Cours d'harmonisation en mathématiques

Bérangère Delourme-Clément Foucart

Septembre 2017

Table des matières

Ce cours a été écrit à l'aide du livre *Les mathématiques de l'IUT-Rappels de cours et travaux dirigés de première année* de A. Gammella-Mathieu (éditions ellipses, collection Références sciences, 2013)

Chapitre 1

Étude des fonctions à une variable réelle

1.1 Introduction

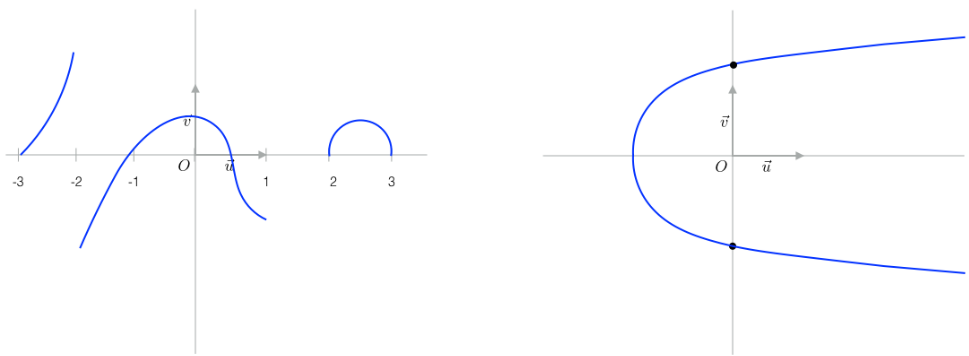
1.1.1 Définitions

Definition 1.1.1.

a- *On définit une fonction d'une variable réelle en associant à chaque nombre réel x* ***au plus*** *un nombre réel, qui, lorsqu'il existe, est noté $f(x)$ et est appelé* ***image*** *de x par f.*

b- *On appelle* ***ensemble de définition*** *d'une fonction f l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe. On le note $\mathcal{D}_f$.*

c- *Dans un repère donné, on appelle* ***courbe représentative*** *de f l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x décrit l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.*



(a) (b)

FIGURE 1.1 – Deux exemples de courbes du plan.

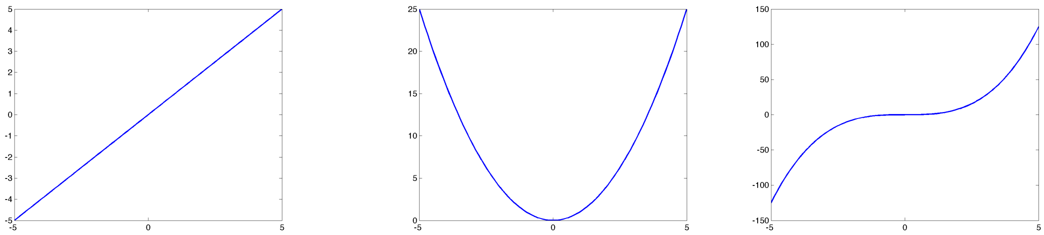
Sur la figure 1.1a, la courbe de gauche est la courbe représentative d'une fonction dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On remarque que cette fonction n'est pas définie sur l'intervalle $]1, 2[$. Par contre la courbe représentée sur la figure 1.1b n'est pas une courbe représentative de fonction : en effet, le point $x = 0$ a deux images.

1.1.2 Quelques exemples de fonctions

Voici une liste de quelques fonctions usuelles :

Les fonctions puissances entières

- La fonction identité : $x \mapsto x$, (domaine de définition : $\mathbb{R}$).
- La fonction carré : $x \mapsto x^2$, (domaine de définition : $\mathbb{R}$).
- La fonction cube : $x \mapsto x^3$, (domaine de définition : $\mathbb{R}$).
- les fonctions puissances entières : soit $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ (domaine de défintion : $\mathbb{R}$).



