\Lambda\{k_i\}$ for a finite set of integers $\{k_i,\ i \in I\}$, where $\Lambda\{k\}$ stands for $M(\operatorname{Spec} F)\{k\}$. A motive $M \in \mathrm{Mot}_F(\Lambda)$ is called *geometrically split* if there exists a field extension E/F such that M_E is a pure Tate motive. A variety X over F is called *geomerically split* if $M(X)$ is geometrically split. An irreducible variety X over F is called *generically split* if $M(X)_{F(X)}$ is a pure Tate motive. For instance, projective homogeneous varieties under the action of an affine semisimple algebraic group G are geometrically split by [30]; see also [13, 66.5, 66.7] for split examples. If in addition G has inner type, the variety of Borel subgroups of G is generically split.

Let $M \in \mathrm{Mot}_F(\Lambda)$ be a motive. A decomposition of M as a direct sum of motives is called complete if all summands are indecomposable motives. We say that the *Krull-Schmidt property* holds for M if any decomposition of M can be refined into a complete one, and M admits a unique complete decomposition, up to permutation and isomorphism of the summands. By [36], the Krull-Schmidt property holds for $M(X) \in \mathrm{Mot}_F(\mathbb{Z})$ if X is a projective quadric. Nevertheless, it does not hold in general for motives with coefficients in $\mathbb{Z}$, even for projective homogeneous varieties. See [8, Ex. 32] for an explicit example using Severi-Brauer varieties. If we now consider Chow motives with finite coefficients, the Krull-Schmidt property holds for a large class of varieties, as we proceed to recall.

We say that a variety X satisfies the *nilpotence principle* if for any field extension E/F and any ring of coefficients Λ, an endomorphism f of the motive $M(X)$ which maps to zero in $\mathrm{End}(M(X_E))$ for some field extension E/F is nilpotent, see [34]. For example, projective homogeneous varieties under the action of an affine semisimple algebraic group satisfy the nilpotence principle [7, Thm 8.2].

By [22, §2.I], if X is geometrically split and satisfies the nilpotence principle, then the Krull-Schmidt property holds for $M(X)$. More precisely, we have the following:

Proposition 2.1. [22, Cor. 2.6] *Recall* $\mathrm{Mot}_F(\Lambda)$ *is the category of Chow motives with coefficients in a finite local ring* Λ*. Let* $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$ *be the full additive subcategory generated by direct summands of shifts of motives of geometrically split varieties satisfying the nilpotence principle. The Krull-Schmidt property holds for all objects in* $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$*.*

Proof. We reproduce the argument for the reader's convenience. By definition, all objects of $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$ are finite sums of indecomposable ones, and an indecomposable object is isomorphic to $M\{i\}$, for some $i \in \mathbb{Z}$, and some indecomposable summand M of $M(X)$, where X is a geometrically split variety satisfying the nilpotence principle. Therefore, by [2, Thm 3.6 of Chapter I], we need to prove that the endomorphism rings of indecomposable objects are local rings. So, consider an indecomposable motive $M\{i\}$ as above and let $\pi \in \mathrm{End}(M(X))$ be the corresponding projector. We have

$$\mathrm{End}(M\{i\}) = \mathrm{End}(M) = \pi\,\mathrm{End}\big(M(X)\big)\pi \subset \mathrm{End}\big(M(X)\big).$$

In particular, by [22, Cor. 2.2], for any $f \in \mathrm{End}(M\{i\})$, there exists a non-zero integer n such that f^n is a projector. Since $M\{i\}$ is indecomposable, it follows that $f^n \in \{0, 1\}$. Therefore, all non-invertible elements of $\mathrm{End}(M\{i\})$ are nilpotent, hence it is a local ring. □

Assume now that X and Y are two irreducible varieties of respective dimensions d and d'. By definition, a morphism $M(X) \to M(Y)$ in the category $\mathrm{Mot}_F(\Lambda)$ is a correspondence $\alpha : X \rightsquigarrow Y$, that is a cycle $\alpha \in \mathrm{Ch}_d(X \times Y)$. The projection p on the first component induces a morphim $p_* : \mathrm{Ch}_d(X \times Y) \mapsto \mathrm{Ch}_d(X) \simeq \Lambda \cdot [X]$. The multiplicity of α is the element $\mathrm{mult}(\alpha) \in \Lambda$ defined by $p_*(\alpha) = \mathrm{mult}(\alpha) \cdot [X]$.

A composition of correspondences $\alpha : X \rightsquigarrow Y$ and $\beta : Y \rightsquigarrow Z$ has multiplicity $\mathrm{mult}(\beta \circ \alpha) = \mathrm{mult}(\beta)\,\mathrm{mult}(\alpha)$, see [18, Cor. 1.7]. In particular, the multiplicity of a projector $\pi : X \rightsquigarrow X$ is an idempotent of Λ, hence 0 or 1 since Λ is connected. As explained in [22, §2.II], if the diagonal Δ_X decomposes as a sum of pairwise orthogonal projectors, one has multiplicity 1 and all others have multiplicity 0. It follows that in a given direct sum decomposition of $M(X)$, there is a unique summand defined by a projector of mutiplicity 1, which is called upper. If in addition X is geometrically split and satisfies the nilpotence principle, then $M(X)$ satisfies the Krull-Schmidt property, so that $M(X)$ contains a unique (up to isomorphism) indecomposable upper summand, called the upper motive of X and denoted by U_X.

The variety X is called *isotropic with coefficients in* Λ if X admits a 0-cycle of degree 1 (or, equivalently, a 0-cycle with invertible degree $\delta \in \Lambda^\times$). Such a cycle $\alpha \in \mathrm{Ch}_0(X)$ may also be viewed as a correspondence $\mathrm{Spec}\,F \rightsquigarrow X$ of multiplicity 1. We get the following characterisation of isotropy:

Lemma 2.2. *Let X be an irreducible geometrically split variety. The following are equivalent :*

(i) X is isotropic with coefficients in Λ;
(ii) $M(X)$ contains a summand isomorphic to $\Lambda\{0\}$;
(iii) $M(X)$ contains a summand isomorphic to $\Lambda\{k\}$ for some $k \in \mathbb{Z}$.

Proof. Assume X is isotropic with coefficients in Λ and let $\alpha \in \mathrm{Ch}_0(X)$ be a cycle with $\deg(\alpha) = 1$. Consider the product $[X] \times \alpha \in \mathrm{Ch}_d(X \times X)$. Viewed as a correspondence $X \rightsquigarrow X$, one may check it is idempotent, so it defines a summand $(X, [X] \times \alpha)$ of $M(X)$. Moreover, its multiplicity is $\mathrm{mult}([X] \times \alpha) = \deg(\alpha) = 1$, and the correspondences $\alpha : \mathrm{Spec}\,F \rightsquigarrow X$ and $[X] : X \rightsquigarrow \mathrm{Spec}\,F$ induce isomorphisms between $(X, [X] \times \alpha)$ and $\Lambda\{0\}$, and we get (ii). The implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ is obvious, and it remains to prove $(iii) \Rightarrow (i)$. Assume $M(X)$ contains a summand (X, π) isomorphic to $\Lambda\{k\}$, and let $\alpha :\ \Lambda\{k\} \rightsquigarrow X$ and $\beta : X \rightsquigarrow \Lambda\{k\}$

be correspondences inducing an isomorphism between (X,π) and $\Lambda\{k\}$. We have

$$\alpha \in \mathrm{Ch}_k(X) \simeq \mathrm{Ch}^{d-k}(\mathrm{Spec}\, F \times X) \text{ and } \beta \in \mathrm{Ch}_{d-k}(X) \simeq \mathrm{Ch}^k(X \times \mathrm{Spec}\, F).$$

Moreover, the intersection product of their pull-backs to $\mathrm{Spec}\, F \times X \times \mathrm{Spec}\, F$, along the projections p_{12} and p_{23}, respectively, is a cycle $\gamma \in \mathrm{Ch}^d(X) \simeq \mathrm{Ch}_0(X)$. Since $\beta \circ \alpha = 1 \in \mathrm{Ch}_0(\mathrm{Spec}\, F) \simeq \Lambda$, the 0-cycle γ has degree 1 and this proves that X is isotropic with coefficients in Λ. □

Let X and Y be two irreducible varieties. There is a correspondence $\alpha : X \rightsquigarrow Y$ of multiplicity 1 if and only if $Y_{F(X)}$ is isotropic with coefficients in Λ, see for instance [13, Cor. 57.11, Lem. 75.1]. When these conditions are satisfied, we say that X *dominates* Y *with coefficients in* Λ, and we write $X \succeq_\Lambda Y$, see [9, Def. 4]. The domination relation is a preorder and the associated equivalence relation is called *equivalence with coefficients in* Λ and denoted by $\approx_\Lambda$.

Example 2.3. Assume X and Y are quadrics. By Springer's theorem [13, Cor. 71.3], $Y_{F(X)}$ is isotropic with coefficients in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ if and only if there is a rational map $X \dashrightarrow Y$. Hence, for quadrics, the domination relation with coefficients in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ coincides with the relation considered by Bruno Kahn in [17, §I.7], and the corresponding equivalence relation is the stable birational equivalence. Therefore, we may view the equivalence relation with coefficients in Λ as a motivic version of stable birational equivalence.

