Sup'Galilée 26/09/2017

Etudiants ingénieurs apprentis 1ère année

Examen

13h45-15h15

Une feuille de notes de cours recto-verso manuscrite est autorisée.
Cette feuille doit être rendue avec votre copie à la fin du contrôle.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 (Fonctions) (9 points)

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$.
Correction : La fonction $x \mapsto 1+x^2$ est définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus elle est strictement positive. Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto 1-x^2$, définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ est positive sur $[-1,1]$ et strictement positive sur $]-1,1[$. Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie, continue et dérivable sur $]-1,1[$. Finalement, la fonction inverse étant définie, continue et dérivable sur $]-1,0[$ et $]0,1[$, la fonction f est bien continue et dérivable sur $]-1,0[$ et $]0,1[$. $\square$

2. Déterminer
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x).$$
Correction : On a $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\sqrt{2}$ et $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \sqrt{2}$

3. Montrer que f est continue et dérivable en 0.
Correction : En utilisant les développement limités usuels (développement limité de $(1+x)^\alpha$), on sait qu'il existe une fonction ε (définie dans un voisinage de 0) telle que
$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-x^2} = x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$
Donc
$$f(x) = x + x\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \frac{f(x)}{x} = 1 + \varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$
Ainsi
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1,$$
ce qui prouve que la fonction est continue et dérivable au point 0.

4. Calculer $f'(x)$.
Correction : Un calcul direct
$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2+1}}$$
$\square$

5. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition (dresser le tableau de variations de f).
Correction : On a
$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+1) \geq (1-x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 0.$$
Donc f est croissante sur $]-1,0[$.

Exercice 2 (Intégrales) (4 points)

1. Calculer l'intégrale suivante :
$$\int_1^e \ln t dt.$$
2. Montrer que $\cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$. En déduire
$$\int_0^\pi \cos^2 t\, dt.$$

Correction :

(a) On fait une intégration par parties et on trouve
$$\int_1^e \ln t dt = -\int_1^e 1 dt + [t\ln t]_1^e = (1-e)+e = 1.$$

(b) Puisque $\cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$, une intégration directe donne
$$\int_0^\pi \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\pi.$$

□

Exercice 3 (12 points)

L'objectif de cet exercice est de résoudre le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - 2x_3(t) \\ x_3'(t) = 3x_1(t) - 3x_2(t) + x_3(t). \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Les inconnues du système précédent sont les fonctions $t \to x_1(t)$, $t \to x_2(t)$, $t \to x_3(t)$. On pose

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \qquad X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix}.$$

On remarque que $X : t \mapsto X(t)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque. *Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.*

1. **Résolution d'un système d'E.D.0 diagonal.**

   (a) Soit $d \in \mathbb{R}^*$. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ordinaire suivante :
   $$x'(t) = dx(t). \tag{2}$$

   Correction : Les solution de l'équation (2) sont les fonctions $x(t)$ de la forme
   $$x(t) = ce^{d\,t}$$
   où c est une constante réelle.

   (b) Soit D une matrice diagonale inversible carrée de taille 3 :
   $$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad d_1 \in \mathbb{R}^*, \quad d_2 \in \mathbb{R}^*, \quad d_3 \in \mathbb{R}^*.$$

   Déterminer l'ensemble des solutions du système d'E.D.0
   $$X'(t) = DX(t).$$

On pourra réécrire le système matriciel comme un système de trois équations différentielles ordinaires du premier ordre découplées de type (2).
Correction : On a

$$x_1'(t) = d_1 x_1(t) \quad x_2'(t) = d_2 x_2(t) \quad x_3'(t) = d_3 x_3(t)$$

si bien qu'en appliquant les résultats du cours on sait que les solution du système d'EDO sont de la forme

$$x_1(t) = c_1 e^{d_1 t} \quad x_2(t) = c_2 e^{d_2 t} \quad x_3(t) = c_3 e^{d_3 t}$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes réelles.

2. **Forme matricielle du système** (1) : montrer que le système (1) peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$X'(t) = MX(t) \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Correction : Il suffit de developper le système précédent pour voir son équivalence avec le système (1).

3. **Introduction d'une matrice P et calcul de son inverse :** on introduit la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) À l'aide de la méthode de Gauss, calculer les vecteur u_1, u_2 et u_3 tels que

$$Pu_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Pu_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Pu_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Correction : Par la méthode du pivot de Gauss, on trouve

$$u_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

(b) En déduire l'inverse de P.
Correction : On en déduit que

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

(c) On pose $T = P^{-1}MP$. Montrer que T est diagonale.

Correction : Un calcul direct donne

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

□

4. **Résolution du système** (1)**.**

(a) Soit $X(t)$ une solution du système (1). On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$. En utilisant les questions 2 et 3, montrer que $Y(t)$ satisfait le système matriciel suivant :

$$Y'(t) = TY(t) \tag{3}$$

Correction : On a $M = PTP^{-1}$ si bien que

$$X'(t) = PTP^{-1}X(t) \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}X'(t)) = T(P^{-1}X(t)) \quad \Leftrightarrow \quad Y'(t) = TY(t)$$

□

(b) En utilisant la question 1, déterminer $Y(t)$. En déduire l'ensemble des solutions du système (1).
Correction : En utilisant la première question, on trouve

$$y_1(t) = c_1 e^{4t} \quad y_2(t) = c_2 e^{2t} \quad y_3(t) = c_3 e^{-2t}$$

puis $X(t) = PY(t)$.