(a) $x \mapsto x$ (b) $x \mapsto x^2$ (c) $x \mapsto x^3$

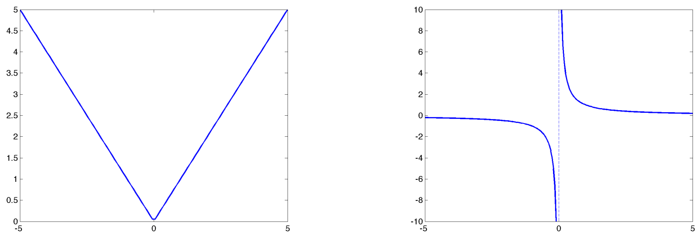
FIGURE 1.2 – Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$.

La fonction valeur absolue La fonction valeurs absolue $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Les fonctions inverse et puissances entières négatives

- La fonction inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$, (domaine de défintion : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).
- Les fonctions puissances entières négatives : soit $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ (domaine de définition : $\mathbb{R}^*$).



(a) $x \mapsto |x|$ (b) $x \mapsto \frac{1}{x}$

FIGURE 1.3 – Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Les fonctions polynomiales et rationnelles

- Les fonctions polynomiales (ou, par abus de langage, polynômes) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

  où

  - n est un entier positif ou nul,
  - pour tout entier compris entre 0 et n, les nombres a_j sont des réels.
  - $a_n \neq 0$ (sauf dans le cas du polynôme nul $p(x) = 0$).

  Les fonctions polynômiales sont définies sur $\mathbb{R}$. L'entier naturel n est appelé dégré du polynôme p. Par exemple la fonction $x \mapsto 1 + 3x + 4x^2$ est un polynôme de degré 2.

- Les fonctions rationnelles sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

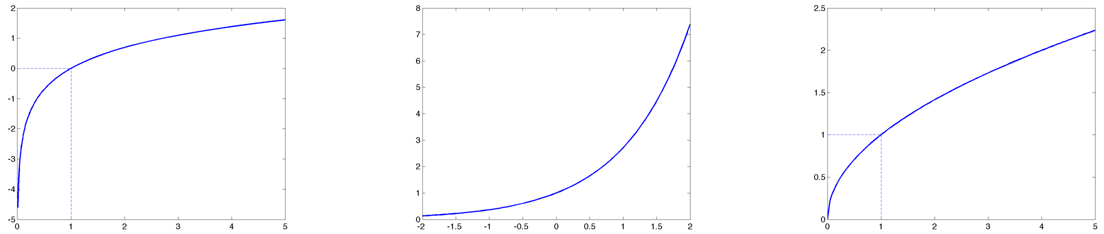
  où p et q sont des fonctions polynômiales. Ces fonctions sont définies en tous les points x où $q(x)$ ne s'annule pas :

$$\mathcal{D}_r = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tels que } q(x) \neq 0\}.$$

Les fonctions exponentielle et logarithme

- La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$ définie sur $\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$. Cette fonction satisfait la propriété fondamentale suivante :
$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \text{quels que soient } a \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } b \in \mathbb{R}^{+*}.$$
En particulier, $\ln 1 = 0$.
- La fonction logarithme décimale $x \mapsto \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$, parfois aussi notée $\log_{10}$ ou lg. Son domaine de définition est $\mathbb{R}^{+*}$.
- La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$, définie sur $\mathbb{R}$. On a
$$e^{a+b} = e^a\, e^b \quad \text{quels que soient } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

On rappelle que
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^{\ln x} = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R},\ \ln e^x = x.$$
ce qui signifie que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont réciproques.



(a) $x \mapsto \ln x$ (b) $x \mapsto e^x$ (c) $x \mapsto \sqrt{x}$

FIGURE 1.4 – Courbes représentatives des fonctions logarithme népérien, exponentielle et racine carrée.

Les fonctions puissances réelles

- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
- Les fonctions puissances non entières positives : $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x^\alpha = \begin{cases} e^{\alpha \ln x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$
- Les fonctions puissances non entières négatives : $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

Les fonctions trigonométriques

- La fonction sinus $x \mapsto \sin x$, définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cosinus $x \mapsto \cos x$, définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction tangente, $x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ de domaine
$$\mathcal{D}_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}.$$