By definition, $X \approx_\Lambda Y$ if and only if there are correspondences $X \rightsquigarrow Y$ and $Y \rightsquigarrow X$ of multiplicity 1, or equivalently, $X_{F(Y)}$ and $Y_{F(X)}$ are isotropic with coefficients in Λ. For the varieties we are interested in, the following result, which is due to Karpenko, provides another characterization in terms of upper motives:

Lemma 2.4. [22, Cor. 2.15] *Let X and Y be two irreducible geometrically split F-varieties satisfying the nilpotence principle. The varieties X and Y are equivalent with coefficients in Λ if and only if the upper motives U_X and U_Y are isomorphic in* $\mathrm{Mot}_F(\Lambda)$.

3. Tate trace and initial motives

Recall the ring of coefficients Λ is a finite local ring. Let M be a motive in $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$. By definition, M is geometrically split; a field E/F such that M_E is a pure Tate motive is called a splitting field of M. The decomposition as a sum of Tate motives of $M_E \in \mathrm{Mot}_E^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$ does not depend on the choice of a splitting field E. Hence, we may give the following definition:

Definition 3.1.
1. The rank $\mathrm{rk}(M)$ of a motive $M \in \mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$ is the rank of $\mathrm{Ch}_*(M_E)$ as a Λ-module, where E/F is a splitting field for M.
2. The hook $h(M)$ of a non-trivial motive $M \in \mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$ is the smallest integer $i \in \mathbb{Z}$ such that $\mathrm{Ch}_i(M_E)$ is non-zero, where E/F is a splitting field for M.

Example 3.2. Assume T is a non trivial pure Tate motive. The rank of T is the number of Tate summands in a complete decomposition of T, while its hook $h(T)$ is the smallest integer i such that $\Lambda\{i\}$ is a direct summand of T. This follows from the fact that $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mot}_F(\Lambda)}(\Lambda\{i\}, M) = \mathrm{Ch}_i(M)$ and $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mot}_F(\Lambda)}(\Lambda\{i\}, \Lambda\{k\})$ is 0 is $i \neq k$ and Λ otherwise.

Example 3.3. Let X be an irreducible geometrically split variety satisfying the nilpotence principle. The hook of the motive of X is $h\big(M(X)\big)=0$.

Moreover, by Lemma 2.2, the upper summands of $M(X)$ are precisely the summands N such that $h(N)=0$. In particular, we have $h(U_X)=0$.

Example 3.4. Given two motives $M,N\in\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$, one may easily check that

$$\mathrm{rk}(M+N)=\mathrm{rk}(M)+\mathrm{rk}(N),\ h(M+N)=\min\{h(M),h(N)\},$$
$$\mathrm{rk}(M\otimes N)=\mathrm{rk}(M)\,\mathrm{rk}(N)\text{ and }h(M\otimes N)=h(M)+h(N).$$

In particular, for all $i\in\mathbb{Z}$, we have $h(M\{i\})=h(M)+i$, and for all irreducible geometrically split variety X satisfying the nilpotence principle, $h(U_X\{i\})=i$.

Let $M\in\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$ be a motive. By the Krull-Schmidt property, see Prop 2.1, two pure Tate summands of M of maximal rank are isomorphic. Therefore, we may give the following definition:

Definition 3.5. A pure Tate motive is called the Tate trace of $M\in\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$ if it is isomorphic to a pure Tate summand of maximal rank of M. The Tate trace of M is uniquely defined up to isomorphism and denoted by $\mathrm{Tr}(M)$.

Example 3.6. A motive M is a pure Tate motive if and only if $\mathrm{Tr}(M)\simeq M$.
By Lemma 2.2, if X is an irreducible geometrically split variety satisfying the nilpotence principle, then $\mathrm{Tr}\big(M(X)\big)\not\simeq 0$ if and only if X is isotropic with coefficients in Λ. In particular, the Tate trace does not commute with scalar extension.

Example 3.7. Let $q=i_0\mathbb{H}+q_{\mathrm{an}}$ be a $2m$-dimensional quadratic form with Witt index i_0 and anisotropic part q_{an}. Denote by Q and Q_{an} the corresponding projective quadrics. By [34], the motive $M(Q)\in\mathrm{Mot}_F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ satisfies:

$$M(Q)\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\{0\}+\cdots+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\{i_0-1\}+M(Q_{\mathrm{an}})\{i_0\}$$
$$+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\{2m-1-i_0\}+\cdots+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\{2m-2\}.$$

By Springer's theorem [13, 71.3], Q_{an} is anisotropic with coefficients in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ so that $M(Q_{\mathrm{an}})$ has trivial Tate trace. Therefore, the Tate trace of $M(Q)$ is given by

$$\mathrm{Tr}(M(Q))\simeq\sum_{k=0}^{i_0-1}\big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\{k\}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\{2m-2-k\}\big).$$

In view of this example, we call a motive $M\in\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$ isotropic if it has non-trivial Tate trace and anisotropic otherwise. By the Krull-Schmidt property, M decomposes in a unique way as $M=\mathrm{Tr}(M)+M_{an}$ for some anisotropic motive M_{an} called the anisotropic part of M, and uniquely defined up to isomorphism. Therefore, the Tate trace of a motive measures its splitting.

Example 3.8. Let A be an F-central simple algebra endowed with an orthogonal involution σ. The Witt index $i_w(\sigma)$ of the involution σ is the reduced dimension of a maximal isotropic right ideal in A [29, §6.A]. The variety of isotropic right ideals of reduced dimension 1 is called the involution variety and denoted by X_σ. It is a $\mathrm{PGO}^+(A,\sigma)$-projective homogeneous variety, hence $M(X_\sigma)\in\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. We claim that its Tate trace is given by

$$\mathrm{Tr}(M(X_\sigma))\simeq\begin{cases}0 & \text{if } A \text{ is non split,}\\ \sum_{k=0}^{i_w(\sigma)-1}\big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\{k\}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\{2m-2-k\}\big) & \text{if } A \text{ is split.}\end{cases}$$

Indeed, the algebra A contains a right ideal of reduced dimension 1 if and only if it is split. Moreover, since A admits an orthogonal involution, it has exponent 2 and its Schur index is invariant under any odd degree extension of the base field. Therefore, if A is non-split, then the variety X_σ is anisotropic with coefficients in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and this proves the first equality. Assume now that A is split. Then σ is adjoint to a quadratic form q over F and it follows from the definitions that X_σ is isomorphic to the corresponding quadric Q and $i_w(\sigma)$ is equal to the Witt index of q. Hence the second equality follows from Example 3.7.

We may characterize the domination relation with coefficients in Λ in terms of Tate traces as follows:

Proposition 3.9. *Let X and Y be two irreducible geometrically split varieties satisfying the nilpotence principle. Then $X \succeq_\Lambda Y$ if and only if $\mathrm{Tr}\big(M(Y_E)\big) \not\simeq 0$ for all field extensions E/F such that $\mathrm{Tr}\big(M(X_E)\big) \not\simeq 0$.*

Proof. Assume first that $X \succeq_\Lambda Y$. By definition there exists a correspondence $\alpha : X \rightsquigarrow Y$ of multiplicity 1. Hence, any correspondence $Z \rightsquigarrow X$ provides, by composition with α, a correspondence $Z \rightsquigarrow Y$ of the same multiplicity. So, Y_E is isotropic with coefficients in Λ for all E/F such that X_E is isotropic with coefficients in Λ. By example 3.6, this proves the first implication. To prove the converse, it suffices to consider the field $E = F(X)$. Since $X_{F(X)}$ is isotropic with coefficients in Λ, the corresponding motive $M(X_{F(X)})$ has non-zero Tate trace. Therefore $\mathrm{Tr}\big(M(Y_{F(X)})\big) \neq 0$ and this proves $Y_{F(X)}$ is isotropic with coefficients in Λ. So $X \succeq_\Lambda Y$, and this finishes the proof. $\square$

Therefore, we may extend the domination relation to motives as follows:

Definition 3.10. Let $M, N \in \mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$ be two motives.

(1) We say that M dominates N, and we write $M \succeq_\Lambda N$, if $\mathrm{Tr}(N_E) \not\simeq 0$ for all field extension E/F, such that $\mathrm{Tr}(M_E) \not\simeq 0$.
(2) We say that M is equivalent to N, and we write $M \approx N$ if $M \succeq N$ and $N \succeq M$.

Two motives are equivalent if and only if they are isotropic over the same field extensions of the base field. In particular, two isotropic motives are equivalent.

We now consider a subcategory of $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$, which, as recalled below, contains the motives we are interested in, and for which we will be able to prove an isomorphism criterion for objects using the Tate trace (see Theorem 3.15).

Definition 3.11. (1) A motive $P \in \mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$ is called *initial* if there exists an irreducible geometrically split variety X satisfying the nilpotence principle such that P is isomorphic to $U_X\{i\}$ for some $i \in \mathbb{Z}$, where U_X denotes upper motive of X.
(2) The full additive subcategory of $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$ generated by initial motives is denoted by $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$.

By definition, an object in $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$ is a finite direct sum of initial motives. Assume G is a semi-simple affine algebraic group over F of p-inner type, i.e. G_E is inner for some field extension E/F of p-power degree. By [23, Thm. 1.1], the motive of a projective G-homogeneous variety with coefficients in a finite local ring Λ of residue characteristic p decomposes as a direct sum of twists of upper motives, for various quasi-G-homogeneous varieties. In other words, motives of projective G-homogeneous varieties belong to $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$.

