Nom :

Prénom :

Sup'Galilée 12/09/2017

Etudiants ingénieurs apprentis $1^{\text{ère}}$ année

Controle continu 1 (sujet 2)

durée : 20 minutes

Le sujet comporte deux pages

Exercice 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

1. La fonction $x \mapsto e^{2\sqrt{x}}$ est définie sur $[0, +\infty]$.

   Correction : Vrai. En effet la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction $X \mapsto e^X$ est définie sur $\mathbb{R}$. □

2. La fonction $x \mapsto \sin(|x|)$ est paire.

   Correction : Vrai. En effet, si on pose $f(x) = \sin(|x|)$, on a $f(-x) = \sin(|-x|) = \sin|x| = f(x)$. □

Exercice 2 : calcul de limites

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{x^2 + 3}$

Correction : On pose $f(x) = \frac{x\sin x}{x^2+3}$. On a $\lim_{x\to 0} x^2+3 = 3$, et $\lim_{x\to 0} x\sin x = 0$. Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

Correction : On pose $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$. Pour $x > 0$, on a

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x = 0$.

Exercice 3

Soit s la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par

$$s(x) = x^2 cos(x) + 2x - 1 \quad \text{pour tout } x \text{ appartenant à } [0, 2\pi].$$

Construire une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

- $f(x) = a_1 x + b_1$ pour tout $x < 0$,
- $f(x) = s(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$,
- $f(x) = a_2 x + b_2$ pour tout $x > 2\pi$.

Correction : On a $s'(x) = 2x\cos x - x^2 \sin x + 2$. Donc

$$s(0) = -1 \quad s(2\pi) = 4\pi^2 + 4\pi - 1 \quad s'(0) = 2 \quad s'(2\pi) = 4\pi + 2$$

En imposant la continuité de f et de sa dérivé en 0, on trouve

$$b_1 = -1 \quad a_1 = 2.$$

Puis, en imposant la continuité de f et de sa dérivé en π, on trouve

$$2a_2\pi + b_2 = 4\pi^2 + 4\pi - 1 \quad a_2 = 4\pi + 2$$

ce qui donne

$$b_2 = -4\pi^2 - 1.$$

□