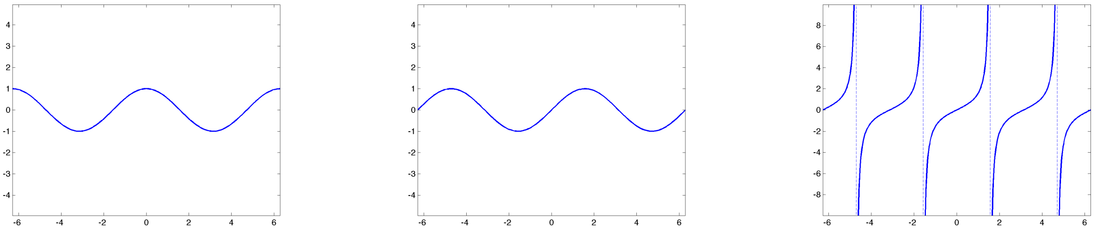
1.1.3 Propriétés remarquables de certaines fonctions

Définitions 1.1.2.

a- *Une fonction f est **paire** lorsque son ensemble de définition est symétrique par rapport à $x = 0$ (i.e. si x est dans domaine de définition de f, alors $-x$ est aussi dans le domaine de définition de f) et que $f(-x) = f(x)$.*

b- *Une fonction f est **impaire** lorsque son ensemble de définition est symétrique par rapport à $x = 0$ et que $f(-x) = -f(x)$.*

c- *Une fonction f est **périodique** s'il existe une réel positif T tel que*
$$\begin{cases} \textit{pour tout } x \in \mathcal{D}_f,\ x + T \textit{appartient à } \mathcal{D}_f, \\ f(x+T) = f(x). \end{cases} \tag{1.2}$$
*Si une fonction f est périodique, on appelle **période** de f le plus petit entier T satisfaisant la propriété* (1.2).



(a) $x \mapsto \cos x$ (b) $x \mapsto \sin x$ (c) $x \mapsto \tan x$

FIGURE 1.5 – Courbes représentatives des fonctions cosinus, sinus et tangente.

Voici quelques exemples de fonctions paires, impaires et périodiques :

- fonctions paires : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \cos x$ (cf. Figures 1.2b, 1.3a et 1.5a).
- fonctions impaires : $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \tan x$ (cf. Figures 1.2a, 1.5b et 1.5c).
- fonctions périodiques : les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π. La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π (cf. Figure 1.5).

Remarque 1.1.3. *Propriétés des courbes représentatives des fonctions paires et impaires dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$:*

- *f est paire si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ($x = 0$).*
- *f est impaire si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine $O(0, 0)$ du repère.*

1.2 Limites

1.2.1 Définition heuristique (non rigoureuse) de la limite en un point x_0

Nous allons maintenant nous intéresser au calcul des limites d'une fonctions. Nous insistons sur le fait que la définition rigoureuse des limites nécessite l'introduction des quantificateurs et ne sera pas donnée dans ce cours. Les définitions 1.2.1, 1.2.3 et 1.2.6 qui suivent sont des définitions heuristiques, non formalisées et donc **non rigoureuses** (mais suffisantes pour les calculs que nous allons entreprendre).

1.2.1.1 Limite finie en un point x_0

Definition 1.2.1. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie partout sur un intervalle contenant x_0, à l'exception possible de x_0 lui même. On dit que f tend vers L quand x tend vers x_0 si l'écart entre $f(x)$ et L peut devenir aussi petit que l'on veut quand x s'approche suffisamment de x_0. On note*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

*Comme L est un nombre réel (et donc fini), on dit que la limite est **finie**.*

Remarque 1.2.2. *La définition 1.2.1 peut être généralisée au cas où x_0" = " $\pm\infty$.*

Donnons quelques exemples de limites finies. Considérons la fonction $f(x) : x \mapsto e^x$ et choisissons $x_0 = 0$. Alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = e^0 = 1.$$

De même, si on prend x_0" = " $-\infty$, on a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Par contre, quand x tend vers $+\infty$, la fonction f devient très grande (elle n'a pas de limite finie). Pour décrire ce comportement, on introduit la notion de limite infinie.

