Nom :

Prénom :

Sup'Galilée 12/09/2017

Etudiants ingénieurs apprentis $1^{\text{ère}}$ année

Controle continu 1 (sujet 1)

durée : 20 minutes

Le sujet comporte deux pages

Exercice 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

1. La fonction $x \mapsto e^{2\ln x}$ est définie sur $[0, +\infty]$.

   Correction : Faux. La fonction $x \mapsto e^{2\ln x}$ n'est pas définie en 0 car la fonction $x \to \ln x$ n'est pas définie en 0

2. La fonction $x \mapsto \sin(x^3)$ est paire.

   Correction : Faux. La fonction $f(-x) = \sin((-x)^3) = \sin(-x^3) = -\sin(x^3) \neq f(x)$.

Exercice 2 : calcul de limites

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \sin x}{x^2 + 3}$

Correction : On pose $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2+3}$. Puisque $-1 \leq \sin x \leq 1$ (pour tout nombre réel x), on a, pour tout $x > 0$,

$$-\frac{x}{x^2+3} \leq f(x) \leq \frac{x}{x^2+3}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \pm\frac{x}{x^2+3} = 0$ (limite à l'infini des fonctions rationnelles). En appliquant le théorème des gendarmes, on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+3} = 0.$$

□

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

Correction : On pose $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$. Pour $x > 0$, on a

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = 0$.

Exercice 3

Soit s la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$s(x) = x^2 cos(x) + 2x - 1 \quad \text{pour tout } x \text{ appartenant à } [0, \pi].$$

Construire une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

- $f(x) = a_1x + b_1$ pour tout $x < 0$,
- $f(x) = s(x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$,
- $f(x) = a_2x + b_2$ pour tout $x > \pi$.

Correction : On a $s'(x) = 2x\cos x - x^2 \sin x + 2$. Donc

$$s(0) = -1 \quad s(\pi) = -\pi^2 + 2\pi - 1 \quad s'(0) = 2 \quad s'(\pi) = -2\pi + 2$$

En imposant la continuité de f et de sa dérivé en 0, on trouve

$$b_1 = -1 \quad a_1 = 2.$$

Puis, en imposant la continuité de f et de sa dérivé en pi, on trouve

$$a_2\pi + b_2 = -\pi^2 + 2\pi - 1 \quad a_2 = -2\pi + 2$$

ce qui donne

$$b_2 = \pi^2 - 1.$$

□