Remark 3.12. Let X be a geometrically irreducible and geometrically split variety satisfying the nilpotence principle. Denote by U_X the indecomposable upper summand of $M(X)$. The motive $(U_X)_L$ is still an upper summand of $M(X_L)$ but it need not be indecomposable anymore. Therefore, $U_{(X_L)}$ is a direct summand of $(U_X)_L$ but in general they are not isomorphic. Hence, given a motive $M \in \mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$, it is not known in general whether or not $M_L \in \mathrm{Mot}_L^{\mathrm{I}}(\Lambda)$.

A nice property of $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$ is that the hook of an element is easy to compute: by example 3.4, if $M = \sum_{k=1}^r U_{X_k}\{i_k\}$, then $h(M) = \min\{i_k,\ k \in [\![1,r]\!]\}$. In addition, we have the following isomorphism criterion for indecomposable motives:

Lemma 3.13. *Let $M = U_X\{i\}$ and $N = U_Y\{j\}$ be two initial motives. Then $M \simeq N$ if and only if $i = j$ and $X \approx_\Lambda Y$.*

Proof. If M and N are isomorphic, they have the same hook, so we have $i = j$. Hence, M and N are isomorphic if and only if U_X and U_Y are, and Lemma 2.4 finishes the proof. □

We may also compute the Tate trace of a tensor product of motives in $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$:

Lemma 3.14. *For all $N, M \in \mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$, we have $\mathrm{Tr}(M \otimes N) = \mathrm{Tr}(M) \otimes \mathrm{Tr}(N)$.*

Proof. Starting from decompositions $M = \sum_{k=1}^r U_{X_k}\{i_k\}$ and $N = \sum_{\ell=1}^s U_{Y_\ell}\{j_\ell\}$ as sums of initial motives, we get

$$M \otimes N \simeq \sum_{1\le k\le r,\ 1\le \ell\le s} \big(U_{X_k} \otimes U_{Y_\ell}\big)\{i_k + j_\ell\}.$$

Given two irreducible geometrically split varieties satisfying the nilpotence principle X and Y, we claim that the Tate trace of $U_X \otimes U_Y$ is non zero if and only if both factors are Tate motives. Indeed, $U_X \otimes U_Y$ is a direct summand of $M(X \times Y)$. Therefore, if $\mathrm{Tr}(U_X \otimes U_Y) \not\simeq 0$, then $X \times Y$ is isotropic with coefficients in Λ. Hence both X and Y are isotropic with coefficients in Λ, and by Lemma 2.2, we get that $U_X \simeq \Lambda\{0\} \simeq U_Y$.

As a consequence, the Tate factors in a complete decomposition of $M \otimes N$ all occur as a tensor product of a Tate factor in a complete decomposition of M and a Tate factor in a complete decomposition of N. □

The main result of this section is the following:

Theorem 3.15. *Consider two motives M and N in the full subcategory $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$ of the category of Chow motives with coefficients in a finite local ring Λ. Then, M and N are isomorphic if and only if M_L and N_L have isomorphic Tate traces for all field extensions L/F.*

Remark 3.16. When the right hand side condition holds, we say that M and N have isomorphic higher Tate trace.

Proof. Since $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$ is a full subcategory of $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$, where the Tate trace is defined, one implication is clear. To prove the converse, let us assume that M and N are objects of $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$, and that they have the same higher Tate trace. In particular, $\mathrm{Tr}(M) \simeq \mathrm{Tr}(N)$, hence M and N are isomorphic if and only if their anisotropic parts are isomorphic. So we may assume M and N are anisotropic.

Consider a field E/F which is a splitting field for both M and N. We have $M_E \simeq \mathrm{Tr}(M_E) \simeq \mathrm{Tr}(N_E) \simeq N_E$. In particular, M and N have the same rank r and hook h. Tensoring M and N with $\Lambda\{-h\}$, we may assume they both have hook 0. We now proceed by induction on r. The result trivially holds if $r = 0$, so we may assume M and N have rank $r \geq 1$.

We let M_0 (respectively N_0) be the sum of all indecomposable summands in a complete decomposition of M (respectively N) having hook 0. Since M and N have hook 0, the motives M_0 and N_0 are non-trivial. They admit decompositions $M_0 = \sum_{k=1}^{s} U_{X_k}$ and $N_0 = \sum_{\ell=1}^{t} U_{Y_\ell}$ for some non-zero integers s and t and some irreducible geometrically split varieties X_k and Y_ℓ satisfying the nilpotence principle. Consider the function field $F_1 = F(X_1)$. The variety X_1 becomes isotropic with coefficients in Λ over F_1, therefore by Lemma 2.2, $(M_0)_{F_1}$ contains a summand isomorphic to $\Lambda\{0\}$. Since M and N have the same higher Tate trace, it follows that $\Lambda\{0\}$ also is a direct summand of N_{F_1}. By definition of N_0, we have $N = N_0 + N_1$ with $h(N_1) \geq 1$, so that $\Lambda\{0\}$ actually is a summand of $(N_0)_{F_1}$. It follows $\Lambda\{0\}$ is a summand of $(U_{Y_{\ell_1}})_{F_1}$ for some $\ell_1 \in [\![1, t]\!]$, hence of $M(Y_{\ell_1})_{F_1}$. Applying again Lemma 2.2, we get that $(Y_{\ell_1})_{F_1}$ is isotropic with coefficients in Λ, that is X_1 dominates Y_{ℓ_1} with coefficients in Λ. The same argument applied to scalar extension to $F(Y_{\ell_1})$ shows that Y_{ℓ_1} dominates X_{k_1} with coefficients in Λ for some $k_1 \in [\![1, s]\!]$. The integer k_1 need not be equal to 1; but iterating the process, we get a decreasing chain of varieties

$$X_1 \succeq_\Lambda Y_{\ell_1} \succeq_\Lambda X_{k_1} \succeq_\Lambda Y_{\ell_2} \succeq_\Lambda \cdots \succeq_\Lambda X_{k_n},$$

for some integers $k_i \in [\![1, s]\!]$ and $\ell_i \in [\![1, t]\!]$. Since the set of varieties X_k and Y_ℓ are finite, there exists $k \in [\![1, s]\!]$ and $\ell \in [\![1, t]\!]$ such that $X_k \succeq_\Lambda Y_\ell \succeq_\Lambda X_k$, hence, $X_k \approx_\Lambda Y_\ell$. By Lemma 3.13, it follows that $U_{X_k} \simeq U_{Y_\ell}$, so we may write $M \simeq U_{X_k} + M'$ and $N \simeq U_{X_k} + N'$ for some motives M' and N' in $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$. Since M and N have the same higher Tate trace, the same holds for M' and N' and this concludes the proof by induction. □

As we already explained, by Karpenko [22, Thm. 3.5], [23, Thm. 1.1], our theorem applies to the motives of projective homegeneous varieties for groups of inner type for all finite local Λ, and groups of p-inner type for $\Lambda = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. In this setting, Theorem 3.15 recovers numerous known results, see the following and § 4. For quadrics, it provides a new proof of Vishik's criterion for motivic equivalence:

Corollary 3.17 (Vishik [36])**.** *Let Q and Q' be smooth projective quadrics corresponding to quadratic forms q and q' of the same dimension. The motives of Q and Q' are isomorphic in $\mathrm{Mot}_F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ if and only if the quadratic forms q_L and q'_L have the same Witt index for all field extension L/F.*

Proof. As Q and Q' are of the same dimension, Rost's decomposition [34, Prop. 2] states that for any field extension L/F, the Tate trace of the motive $M(Q_L)$ (resp. $M(Q'_L)$) determines and is determined by the Witt index of q_L (resp. of q'_L). The corollary then follows immediately from Theorem 3.15. □

The same argument applied to involution varieties, whose Tate traces are described in Example 3.8, leads to the following generalization:

Corollary 3.18. *Let A be a central simple F-algebra and σ and τ two orthogonal involutions on A. The motives of the corresponding involution varieties X_σ and X_τ are isomorphic in $\mathrm{Mot}_F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ if and only if for all field extension L/F such that A_L is a split algebra, we have $i_w(\sigma_L) = i_w(\tau_L)$.*

Remark 3.19. Corollary 3.18, combined with Karpenko's theorem on anisotropy of orthogonal involutions after generic splitting [18], provides a new proof that involution varieties are critical, see [12, Thm 3.6].

Example 3.20. Consider two central simple F-algebras A and B of the same degree. The corresponding Severi-Brauer varieties $\mathrm{SB}(A)$ and $\mathrm{SB}(B)$ have isomorphic motives with coefficients in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ if and only if their p-primary components A_p and B_p generate the same subgroup in the Brauer group of F. This can be deduced from the results of [22] or shown as follows. By [20], the motives of $\mathrm{SB}(A)$ and $\mathrm{SB}(B)$ decompose, respectively, as direct sums of twists of the Severi-Brauer varieties of A_p and B_p. It follows that given a field extension E/F, the motive $M(\mathrm{SB}(A_E))$ (resp. $M(\mathrm{SB}(B_E))$) is either pure Tate or anisotropic, depending on whether the p-primary component $(A_p)_E$ (resp. $(B_p)_E$) is split or not. The conclusion is implied by Theorem 3.15, since two central simple algebras are split by the same field extensions of F if and only if they generate the same subgroup of the Brauer group of F, by [1, Theorem 9.3].

