Nom :

Prénom :

Sup'Galilée 12/09/2017

Etudiants ingénieurs apprentis $1^{\text{ère}}$ année

Controle continu 1 (sujet 3)

durée : 20 minutes

Le sujet comporte deux pages

Exercice 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

1. La fonction $x \mapsto \ln(3e^{-x})$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   Correction : Vrai. En effet, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction $x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0, +\infty[$.

2. La fonction $x \mapsto x\sin(x + 2\pi)$ est impaire.

   Correction : Faux. On pose $f(x) = x\sin(x + 2\pi) = x\sin(x)$. On a $f(-x) = -x\sin(-x) = x\sin(x) = f(x)$. Donc f est paire.

Exercice 2 : calcul de limites

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x\sin x}{x^2+3}$

Correction : On pose $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2+3}$. Pour $x < 0$, on a

$$\frac{x}{x^2+3} \leq f(x) \leq -\frac{x}{x^2+3},$$

et $\lim_{x\to-\infty} \pm\frac{x}{x^2+3} = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on trouve donc

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x \sin x}{x^2+3} = 0.$$

$\square$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

Correction : On a $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$. Par somme de limites, on trouve donc $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$

Exercice 3

Soit s la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par

$$s(x) = x^2 \sin(x) + 2x - 1 \quad \text{pour tout } x \text{ appartenant à } [0, 2\pi].$$

Construire une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

- $f(x) = a_1 x + b_1$ pour tout $x < 0$,
- $f(x) = s(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$,
- $f(x) = a_2 x + b_2$ pour tout $x > 2\pi$.

Correction : On a $s'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x + 2$. Donc

$$s(0) = -1 \quad s(2\pi) = 4\pi + 2 \quad s'(0) = 2 \quad s'(2\pi) = 4\pi^2 + 2$$

En imposant la continuité de f et de sa dérivé en 0, on trouve

$$b_1 = -1 \quad a_1 = 2.$$

Puis, en imposant la continuité de f et de sa dérivé en pi, on trouve

$$2a_2\pi + b_2 = 4\pi + 2 \quad a_2 = 4\pi^2 + 2$$

ce qui donne

$$b_2 = 2 - 8\pi^3.$$

$\square$