1.2.1.2 Limite infinie en un point x_0

Definition 1.2.3. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie partout sur un intervalle contenant x_0, à l'exception possible de x_0 lui même. On dit que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers x_0 si $f(x)$ est supérieure à 0 (resp. inférieure à 0) et arbitrairement grande quand x s'approche de x_0.*

Remarque 1.2.4. *De nouveau, la définition 1.2.3 peut être généralisée au cas où x_0" = " $\pm\infty$.*

Par exemple, les fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x^2$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On a aussi $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

Remarque 1.2.5. *Il est important de noter que les fonctions n'ont pas forcément de limite en un point. Ainsi la fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $\pm\infty$.*

1.2.1.3 Limites à gauche-limite à droite

Considérons la fonction $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

et représentée sur la Figure 1.7.

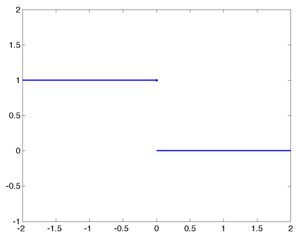


FIGURE 1.6 – courbe représentative de la fonction f définie par (1.3) (en forme de 'marche d'escalier').

Il est clair que la fonction f n'a pas de limite en $x_0 = 0$. Par contre, on va pouvoir définir une limite à gauche (quand x tend vers x_0 'par la gauche' ou 'par valeur inférieure') et à droite (quand x tend vers x_0 'par la droite', ou 'par valeur supérieure') de ce point :

Definition 1.2.6. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie partout sur un intervalle contenant x_0, à l'exception possible de x_0 lui même.*

1. *Limite à gauche (limite en x_0^-) : on dit que f tend vers L quand x tend vers x_0^- si l'écart entre $f(x)$ et L peut devenir aussi petit que l'on veut quand x s'approche suffisamment de x_0 tout en étant* ***inférieur*** *à x_0. On note*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

2. *Limite à droite (limite en x_0^+) : on dit que f tend vers L quand x tend vers x_0^+ si l'écart entre $f(x)$ et L peut devenir aussi petit que l'on veut quand x s'approche suffisamment de x_0 tout en étant* ***supérieur*** *à x_0. On note*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Ainsi, la fonction f définie par (1.3) admet une limite à gauche et à droite de $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0. \tag{1.4}$$

On généralise aisément ces définitions au cas de limites infinies : par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'admet pas de limite en $x_0 = 0$ mais admet une limite infinie à gauche et une limite infinie à droite de 0. On a

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

La courbe représentative de cette fonction admet une asymptote verticale en $x = 0$ (cf Figure 1.3b).

La proposition suivante rappelle que si f admet la même limite à droite et à gauche de x_0, alors f admet une limite en x_0 (la réciproque étant également vraie) :

Proposition 1.2.7. *Soit $\ell \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\}$ (ℓ est un nombre réel ou ℓ " = " $\pm\infty$), x_0 un nombre réel, et f une fonction définie partout sur un intervalle contenant x_0, à l'exception possible de x_0 lui même. Alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell.$$

1.2.2 Calcul de limites

Les règles décrites dans les paragraphes suivants vont permettre de déterminer un certain nombre de limites de fonctions.

1.2.2.1 Somme, produit et quotient

On considère deux fonctions f_1 et f_2 telles que

$$\lim_{x\to x_0} f_1 = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} f_2 = \ell_2,$$

où les nombres x_0, ℓ_1 et ℓ_2 peuvent être réels ou 'égaux' à $\pm\infty$.

Les tableaux 1.1, 1.2 et 1.3 donnent les valeurs des limites des fonctions somme $f_1 + f_2$, produit $f_1 f_2$ et quotient f_1/f_2 au point x_0 suivant les valeurs de ℓ_1 et ℓ_2. Le terme f.i signifie **forme indéterminée** : il n'est pas possible dans le cas général de déterminer la limite (d'ailleurs, cette limite peut exister ou non). Dans la troisième ligne du tableau 1.3, le cas 0^+ (resp. 0^-) signifie que $\ell_2 = 0$ et que f est positive ou nulle (resp. négative ou nulle) dans un voisinage de x_0.

ℓ_1	fini ($\in \mathbb{R}$)	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_2	fini	fini	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f_1 + f_2)$	$\ell_1 + \ell_2$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	f.i.	f.i.

TABLE 1.1 – Somme : limite de la fonction $f_1 + f_2$ au point x_0 suivant les valeurs de ℓ_1 et ℓ_2

ℓ_1	fini	fini > 0	fini < 0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
ℓ_2	fini	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f_1 f_2)$	$\ell_1\ell_2$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	f.i.