Remark 3.21. As opposed to Vishik's criterion (Cor. 3.17), Theorem 3.15 does not hold for motives with $\mathbb{Z}$ coefficients. Indeed, consider two central division F-algebras D and D' of degree n and let $\mathrm{SB}(D)$ and $\mathrm{SB}(D')$ be their respective Severi-Brauer varieties. Assume D and D' generate the same subgroup of the Brauer-group, and yet D is isomorphic neither to D' nor to its opposite. By [19, Criterion 7.1], $M(X_D)$ and $M(X_{D'})$ are not isomorphic in $\mathrm{Mot}_F(\mathbb{Z})$; nevertheless, by theorems of Châtelet and Amitsur (see [15, 5.1.3, 5.4.1]), for any field extension E/F, either $M(X_D)$ and $M(X_{D'})$ are anisotropic over E, or both are pure Tate motives isomorphic to $M(\mathbb{P}_E^{n-1})$.

We conclude this section with a cancellation property in the category $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$:

Corollary 3.22. *Let $M, N, N' \in \mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$ be three non-trivial motives.*
If $N \succeq M$, $N' \succeq M$, and $M \otimes N \simeq M \otimes N'$, then $N \simeq N'$.

Proof. Consider M, N and N' as above and let E/F be a field extension. Since $M \otimes N \simeq M \otimes N'$, they have the same higher Tate trace. By Lemma 3.14, we get that $\mathrm{Tr}(M_E) \otimes \mathrm{Tr}(N_E) \simeq \mathrm{Tr}(M_E) \otimes \mathrm{Tr}(N'_E)$.

Assume first that $\mathrm{Tr}(N_E) = 0$. Then $\mathrm{Tr}(M_E) \otimes \mathrm{Tr}(N'_E) = 0$. Hence, either $\mathrm{Tr}(M_E) = 0$ or $\mathrm{Tr}(N'_E) = 0$. Since $N' \succeq M$, we actually get $\mathrm{Tr}(N'_E) = 0$ in both cases.

Assume now that $\mathrm{Tr}(N_E) \neq 0$. Since $N \succeq M$, we also have $\mathrm{Tr}(M_E) \neq 0$. In particular, $\mathrm{Tr}(M_E)$ has non-zero rank, and it follows that $\mathrm{Tr}(N_E)$ and $\mathrm{Tr}(N'_E)$ have the same rank r, see Example 3.4. Let T be a pure Tate motive of maximal rank which is a direct summand of both $\mathrm{Tr}(N_E)$ and $\mathrm{Tr}(N'_E)$. We may decompose $\mathrm{Tr}(N_E) = T + S$ and $\mathrm{Tr}(N'_E) = T + S'$ for some pure Tate motives S and S' that contain no isomorphic Tate summand. By the Krull-Schmidt property, we have $\mathrm{Tr}(M_E) \otimes S \simeq \mathrm{Tr}(M_E) \otimes S'$. Assume for the sake of contradiction that $rk(T) < r$, so that S and S' are non-zero. Then the hook of $\mathrm{Tr}(M_E) \otimes S \simeq \mathrm{Tr}(M_E) \otimes S'$ is $h(\mathrm{Tr}(M_E)) + h(S) = h(\mathrm{Tr}(M_E)) + h(S')$. It follows that S and S' have the same hook h. Since they are pure Tate motives, they both contain a summand isomorphic to $\Lambda\{h\}$ and this contradicts the maximality of T.

So, we have proved that N and N' have the same higher Tate trace, and by Theorem 3.15, we get that $N \simeq N'$. □

Remark 3.23. Let D and D' be two division algebras of degree n. Assume the Brauer class of D' belongs to the subgroup of the Brauer group generated by the class of D. Then the projection $X_D \times X_{D'} \to X_D$ is a projective bundle, and for an arbitrary ring Λ, we have

$$M(X_D \times X_{D'}) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} M(X_D)\{i\} \text{ in } \operatorname{Mot}_F(\Lambda).$$

It follows that $M(X_D \times X_{D'}) \simeq M(X_D \times X_D)$ in $\operatorname{Mot}_F(\mathbb{Z})$. Applied to D and D' as in Remark 3.21, this shows that the Corollary 3.22 does not hold with coefficients in $\mathbb{Z}$. We also have $M(X_D \times X_D) \simeq M(X_D \times \mathbb{P}_F^{n-1})$ in $\operatorname{Mot}_F(\Lambda)$, hence, the domination conditions are necessary in Corollary 3.22.

4. Application to projective homogeneous varieties

Throughout this section, Λ is a finite local ring with residue field of characteristic p. As we already mentioned, the motive of a projective homogeneous variety under the action of an affine semi-simple algebraic group of p-inner type belongs to $\operatorname{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ([22, Thm. 3.5], [23, Thm. 1.1]). In this section, we explore consequences of Theorem 3.15 for those. Another benefit of working in the category generated by initial motives is that we may replace Λ by $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, as we proceed to show.

4.1. **Change of coefficients.** Recall Λ is a finite local ring, and its residue field $\bar{\Lambda}$ has characteristic p. The tensor product with $\overline{\Lambda}$ on Chow groups induce an additive change of coefficients functors

$$\mathit{coeff}_{\overline{\Lambda}/\Lambda} : \operatorname{Mot}_F \Lambda \longrightarrow \operatorname{Mot}_F \overline{\Lambda} \text{ and } \mathit{coeff}_{\overline{\Lambda}/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})} : \operatorname{Mot}_F(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{Mot}_F(\overline{\Lambda}).$$

We prove the following :

Proposition 4.1. *The change of coefficients induce functors*

$$\mathit{coeff}_{\overline{\Lambda}/\Lambda} : \operatorname{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda) \longrightarrow \operatorname{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\overline{\Lambda}) \text{ and } \mathit{coeff}_{\overline{\Lambda}/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})} : \operatorname{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\overline{\Lambda})$$

which preserve motivic decompositions and Tate traces, and induce a bijection between isomorphism classes of objects.

Proof. Let P be an indecomposable object in $\operatorname{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$ and consider the surjection of rings

$$f : \operatorname{End}(P) \longrightarrow \operatorname{End}(P) \otimes_\Lambda \overline{\Lambda} = \operatorname{End}\big(\mathit{coeff}_{\overline{\Lambda}/\Lambda}(P)\big).$$

Given a projector π in $\operatorname{End}\big(\mathit{coeff}_{\overline{\Lambda}/\Lambda}(P)\big)$, pick α in $\operatorname{End}(P)$ is such that $f(\alpha) = \pi$. As Λ is finite, and P is indecomposable, there is a power of α which is an idempotent of $\operatorname{End}(P)$, that is 0 or 1, see [22, Cor. 2.2]. Hence $\operatorname{End}(\mathit{coeff}_{\overline{\Lambda}/\Lambda}(P))$ is connected, that is 0 and 1 are its only idempotents, and it follows $\mathit{coeff}_{\overline{\Lambda}/\Lambda}(P)$ is indecomposable.

By definition, P is an initial motive, $P \simeq U_X\{i\}$ for some irreducible geometrically split variety X satisfying the nilpotence principle. The image of U_X in $\operatorname{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\overline{\Lambda})$ is an upper summand of $M(X)$, hence the upper motive of X, since it is indecomposable. Therefore, $\mathit{coeff}_{\overline{\Lambda}/\Lambda}(U_X\{i\})$ also is an initial motive. This already proves that $\mathit{coeff}_{\overline{\Lambda}/\Lambda}$ induces a functor between the subcategories generated by initial motives.

We claim that two initial motives are isomorphic with coefficients in Λ if and only if they are isomorphic with coefficients in $\overline{\Lambda}$. Let X and Y be two irreducible geometrically split varieties satisfying the nilpotence principle. A 0-cycle of degree 1 on the variety $Y_{F(X)}$ with coefficients in $\overline{\Lambda}$ lifts to a 0-cycle of degree $\delta \in \Lambda$ with $\bar{\delta} = 1$. Since Λ is local, δ is invertible, hence this provides a 0-cycle of degree 1 with coefficients in Λ. Therefore, the equivalence relations with coefficients in Λ and $\overline{\Lambda}$ are the same, and the claim follows by Lemma 3.13. Since the functor is additive and the Krull-Schmidt property holds in both categories, this proves the proposition for this functor.

We proceed in a similar way for the second change of coefficients. We first prove that $\mathit{coeff}_{\overline{\Lambda}/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})}(U_X\{i\})$ are indecomposable for all initial motives $U_X\{i\}$ in $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. The argument is borrowed from [10], where this is proved if X is projective homogeneous under the action of a group of p-inner type, using reduced Chow motives. We may assume $i = 0$; so consider the upper motive U_X of an irreducible geometrically split variety satisfying the nilpotence principle. Since U_X is defined by a projector of multiplicity 1, the multiplicity induces a ring homomorphism $\mathrm{mult}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} : \mathrm{End}(U_X) \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. As $\mathrm{End}(U_X)$ is local, the set $\mathcal{N}$ of its nilpotent elements is precisely the kernel of $\mathrm{mult}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$. It follows that we have a short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \otimes K \longrightarrow \mathrm{End}(\mathit{coeff}_{K/\mathbb{F}_p}(U_X)) \overset{\mathrm{mult}_K}{\longrightarrow} K \longrightarrow 0$$

with $\mathcal{N}\otimes K$ nilpotent. Now if $\pi \in \mathrm{End}(\mathit{coeff}_{K/\mathbb{F}_p}(U_X))$ is a projector, then $\mathrm{mult}_K(\pi)$ is either 0 or 1. We may replace π by $1-\pi$ and so assume that π has trivial multiplicity, which implies that π is nilpotent, hence trivial. It follows that $\mathit{coeff}_{K/\mathbb{F}_p}(U_X\{i\})$ is indecomposable, and it only remains to prove that the equivalence relations modulo $\overline{\Lambda}$ and modulo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ are the same. This comes from the fact that a 0-cycle of degree 1 with coefficients in $\overline{\Lambda}$ is a linear combination of closed points, with at least one of them of prime to p degree in $\mathbb{Z}$. □

Remark 4.2. In the above proposition, we actually prove that $\mathit{coeff}_{\overline{\Lambda}/\Lambda}(P)$ are indecomposable for all indecomposable motives in $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\Lambda)$. The same does not hold in general for $\mathit{coeff}_{\overline{\Lambda}/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})}$. An explicit counter-example using some Artin-Tate motives can be provided as in [10]: if L/F is a cubic Galois field extension, then $M\big(\mathrm{Spec}(L)\big)$ in $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ contains an indecomposable summand N with decomposable image $\mathit{coeff}_{\mathbb{F}_4/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}(N)$ in $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{KS}}(\mathbb{F}_4)$. In particular, this proves that $M(\mathrm{Spec}(L))$ does not belong to $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Note that the F-variety $\mathrm{Spec}(L)$ is a direct summand of the motive of a projective homogeneous variety under the action of the Weil restriction of $(\mathrm{PGL}_2)_L$, which is not a 2-inner group.

