Nom :

Prénom :

Sup'Galilée 19/09/2017

Etudiants ingénieurs apprentis $1^{\text{ère}}$ année

Controle continu 2 (sujet 2)

Le sujet comporte deux pages

durée : 20 minutes

Exercice 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x + \lambda x^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \neq -\frac{4}{3}$, la fonction f n'est pas continue sur $[0,1]$.

Correction : Vrai. Quel que soit λ. La fonction f est continue sur $[0, 1/2[$ (fonction rationnelle qui ne s annule pas) et $]1/2, 1[$ (fonction polynôme). Il reste à étudier la continuité en $\frac{1}{2}$. Quand $\lambda = -4/3$, on a

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{1}{1+x}.$$

ce qui démontre le résultat.

2. On suppose que $\lambda = -\frac{4}{3}$. La fonction f est dérivable sur $[0,1]$.

Correction : Faux. Nous allons montrer que la fonction n'est pas dérivable en 0. On peut montrer que

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{f(x) - f(1/2)}{x - 1/2} = -4/9 \neq \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{f(x) - f(1/2)}{x - 1/2} = \frac{2}{3}.$$

$\square$

3. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si g est paire, alors $\int_{-1}^{1} g(t)dt = 0$.

Correction : Faux. $\int_{-1}^{1} 1dt = 2 \neq 0$

Exercice 2 : dérivée

Calculer la dérivée de la fonction $\ln(\ln x)$ ($x \in]0, +\infty[$)

Correction : On a

$$\ln(\ln x) = \frac{1}{x \ln x}$$

□

Exercice 3 : développement limité

Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction suivante :

$$f(x) = \cos(x)^2 - \cos(x^2)$$

Correction : On trouve

$$f(x) = -x^2 + O(x^3).$$

□