TABLE 1.2 – Produit : limite de la fonction $f_1 f_2$ au point x_0 suivant les valeurs de ℓ_1 et ℓ_2

ℓ_1	fini	$\mathbb{R}^{+*}$ ou $+\infty$	$\mathbb{R}^{-*}$ ou $-\infty$	$\mathbb{R}^{+*}$ ou $+\infty$	$\mathbb{R}^{-*}$ ou $-\infty$	0	$\pm\infty$
ℓ_2	fini $\neq 0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f_1/f_2$	ℓ_1/ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	f.i.	f.i.

TABLE 1.3 – Quotient : limite de la fonction f_1/f_2 au point x_0 suivant les valeurs de ℓ_1 et ℓ_2

Pour lever les formes indéterminées, on pourra utiliser l'une des propriétés suivantes.

1.2.2.2 Limite en $\pm\infty$ des fonctions rationnelles

Comme décrit dans la proposition suivante, la limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus hauts degrés.

Proposition 1.2.8. *Soit n et m deux entiers positifs et f et g deux polynômes de degrés m et n ($m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$) :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \ (a_n \neq 0), \quad f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^n \ (b_m \neq 0).$$

Alors,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}$$

Par exemple,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + 2x}{x^5 + 3x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3} = 0.$$

1.2.2.3 Les théorèmes de comparaison

Proposition 1.2.9. *Soit un point x_0 fini ou infini ($x_0 \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\}$) et soit u et v deux fonctions telles que $u(x) \leq v(x)$ dans un voisinage du point x_0. Alors*

$$\lim_{x\to x_0} u(x) \leq \lim_{x\to x_0} v(x).$$

En applicant directement le résultat précédent, on peut montrer le théorème ci-dessous, souvent appelé théorème des gendarmes :

Théorème 1.2.10 (théorème des gendarmes)**.** *Soit un point x_0 fini ou infini ($x_0 \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\}$) et soit u et v et f trois fonctions telles que $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ dans un voisinage du point x_0. Si*

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \lim_{x \to x_0} v(x) = \ell, \quad \ell \text{ fini ou non}, (\ell \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\}),$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Le théorème précédent s'avère utile pour déterminer des limites de fonctions bornées (par exemple $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$).

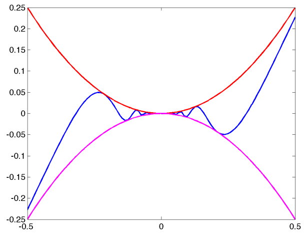


FIGURE 1.7 – Illustration du théorème des gendarmes pour la calcul de la limite de la fonction $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ en 0. La fonction f (représentée en bleu) est comprise $-x^2$ (magenta) et x^2 (rouge)

1.2.2.4 Croissances comparées

Voici enfin les résultats dits de 'croissances comparées', comparant les fonctions puissance, exponentielle et logarithme :

Proposition 1.2.11.

- *Soit α un nombre réel positif. Alors*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha\, e^{-x} = 0.$$
- *Soit α un nombre réel strictement positif et a un nombre réel positif. Alors*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^\alpha} = 0.$$
- *Soit α un nombre réel strictement positif. Alors*
$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0.$$

On rappelle que la fonction puissance (pour α entier ou non) à été définie dans la partie 1.1.2. La proposition 1.2.11 montre en particulier que la fonction exponentielle croit plus vite que tout polynôme au voisinage de $+\infty$ (cas particulier où $\alpha \in \mathbb{N}$).

Remarque 1.2.12. *Les méthodes présentées dans les paragraphes 1.2.2.2, 1.2.2.3 et 1.2.2.4 peuvent permettre de lever certaines indéterminations. Les développements limités, présentés dans la partie 1.5, permettront également de lever un certain nombre de ces indéterminations.*

1.3 Continuité

Définitions 1.3.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]c, d[$ (c et d peuvent être finis ou non) et x_0 un point de cet intervalle.*

- *On dit que f est continue en x_0 lorsque*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
- *Soit J un intervalle inclus dans I. On dit que f est continue sur l'intervalle J si f est continue en tout point x_0 appartenant à J.*
- *Ensemble de continuité. On appelle ensemble de continuité $\mathcal{D}_c$ de f, l'ensemble des points du domaine de définition de f où f est continue.*

Par exemple, les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par (1.3)(marche d'escalier) est continue en tout point $x_0 \neq 0$ mais elle n'est pas continue en 0.