4.2. **Motives of projectives homogeneous varieties.** We now explore consequences of our main theorem in the setting of projective homogeneous varieties. Let G be semi-simple algebraic group over F, $T \subset G$ a maximal torus, and $\Delta(G)$ the Dynkin diagram of G. Its set of vertices, also denoted by $\Delta(G)$, is given by a set of simple roots of the root system of $G_{F_{sep}}$ with respect to $T_{F_{sep}}$. The absolute Galois group $\mathrm{Gal}(F) = \mathrm{Gal}(F_{sep}/F)$ acts on the Dynkin diagram $\Delta(G)$ via the $*$-action.

We assume G is of p-inner type, that is the $*$-action becomes trivial over a field extension of p-power degree.

A projective homogeneous variety X is a G-variety over F, isomorphic over a separable closure F_{sep} to a quotient $G_{F_{sep}}/P$ by a parabolic subgroup. Given a subset Θ of $\Delta(G)$, there is a parabolic subgroup P_Θ of $G_{F_{sep}}$ whose Levi component has Dynkin diagram $\Delta(G) \setminus \Theta$. Note that in the literature, there are two opposite conventions for parabolic subgroups of type Θ; here, a Borel subgroup has type $\Delta(G)$. The variety $G_{F_{sep}}/P_\Theta$ is defined over F if and only if Θ is $\mathrm{Gal}(F)$-invariant, leading to a bijection $\Theta \leftrightarrow X_{\Theta,G}$ between $*$-invariant subsets of $\Delta(G)$ and isomorphism classes of projective homogeneous varieties for G defined over F. For all such Θ, $M(X_{\Theta,G})$ belongs to $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$ if G is of p-inner type, by [23, Thm. 1.1]. Therefore, Theorem 3.15 applies to direct summands of such motives, and we get:

Corollary 4.3. *Let Λ be a finite local ring with residue field of characteristic p. Let X and X' be two projective homogeneous varieties, for some p-inner semisimple groups G and G' over F.*

Two direct summands M and M' of $M(X)$ and $M(X')$ are isomorphic in $\mathrm{Mot}_F(\Lambda)$ *if and only if their higher Tate traces are isomorphic.*

Remark 4.4. Corollary 4.3 extends to the case of projective pseudo-homogeneous varieties (that is, for non-reduced parabolic subgroups) by [35].

Assume that $M(X_{\Theta,G})$ is a pure Tate motive for some $\mathrm{Gal}(F)$-invariant subset $\Theta \subset \Delta(G)$. The Λ-module $\mathrm{Ch}(X_{\Theta,G})$ is free and the isomorphism class of $M(X_{\Theta,G})$ is determined by the *Poincaré polynomial*

$$P\big(M(X_{\Theta,G}), t\big) = \sum_{i \geq 0} a_i t^i,$$

where $a_i := \dim(\mathrm{Ch}_i(X_{\Theta,G}))$. The motive $M(X_{\Theta,G})$ being pure Tate, this polynomial is invariant under field extensions and equal to $P(M(X_{\Theta,G_{F_{sep}}}), t)$. Hence, it does not depend on the coefficient ring Λ and as explained in [30], it is described solely through the Weyl group of G and the length function; we thus call it the Poincaré polynomial of $X_{\Theta,G_{F_{sep}}}$. The next corollary applies, notably but not exclusively, to varieties of Borel subgroups of a semi-simple group of inner type.

Corollary 4.5. *Let Λ be a finite local ring with residue field of characteristic p. Consider a G-projective homogeneous variety X and a G'-projective homogeneous variety X', where G and G' are of inner type. We assume in addition that $G_{F(X)}$ and $G'_{F(X')}$ are split. The following are equivalent :*

(i) The motives of X and X' are isomorphic in $\mathrm{Mot}_F(\Lambda)$*;*
(ii) The Poincaré polynomials of $X_{F_{sep}}$ and $X'_{F_{sep}}$ are equal and for all field extensions E/F, G_E is split over a prime to p extension of E if and only if G'_E is split over a (possibly different) prime to p extension of E.

Proof. As G and G' are of inner type, both $M(X)$ and $M(X')$ belong to $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$ [22]. Moreover, since $G_{F(X)}$ is split, X is generically split, and for all field extensions E/F, the motive $M(X_E)$ is either anisotropic or a pure Tate motive. By Proposition 4.1, we may assume $\Lambda = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Hence, $M(X_E)$ is a pure Tate motive if and only if X_E is isotropic with coefficients in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, or equivalently, G_E is split by a prime-to-p field extension. Indeed, if L/E a field extension of prime-to-p degree such that X_L has a rational point, then the extension $L(X)/L$ is purely transcendental, and thus G splits over L. The converse is obvious. These assertions also hold for X', and with this in hand, we prove the corollary as follows.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Assuming $M(X)$ and $M(X')$ are isomorphic, the Poincaré polynomials $P(X_{F_{sep}}, t)$ and $P(X'_{F_{sep}}, t)$ are clearly equal and the upper motives of X and X' are isomorphic. So X and X' are equivalent with coefficients in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, and for all field extensions E/F, X_E is isotropic with coefficients in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ if and only if X'_E also is. The conclusion follows by the previous observations.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Let E/F be a field extension. The second part of condition (ii) guarantees that $M(X_E)$ and $M(X'_E)$ are both anisotropic or both pure Tate motives. If they are pure Tate motives, they are isomorphic since they have the same Poincaré polynomial. The motives $M(X)$ and $M(X')$ are thus isomorphic by Theorem 3.15, as their higher Tate traces are isomorphic. □

Remark 4.6. If G, G' are inner forms of the same quasi-split group and X and X' are of the same type, we may drop the assumption on the Poincaré polynomials of $X_{F_{sep}}$ and $X'_{F_{sep}}$. This applies for instance to Severi-Brauer varieties of the same dimension, or varieties of Borel subgroups for two semi-simple groups of the same type and rank.

Example 4.7. Let G be a semisimple group of type G_2 (for instance, the automorphism group of a Cayley algebra [29, §31]) and set $p = 2$. The projective homogeneous varieties $X_{\{1\},G}$ and $X_{\{2\},G}$ both have Poincaré polynomial $\sum_{i=0}^{5} t^i$ over F_{sep}. Furthermore, both are generically split by [11, Proposition 9] and are isotropic over a field extension E/F if and only if G_E is split by an odd degree field extension of E. By Corollary 4.5, the motives $M(X_{\{1\},G})$ and $M(X_{\{2\},G})$ are thus isomorphic in $\mathrm{Mot}_F(\Lambda)$ with coefficients in any finite local ring with residue field of characteristic 2. This was originally noticed by Bonnet [5].

Assorted with the description of the Tits p-indexes of semisimple groups, Corollary 4.5 produces numerous motivic isomorphisms through cohomological invariants of semisimple groups (see [11, Def. 4, §IV.3] for the definitions of the invariants $b(.)$ and $f_3(.)$).

Corollary 4.8. *Let Λ be a finite local ring with residue field of characteristic p. Assume that G and G' are of the same below types and that X, X' are anisotropic projective homogeneous varieties of the same type for G and G', respectively.*

- *(F_4, $p = 3$ or E_8, $p = 5$) $M(X) \simeq M(X')$ if and only if $b(G)$ and $b(G')$ generate the same subgroup of $H^3(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(2))$;*
- *(G_2, $p = 2$) $M(X) \simeq M(X')$ if and only if G and G' are isomorphic;*
- *($^1E_6$, $p = 2$) $M(X) \simeq M(X')$ if and only if $f_3(G) = f_3(G')$;*
- *(E_7, $p = 3$) $M(X) \simeq M(X')$ if and only if $b(G) = \pm b(G') \in H^3(F, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}(2))$.*

Proof. As X and X' are of the same type, the Poincaré polynomials of $X_{F_{sep}}$ and $X'_{F_{sep}}$ are equal. Furthermore the analysis of the Tits p-indexes of [11] shows that in all the case considered, $G_{F(X)}$ and $G'_{F(X')}$ are split.

