Nom :

Prénom :

Sup'Galilée 19/09/2017

Etudiants ingénieurs apprentis $1^{\text{ère}}$ année

Contrôle continu 2 (sujet 3)

Le sujet comporte deux pages

durée : 20 minutes

Exercice 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x + \lambda x^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = -\frac{4}{3}$, la fonction f est continue sur $[0,1]$.

Correction : Vrai. Quel que soit λ. La fonction f est continue sur $[0, 1/2[$ (fonction rationnelle qui ne s annule pas) et $]1/2, 1[$ (fonction polynôme). Il reste à étudier la continuité en $\frac{1}{2}$. Quand $\lambda = -4/3$, on a

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{1}{1+x}.$$

ce qui démontre le résultat.

2. On suppose que $\lambda = -\frac{4}{3}$. La fonction f est dérivable sur $[0,1]$.

Correction : Faux. Nous allons montrer que la fonction n'est pas dérivable en 0. On peut montrer que

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{f(x) - f(1/2)}{x - 1/2} = -4/9 \neq \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{f(x) - f(1/2)}{x - 1/2} = \frac{2}{3}.$$

$\square$

3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui satisfait

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Alors, $\int_{-1}^{1} f(t)dt = 0$.
Correction : On a

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt = \int_{0}^{1} f(-t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt = 0.$$

□

Exercice 2 : primitive

Donner une primitive de la fonction $f_2(x) = 3\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ $(x > 0)$

Correction : Une primitive F_2 de f_2 est donnée par

$$F_2(x) = (\ln x)^3.$$

□

Exercice 3 : développement limité

Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction suivante :

$$f(x) = 2\sin(x) - \sin(2x)$$

Correction : On trouve

$$f(x) = x^3 + x^3\varepsilon(x^4).$$

□