Notion de prolongement par continuité (un exemple) Certaines fonctions sont dites prolongeables par continuité. Par exemple, considérons la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f n'est pas définie au point $x_0 = 0$ mais f admet une limite en 0. En effet,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin 0}{x - 0} = \cos 0 = 1. \tag{1.5}$$

Définissons alors la fonction $\tilde{f}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad \mathcal{D}_{\tilde{f}} = \mathbb{R}.$$

La fonction $\tilde{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, d'après (1.5), f est continue en 0, si bien que $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, par construction, $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$. C'est pourquoi on dit que $\tilde{f}$ prolonge f par continuité au point 0.

De manière similaire, la fonction x^α définie sur $\mathbb{R}^+$ par (1.1) est un prolongement par continuité en 0 de la fonction $e^{\alpha \ln x}$ en définie sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\lim_{x\to 0} e^{\alpha \ln x} = 0.$$

Pour terminer cette section, nous rappelons le théorème des valeurs intermédiaires, théorème assez intuitif qui assure qu'une fonction continue sur $[a, b]$ prend toutes les valeurs comprises en $f(a)$ et $f(b)$.

Théorème 1.3.2 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$. Alors, pour tout nombre réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.*

Nous insistons sur le fait que le résultat précédent est faux si f n'est pas continue.

Remarque 1.3.3 (exemples)**.** *Vrai ou faux ?*

1. *Un avion décolle de Paris pour New York. Son altitude de croisière est à 10000m. Il passera par l'altitude 9000m pendant son trajet.*
2. *En 2015, à Paris, il a fait $-5°C$ le 5 janvier et $26°C$ le 18 aout. Il y a eu au moins un jour de l'année où le thermomètre a atteint $20°C$.*
3. *Aujourd'hui, j'ai 320 euros sur mon compte en banque alors qu'il y a une semaine, j'avais 100 euros. Il existe un moment de la semaine (même très bref) où j'ai eu exactement 200 euros sur mon compte en banque.*

1.4 Dérivation

1.4.1 Définitions

Définitions 1.4.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

- *Dérivabilité en un point : soit x_0 un point de I. On dit que f est dérivable en x_0 lorsque le quotient $\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$ admet une limite **finie** quand h tend vers 0. Lorsque cette limite existe, elle est appelée nombre dérivé de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.*
- *Dérivabilité sur un intervalle : soit un intervalle J inclus dans I. On dit que f est dérivable sur l'intervalle J si elle est dérivable en tout point de J.*
- *Ensemble de dérivabilité : on appelle ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}_{f'}$ d'une fonction f l'ensemble des points $x_0 \in \mathcal{D}_f$ tels que $f'(x_0)$ existe.*
- *Fonction dérivée : On appelle fonction dérivée de f la fonction notée f' définie sur l'ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}_{f'}$, qui à tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$ associe le nombre dérivé $f'(x)$, c'est à dire*

$$\forall x \in \mathcal{D}_{f'}, \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

1.4.2 Quelques propriétés

Géométriquement, le nombre dérivée d'une fonction f en un point x_0 correspond à la pente (coefficient directeur) de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en x_0 (cf. la figure 1.8).

Proposition 1.4.2 (Interprétation géométrique du nombre dérivé)**.** *Si f est dérivable en x_0, la courbe représentative de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente d'équation*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

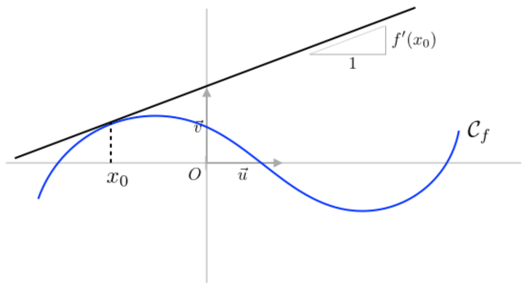


FIGURE 1.8 – Interprétation géométrique du nombre dérivée.