Corollary 4.5 thus states that $M(X)$ and $M(X')$ are isomorphic if and only if for any field extension E/F, G_E is split by a prime-to-p field extension if and only if G'_E is split by a (possibly different) prime-to-p extension. The result boils down to cohomological characterizations of this property given in [11], namely Corollary 10 for types G_2, F_4 and E_8; Corollary 14 for type ${}^1E_6$ and Proposition 15 for type E_7. □

4.3. **Motivic equivalence of semisimple algebraic groups.** The Tits index of a semisimple algebraic group G over F is a fundamental invariant, which describes the isotropy of G. For classical groups, it encompasses classical invariants of algebraic structures over fields, such as the Schur index of central simple algebras or the Witt index of quadratic forms. It has been known for a while that the isomorphism classes of motives of G-projective homogeneous varieties determine the Tits-index of G, up to prime-to-p base change. The main result of [9] provides a converse. Theorem 4.12 below generalizes this result. The proof, based on Theorem 3.15, is independant of [9].

We use the same notations as in [11, §I.1]. In particular, $\Delta(G)$ denotes the Dynkin diagram of G as well as its set of vertices. The distinguished vertices form a subset denoted by $\delta_0(G)$. It consists of a union of orbits for the $*$-action; more precisely, an orbit $\Theta \subset \Delta(G)$ is distinguished if and only if projective homogeneous varieties of type Θ have a rational point. Hence, $\delta_0(G)$ is empty when G is anisotropic, and coincides with $\Delta(G)$ when G is quasi-split.

Definition 4.9. Let G and G' be semisimple algebraic groups over a field F, which are inner forms of the same quasi-split group. We say that G and G' are motivic equivalent with coefficients in Λ if there is an isomorphism of diagrams

$$\varphi : \Delta(G) \longrightarrow \Delta(G'),$$

compatible with the $*$-actions, such that for any $Gal(F_{sep}/F)$-invariant subset Θ of $\Delta(G)$, the motives $M(X_{\Theta,G})$ and $M(X_{\varphi(\Theta),G'})$ are isomorphic with coefficients in Λ.

Example 4.10. Given two central simple algebras A and A' of the same dimension and setting $\varphi = id$, the groups $SL(A)$ and $SL(A')$ are motivic equivalent with coefficients in Λ if and only if for any sequence of integers $d_1 < ... < d_k$, the motives of the varieties of flags of right ideals in A and A' of reduced dimensions $d_1, .., d_k$ are isomorphic in $\mathrm{Mot}_F(\Lambda)$. The same holds for special orthogonal groups associated to quadratic forms of the same dimension, replacing flags of ideals by flags of isotropic subspaces.

Motivic equivalence of semisimple algebraic groups aims at giving a classification of these with respect to the motives of their respective projective homogeneous varieties. In the view of Corollary 4.3, these motives are determined up to isomorphism by their higher Tate trace. Isotropy of semisimple groups is controlled by the Tits indexes but in order to prove results in $\mathrm{Mot}_F(\Lambda)$, one should rather consider their values over p-special fields, the Tits p-indexes.

A field is p-special if any of its finite extension has degree a power of p. For any field F there is a p-special closure of F, that is a minimal p-special field extension F_p/F. The p-special closures of F are algebraic over F and isomorphic [13, §101.B]. The Tits p-index of a semisimple algebraic group G over F is defined as the Tits index of G_{F_p}, where F_p is a p-special closure of F. The admissible values of the Tits p-indexes over fields are determined in [11].

Lemma 4.11. *Let $M \in \mathrm{Mot}^{\mathrm{I}}_F(\Lambda)$ and F_p/F be a p-special closure of F. The Tate trace of M is isomorphic over F_p to the Tate trace of M_{F_p}.*

Proof. As M is isomorphic to a direct sum of initial motives, the result boils down to showing that a variety X over F has a 0-cycle of prime-to-p degree if and only if X_{F_p} has a rational point.

Assume that X_{F_p} has a rational point x. Replacing X_{F_p} by an affine open subscheme containing x, we may assume that $X_{F_p} = \mathrm{Spec}(A_{F_p})$ for some finitely generated F-algebra A so that x corresponds to a morphism $A_{F_p} \longrightarrow F_p$ of F-algebras. The image of A is a finite F-algebra contained in F_p, hence a finite field extension L of F. The variety X_L has a rational point, and by definition of p-special closure, L/F is of prime-to-p degree, giving rise to the needed 0-cycle on X. The converse is obvious. □

In particular, if M and N in $\mathrm{Mot}^{\mathrm{I}}_F(\Lambda)$ have isomorphic Tate traces after scalar extension to a p-special closure of F, they already have isomorphic Tate traces over F. We now prove the main result of this section:

Theorem 4.12. *Let G and G' be semisimple algebraic groups over a field F, which are inner twisted forms of the same quasi-split group of p-inner type. Let Θ_0 be a Galois-invariant subset of $\Delta(G)$, and consider an isomorphism of Dynkin diagrams*

$$\varphi : \Delta(G) \longrightarrow \Delta(G'),$$

compatible with the $*$-actions. The following are equivalent:

(i) *For any projective homogeneous variety $X_{\Theta,G}$ with $\Theta \supset \Theta_0$, the motives $M(X_{\Theta,G})$ and $M(X_{\varphi(\Theta),G'})$ are isomorphic in $\mathrm{Mot}_F(\Lambda)$.*

(ii) *For any p-special field extension E/F, Θ_0 is distinguished in $\Delta(G_E)$ if and only if $\varphi(\Theta_0)$ is distinguished in $\Delta(G'_E)$. Moreover, when this holds, φ induces a bijection between $\delta_0(G_E)$ and $\delta_0(G'_E)$.*

Proof. $(i) \Rightarrow (ii)$ By assumption the motives $M(X_{\Theta_0,G})$ and $M(X_{\varphi(\Theta_0),G'})$ are isomorphic, hence so are $M(X_{\Theta_0,G_E})$ and $M(X_{\varphi(\Theta_0),G'_E})$ for all field extensions E/F. It follows their upper motives are isomorphic. This holds with coefficients in Λ, hence also with coefficients in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ by Proposition 4.1. For any field extension E/F, X_{Θ_0,G_E} thus has a 0-cycle of prime-to-p degree if and only if $X_{\varphi(\Theta_0),G'_E}$ as well. For p-special E/F, this corresponds to these varieties having a rational point and Θ_0 is distinguished for $\Delta(G_E)$ if and only if $\varphi(\Theta_0)$ is for $\Delta(G'_E)$.

Assume now that E/F is a p-special field and Θ_0 is distinguished in $\Delta(G_E)$, which means $\delta_0(G_E)$ contains Θ_0. With the same reasoning as above, assumption (i) with $\Theta = \delta_0(G_E)$ implies that $\varphi(\delta_0(G_E))$ is distinguished in $\Delta(G'_E)$, therefore $\varphi(\delta_0(G_E)) \subset \delta_0(G'_E)$.

Now, we showed that $\varphi(\Theta_0)$ is distinguished in $\Delta(G'_E)$; that is $\varphi(\Theta_0)$ is contained in $\delta_0(G'_E)$. The subset $\varphi^{-1}(\delta_0(G'_E))$ contains Θ_0, so we may apply assumption (i) with $\Theta = \varphi^{-1}(\delta_0(G'_E))$. We get that $\varphi^{-1}(\delta_0(G'_E)) \subset \delta_0(G_E)$, whence $\delta_0(G'_E) = \varphi(\delta_0(G_E))$. The isomorphism φ then identifies the Tits indexes of G_E and G'_E.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Let Θ be a $\mathrm{Gal}(F)$-invariant subset of $\Delta(G)$ containing Θ_0. We now show that the higher Tate traces of $X_{\Theta,G}$ and $X_{\varphi(\Theta),G'}$ are isomorphic. By Lemma 4.11, we only need to work over p-special fields containing F.

Let E/F be a p-special field. Since Θ contains Θ_0, if Θ is distinguished in $\Delta(G_E)$, then Θ_0 also is and the second part of condition (ii) holds. Therefore, Θ is contained in $\delta_0(G_E)$ if and only if $\varphi(\Theta)$ is contained in $\delta_0(G'_E)$, that is X_{Θ,G_E} has a rational point if and only if $X_{\varphi(\Theta),G'_E}$ also does. Since E is p-special, having a rational point is equivalent to being isotropic modulo p and we get that the varieties X_{Θ,G_E} and $X_{\varphi(\Theta),G'_E}$ have non-trivial Tate traces over the same p-special fields E/F.

We now proceed by induction on the common rank of G and G' (that is, the number of vertices of their Dynkin diagrams). If G and G' are of rank 0, the result is obvious. Let E/F be a p-special field extension such that X_{Θ,G_E} has a rational point. From Chernousov, Gille, Merkurjev motivic decompositions of isotropic projective homogeneous varieties (see [7], [6, Theorem 7.4]), there is an isomorphism

$$M(X_{\Theta,G_E}) \simeq \bigoplus_{\delta} M(Z_{\delta,G_{E,\Theta}})\{l(\delta)\}$$

where $G_{E,\Theta}$ is the semisimple part of a Levi component of G_E associated to Θ, the δ's are the orbits for the $*$-action on minimal length cosets representatives for some double cosets of the Weyl group of G, and $l(.)$ is the length. This data is uniquely determined by the combinatorics of G and does not depend on the choice of a set of simple roots of G.

