

Nom :
Prénom :

Sup'Galilée
Étudiants ingénieurs apprentis 1^{ère} année

19/09/2017

Contrôle continu 2 (sujet 1)
Le sujet comporte deux pages
durée : 20 minutes

Exercice 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

1. La fonction $x \mapsto |x|x$, définie sur \mathbb{R} , est continue en 0.

Correction : Vrai. La fonction est un produit de deux fonctions continues en 0.

2. La fonction $x \mapsto |x|x$, définie sur \mathbb{R} est dérivable en 0.

Correction : Vrai. On pose $f(x) = |x|x$, et on calcule la limite du taux de variation quand x tend vers 0 : on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

Cette limite existe et est finie donc f est dérivable en 0.

3. Le nombre $\alpha = \int_0^1 \cos t dt$ est strictement positif.

Correction : Vrai. La fonction continue $t \mapsto \cos t$ est strictement positive sur $[0, 1]$ (car $1 < \frac{\pi}{2}$).
Donc $\alpha = \int_0^1 \cos t dt$ correspond à l'intégrale d'une fonction strictement positive. Par conséquent $\alpha > 0$. □

Exercice 2 : primitive

Donner une primitive des fonctions suivantes $f_1(x) = (1 + \tan^2 x) \tan x$ ($x \in] - \pi/2, \pi/2[$)

Correction : On a $(\tan x)' = (1 + \tan^2 x)$. Donc les primitives de f_1 sur $] - \pi/2, \pi/2[$ sont de la forme

$$F_1(x) = \frac{1}{2}(\tan x)^2.$$

□

Exercice 3 : développement limité

Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction suivante :

$$f(x) = 3 \sin(2x) - 2 \sin(3x)$$

Correction : On a

$$3 \sin(2x) = 6x - 4x^3 + O(x^4)$$

et

$$2 \sin(3x) = 6x - 9x^3 + O(x^4).$$

Donc

$$f(x) = 5x^3 + O(x^4).$$

□