The semisimple algebraic groups $G_{E,\Theta}$ and $G'_{E,\varphi(\Theta)}$ are inner forms of the same quasisplit group: their Dynkin diagrams, together with the $*$-actions, are obtained from the ones of G and G' by removing the subsets Θ, $\varphi(\Theta)$, respectively. By assumption (ii), for any p-special field extension K/E, φ thus identifies the Tits indexes of G_K and G'_K. Induction hypothesis with $\Theta_0 = \emptyset$ then gives that $G_{E,\Theta}$ and $G'_{E,\Theta}$ are motivic equivalent with coefficients in Λ, so that

$$M(X_{\Theta,G_E}) \simeq \bigoplus_{\delta} M(Z_{\delta,G_{E,\Theta}})\{l(\delta)\} \simeq \bigoplus_{\delta} M(Z_{\delta,G'_{E,\varphi(\Theta)}})\{l(\delta)\} \simeq M(X_{\varphi(\Theta),G'_E}).$$

It follows from this isomorphism that X_{Θ,G_E} and $X_{\varphi(\Theta),G'_E}$ have isomorphic Tate traces for all p-special fields E/F. Casting Theorem 3.15, the motives of $X_{\Theta,G}$ and $X_{\varphi(\Theta),G'}$ are isomorphic as well. $\square$

In the special case $\Theta_0 = \emptyset$, we get the following statement, which is a reformulation of [9, Thm. 16].

Corollary 4.13. *Two semisimple algebraic groups G and G', inner forms of the same quasi-split group of p-inner type, are motivic equivalent with coefficients in Λ relatively to an isomorphism of $\varphi : \Delta(G) \longrightarrow \Delta(G')$ if and only if φ induces an isomorphism between the Tits indexes of G_E and G'_E, for any p-special field extension E/F.*

5. Partial p-splitting fields and Motivic splitting patterns

Throughout this section, Λ is a finite local ring and p is the characteristic of its residue field. Theorem 3.15 states that two motives of $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$ are isomorphic if they have isomorphic Tate traces over all field extensions of the base field. In this section, we prove that it is enough to compare Tate traces over a finite set of function fields. We also define a motivic version of the splitting pattern for motives of projective homogeneous varieties.

Definition 5.1. Let M be a motive in $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$ and write $M \simeq \sum_{k=1}^{r} U_{X_k}\{i_k\}$ as a direct sum of initial motives. The function fields $F(X_1), ..., F(X_r)$ are called partial p-splitting fields of the motive M, and we say that the set $\mathcal{C} = \{F(X_1), ..., F(X_r)\}$ is a partial p-splitting family of M.

By Lemma 3.13, given two partial p-splitting families $\mathcal{C} = \{F(X_1), ..., F(X_r)\}$ and $\mathcal{C}' = \{F(Y_1), ..., F(Y_r)\}$ of a motive M, and renumbering one of them if necessary, we may assume that X_i and Y_i are equivalent with coefficients in Λ for all $1 \leq i \leq r$.

Example 5.2. Let X be a projective homogeneous variety, for a semisimple algebraic group G of p-inner type. Fix a field extension E/F such that G_E is of inner type. By [23, Thm 1.1], the motive $M(X) \in \mathrm{Mot}_F(\Lambda)$ has a p-splitting family given by function fields of some corestrictions of projective G_L-homogeneous varieties, for several $E/L/F$.

We now prove that Tate traces over partial p-splitting fields detect isomorphisms in $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$.

Proposition 5.3. *Given two objects M and N in $\mathrm{Mot}_F^{\mathrm{I}}(\Lambda)$, the following assertions are equivalent:*

(a) the motives M and N are isomorphic;
(b) M and N have isomorphic Tate traces over all partial p-splitting fields of M and all partial p-splitting fields of N;
(c) there is a p-splitting family $\mathcal{C}_M$ of M and a p-splitting family $\mathcal{C}_N$ of N such that M and N have isomorphic Tate traces over all fields in $\mathcal{C}_M \cup \mathcal{C}_N$.

Proof. The outline of the proof is the same as for Theorem 3.15. The implications $(a) \Rightarrow (b)$ and $(b) \Rightarrow (c)$ are clear and we only need to prove that $(c) \Rightarrow (a)$. We proceed by induction on the maximum of the rank of M and the rank of N. Assume condition (c) holds for some partial p-splitting families $\mathcal{C}_M$ and $\mathcal{C}_N$ given by the direct sums $M \simeq \sum_{k=1}^{r} U_{X_k}\{i_k\}$ and $N \simeq \sum_{\ell=1}^{s} U_{Y_\ell}\{j_\ell\}$. We may assume the summands are ordered by increasing hooks, so that $h(M) = i_1$ and $h(N) = j_1$. Since M contains a summand isomorphic to $\Lambda\{i_1\}$ over the field $F(X_1)$ which belongs to $\mathcal{C}_M$, condition (c) guarantees that $h(N) = j_1 \leq i_1$. Using a similar process with $F(Y_1)$, we get that M and N have the same hook and we may assume it is equal to 0. By the same argument as in the proof of Theorem 3.15, where we only compared Tate traces over fields that belong to $\mathcal{C}_M \cup \mathcal{C}_N$, we may write $M \simeq U_{X_k} + M'$ and $N \simeq U_{Y_\ell} + N'$, with $U_{X_k} \simeq U_{Y_\ell}$. The motives M' and N' have partial p-splitting families contained in $\mathcal{C}_M$ and $\mathcal{C}_N$ and we conclude by induction. □

For projective homogeneous varieties, we get the following by Example 5.2.

Corollary 5.4. *Let X and Y be two projective homogeneous varieties for p-inner semisimple groups G and G', respectively. Let M be a direct summand of $M(X)$ and N be a direct summand of $M(Y)$ in $\mathrm{Mot}_F(\Lambda)$. Fix a minimal field extension E/F such that both G_E and G'_E are of inner type.*

The motives M and N are isomorphic if and only if their Tate traces are isomorphic over the function fields of the corestrictions to F of projective homogeneous varieties for G_L and G'_L, for all intermediate field extensions $E/L/F$.

Remark 5.5. The family of fields considered in the corollary is not minimal; but its definition depends only on the groups G and G', and not on a decomposition of M and N as direct sums of indecomposable summands.

Recall that the splitting pattern of a quadratic form q over F is defined as the set of values taken by the Witt index of q over all field extensions, see [16], [13, §25]. It is thus a finite set of integers, bounded by half the dimension of q. As shown by Knebusch [28], the splitting pattern of q is obtained considering a *generic splitting tower* of q. More precisely, the splitting pattern is equal to the set of Witt indices $\{i_w(q_{F_0}), \dots, i_w(q_{F_h})\}$, where $F_0 = F$, for $i \geq 1$, F_i is the function field of the anisotropic part of $q_{F_{i-1}}$ and h is the height of q, that is the smallest integer such that q_{F_h} has anisotropic part of dimension at most 1.

We define a motivic version of the splitting pattern for projective homogeneous varieties and their direct summands as follows:

Definition 5.6. Let X be a projective homogeneous variety for some p-inner semisimple group G and let M be a direct summand of $M(X)$ in $\mathrm{Mot}_F(\Lambda)$. We say that a pure Tate motive T belongs to the splitting pattern of M if there is a field extension K/F such that T_K is isomorphic to the Tate trace of M_K. The set of such pure Tate motives is the motivic splitting pattern of M.

Example 5.7. Let Q be a projective quadric defined by a $2m$ dimensional quadratic form q. In view of Example 3.7, the motivic splitting pattern of Q with coefficients in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ consists of the pure Tate motives

$$\sum_{k=0}^{i-1}\Big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\{k\} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\{2m-2-k\}\Big),$$

where i runs through the (classical) splitting pattern of q.

The motivic splitting pattern of M may be described using partial p-splitting fields, as we now proceed to show.

Let M be a direct summand of the motive of a projective homogeneous variety over F for a p-inner semisimple group G, with coefficients in Λ. Fix a p-splitting family $\mathcal{C}_M = \{F(X_1^0), ..., F(X_{r_0}^0)\}$ of M, where the varieties X_k^0 are corestrictions of projective G_L-homogeneous varieties (see Example 5.2).

If M is not a pure Tate motive, there exists an integer k_0 such that $X_{k_0}^0$ is anisotropic with coefficients in Λ. The Tate trace of the motive $M_{F(X_{k_0}^0)}$ has greater rank than the Tate trace of M. Write $\mathcal{C}_{M_{F(X_{k_0}^0)}} = \{F(X_1^1), ..., F(X_{r_1}^1)\}$ for a p-splitting family of $M_{F(X_{k_0}^0)}$. If $M_{F(X_{k_0}^0)}$ is not pure Tate, we pick again an anisotropic $X_{k_1}^1$ and extend scalars to $F(X_{k_1}^1)$. After a finite number of such field extensions, the motive M becomes a pure Tate motive, as the rank of the Tate trace increases at each step. The corresponding sequence of field extensions

$$F \hookrightarrow F(X^0_{k_0}) \hookrightarrow F(X^1_{k_1}) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow F(X^s_{k_s})$$

is called a splitting tower of M.

Remark 5.8. Let Q be a projective quadric, defined by a quadratic form q. Assume q is non-split, and denote by Q_{an} the quadric defined by its anisotropic part. By [34], see also Example 3.7, the motive $M(Q)$ contains a shift of $M(Q_{\mathrm{an}})$, hence of its upper motive $U_{Q_{\mathrm{an}}}$, as a direct summand. Therefore, we may take $X^0_{k_0} = Q_{\mathrm{an}}$ in the process above. Iterating the process, this proves that the generic splitting tower of q introduced by Knebusch in [28] is a splitting tower for the motive $M(Q)$.

Proposition 5.9. *Let G be a p-inner semisimple group and X a projective G-homogeneous variety. Consider a direct summand M of the motive $M(X)$ in $\mathrm{Mot}_F(\Lambda)$. A pure Tate motive T belongs to the motivic splitting pattern of M if and only if T_E is isomorphic to the Tate trace of M_E, for some field extension E/F appearing in a splitting tower of M.*

Proof. We proceed by induction on the anisotropic rank of M, that is the integer $\mathrm{rk}(M) - \mathrm{rk}\big(\mathrm{Tr}(M)\big)$. If this is 0, M is a pure Tate motive, $\mathrm{Tr}(M)$ is the only element in the motivic splitting pattern of M and we may take $E = F$. Assume now that $\mathrm{rk}(M) > \mathrm{rk}\big(\mathrm{Tr}(M)\big)$ and consider a pure Tate motive T which is in the motivic splitting pattern of M. If $T = \mathrm{Tr}(M)$, again we may take $E = F$, so we assume T has rank strictly larger than $\mathrm{Tr}(M)$. By definition of the motivic splitting pattern, $\mathrm{Tr}(M_K)$ is isomorphic to T_K for some field extension K/F. Consider a p-splitting family of M, $\mathcal{C}_M = \{F(X^0_1), \ldots, F(X^0_{r_0})\}$, consisting of corestrictions of projective homogeneous varieties given by a decomposition of M as a direct sum of indecomposable summands $M = \sum_{k=1}^{r_0} U_{X^0_k}\{i_k\}$. Since $\mathrm{Tr}(M_K)$ has rank strictly larger than $\mathrm{Tr}(M)$, there is an integer k_0 such that $X^0_{k_0}$ is anisotropic and becomes isotropic over K, with coefficients in Λ. As G is p-inner, we may write $X^0_{k_0}$ as a corestriction $\mathrm{corr}_{L/F}(X)$ for some projective G_L-homogeneous variety X, with respect to a finite separable extension L/F of degree a power of p. Consider the following diagram of fields

$$\begin{tikzcd}
 & K_p(X^0_{k_0}) & \\
 & & K_p \arrow[ul] \\
F(X^0_{k_0}) \arrow[uur] & & K \arrow[u] \\
 & F \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

where K_p denotes the p-special closure of K. Since $X^0_{k_0}$ is isotropic over K, it has a rational point over its p-special closure K_p. The L-variety X thus has a rational point over K_p and $K_p(X^0_{k_0})$ is purely transcendental over K_p, by [27, Thm. 3.10]. Therefore, the Tate trace of M is preserved under this extension, and combining with Lemma 4.11, we get that $\mathrm{Tr}(M_{K_p(X^0_{k_0})}) = T_{K_p(X^0_{k_0})}$. In particular, T belongs to the splitting pattern of $M_{F(X^0_{k_0})}$. We get by induction a field extension $E/F(X^0_{k_0})$ appearing in a splitting tower of $M_{F(X^0_{k_0})}$ such that T_E is isomorphic to the Tate trace of M_E. Completing this tower of extensions with $F(X^0_{k_0})/F$, E belongs to a splitting tower of M as well. □

References

[1] S. A. Amitsur, Generic Splitting Fields of Central Simple Algebras, Annals of Mathematics, Second Series, volume 62, no. 1, 8–43, 1955.

[2] H. Bass, Algebraic K-theory. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968.

[3] T. Bachmann, On the invertibility of motives of affine quadrics, Doc. Math. 22, 363-395, 2017.

[4] T. Bachmann and A. Vishik, Motivic equivalence of affine quadrics, Math. Annalen, 371, No.1, 741-751, 2018.

[5] J.-P. Bonnet, A motivic isomorphism between two projective homogeneous varieties under the action of a group of type G_2 (French). Doc. Math. 8, 247–277 (2003).

[6] P. Brosnan, On motivic decompositions arising from the method of Białynicki-Birula, Invent. Math. 161, No. 1, 91–111, 2005.

[7] V. Chernousov, S. Gille and A. Merkurjev, Motivic decomposition of isotropic projective homogeneous varieties. Duke Math. J. 126, No. 1, 137-159 (2005).

[8] V. Chernousov and A. Merkurjev, Motivic decompositions of projective homegeneous varieties and the Krull-Schmidt theorem. Transformation Groups 11, no. 3, 371-386, 2006.

[9] C. De Clercq, Équivalence motivique des groupes semi-simples, Compositio Mathematica 153, Issue 10, 2195-2213, 2017.

[10] C. De Clercq, Motivic decompositions of projective homogeneous varieties and change of coefficients, C. R., Math., Acad. Sci. Paris 348, No. 17-18, 955-958, 2010.

[11] C. De Clercq and S. Garibaldi, Tits p-indexes of semisimple algebraic groups, Journal of the London Mathematical Society, 95, Issue 2, 567-585, 2017.

[12] C. De Clercq, A. Quéguiner and M. Zhykhovich, Critical varieties and motivic equivalence for algebras with involution, Trans. Am. Math. Soc. 375, No. 11, 7529–7552, 2022.

[13] R. Elman, N. Karpenko and A. Merkurjev, The algebraic and geometric theory of quadratic forms, American Mathematical Society Colloquium Publications 56, 2008.

[14] S. Garibaldi, V. Petrov, N. Semenov, Shells of twisted flag varieties and the Rost invariant, Duke Math. J. 165, no. 2, 285-339, 2016.

[15] P. Gille and T. Szamuely, Central simple algebras and Galois cohomology, Cambridge studies in advanced mathematics 101, 2006.

[16] Hurrelbrink J. and Rehmann U, Splitting Patterns of Quadratic Forms. Math.Nachr. 176, 111-127, 1995.

[17] B. Kahn, Formes quadratiques et cycles algébriques, dans Séminaire Bourbaki : volume 2004/2005, exposés 938-951, Astérisque, no. 307, Exposé no. 941, pp. 113-163, 2006.

[18] N. Karpenko, On anisotropy of orthogonal involutions. J. Ramanujan Math. Soc. 13, No. 1, 1-22, 2000.

[19] N. Karpenko, Criteria of motivic equivalence for quadratic forms and central simple algebras, Math. Ann. 317, 585-611, 2000.

[20] N. Karpenko, Cohomology of relative cellular spaces and isotropic flag varieties, St. Petersburg Math. J. 12, no. 1, 1-50, 2001.

[21] N. Karpenko, Canonical dimension, Proceedings of the ICM 2010, vol. II, 146–161.

[22] N. Karpenko, Upper motives of algebraic groups and incompressibility of Severi-Brauer varieties, J. Reine Angew. Math. 677, 179–198, 2013.

[23] N. Karpenko, Upper motives of outer algebraic groups. In Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology, vol. 18 of Dev. Math. Springer, New York, 249–258, 2010.

[24] N. Karpenko, On the first Witt index of quadratic forms. Invent. Math. 153, no. 2, 455-462, 2003.

[25] N. Karpenko and A. Merkurjev, Essential dimension of quadrics, Invent. Math. 153, no. 2, 361-372, 2003.

[26] N. Karpenko and M. Zhykhovich, Isotropy of unitary involutions. Acta Math. 211, no. 2, 227-253, 2013.

[27] I. Kersten, U. Rehmann, Generic splitting of reductive groups, Tohoku Mathematical Journal 46, 35-70, 1994.
[28] M. Knebusch, Generic splitting of quadratic forms, I, Proc. London Math. Soc. 33, 65-93, 1976.
[29] M. Knus, A. Merkurjev, M. Rost and J.-P. Tignol., The book of involutions, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
[30] B. Köck, Chow motive and higher Chow theory of G/P. Manuscrip. Math. 70, no. 4, 363-372 (1991).
[31] S. Nikolenko, N. Semenov, K. Zainoulline, Motivic decomposition of anisotropic varieties of type F_4 into generalized Rost motives, J. of K-theory 3, no. 1, 85-102, 2009.
[32] V. Petrov, N. Semenov, Generically split projective homogeneous varieties, Duke Math. J. 152, No. 1, 155-173, 2010.
[33] V. Petrov, N. Semenov, K. Zainoulline, J-invariant of linear algebraic groups, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 41, 1023-1053, 2008.
[34] M. Rost, The motive of a Pfister form. Preprint.
[35] S. Srinivasan, Motivic decomposition of projective pseudo-homogeneous varieties, Transform. Groups 22, No. 4, 1125-1142 2017; correction ibid. 24, No. 4, 1309-1311, 2019.
[36] A. Vishik, Motives of quadrics with applications to the theory of quadratic forms. Lecture Notes in Math. 1835, Proceedings of the Summer School "Geometric Methods in the Algebraic Theory of Quadratic Forms" Lens 2000, 25–101, 2004.
[37] A. Vishik, Isotropic motives, J. Inst. Math. Jussieu 21, No. 4, 1271-1330, 2022.
[38] A. Vishik, Fields of u-invariant $2^r + 1$, Algebra, Arithmetic and Geometry - In Honor of Yu.I.Manin", Birkhauser, 661-685, 2010.
[39] V. Voevodsky, Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$ coefficients, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 98, 59–104, 2003.

Université Sorbonne Paris Nord, Intitut Galilée, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, Villetaneuse, France.
Email address: `declercq@math.univ-paris13.fr`

Université Sorbonne Paris Nord, Intitut Galilée, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, Villetaneuse, France.
Email address: `queguin@math.univ-paris13.fr`