La propriété précédente permet de comprendre le lien entre le signe de la dérivée d'une fonction et son sens de variation :

Proposition 1.4.3 (dérivée et sens de variation)**.** *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

1. *Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$) pour tout $x \in I$, alors f est croissante (resp. strictement croissante) sur I.*
2. *Si $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in I$, alors f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I.*

On peut également montrer le résultat suivant :

Proposition 1.4.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction dérivable sur I et x_0 un point de I.*

1. *Si f admet un extremum en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*
2. *Si $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0, alors f admet un extremum local en x_0.*

Enfin, on peut montrer que la dérivabilité d'une fonction en un point entraine la continuité de cette fonction en ce point :

Proposition 1.4.5. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

La réciproque de la proposition précédente est **fausse**. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais non dérivable au point 0 (cf. figure 1.3a) :

$$\lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \pm 1.$$

De même la fonction $\sqrt{x}$, définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ n'est pas dérivable en 0 : en effet,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Géométrique, le résultat précédent montre que la courbe représentative de la fonction racine admet une tangente verticale en $x = 0$ (dérivée infinie) (voir la figure 1.4c).

1.4.3 Formules usuelles de dérivation

1.4.3.1 Dérivée des fonctions usuelles

La tableau suivant rappelle les dérivées de quelques fonctions usuelles.

1.4.3.2 Opérations sur les dérivées

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit g une fonction dérivable sur un intervalle J. Le tableau 2.1 rappelle les formules de dérivation pour les fonctions produit fg, quotient f/g et composée $f \circ g$ (par définition, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$).

1.4.4 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 1.4.6 (Théorème de Rolle)**.** *Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un nombre c appartenant à $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Le théorème de Rolle montre que puisque $f(a) = f(b)$, il existe (au moins) un point de l'intervalle $]a, b[$ où la pente de la tangente à $\mathcal{C}_f$ est horizontale. À l'aide du théorème de Rolle, on peut montrer le théorème des accroissements finis :

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_{f'}$	$f'(x)$
$c\ (c \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$n\,x^{n-1}$
$\frac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}} = (-n)x^{(-n)-1}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\|x\|$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\begin{cases} -1 & \text{si} x < 0 \\ 1 & \text{si} x > 0. \end{cases}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln x$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}, \alpha > 1)$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}, \alpha < 1)$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$

TABLE 1.4 – Domaine de dérivation et dérivées de quelques fonctions usuelles.

	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
fg	$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$	$I \cap J$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$	$I \cap \{x \in J,$ tel que $g(x) \neq 0\}$
$f \circ g$	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = (f' \circ g)(x)g'(x)$	$\{x \in J, g(x) \in I\}$

TABLE 1.5 – Opération sur les dérivées.

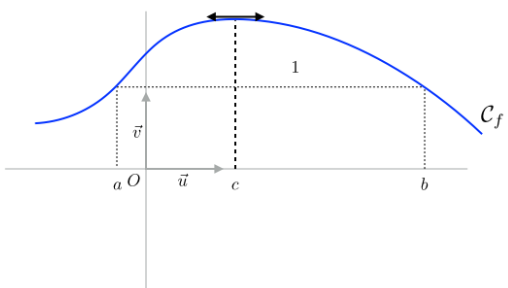


FIGURE 1.9 – Illustration du théorème de Rolle.

Théorème 1.4.7 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Le résultat précédent signifie qu'il existe (au moins) un point de l'intervalle $]a, b[$ où la pente de la tangente à $\mathcal{C}_f$ est égale au taux d'accroissement moyen $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (cf. Figure 1.10).

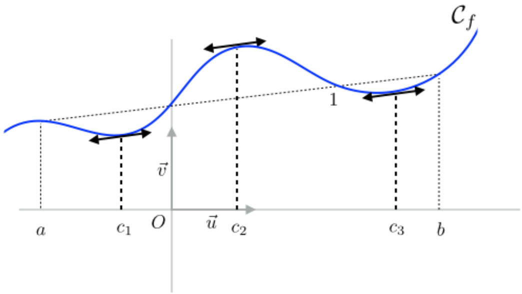


FIGURE 1.10 – Illustration du théorème des accroissements finis.

1.5 Développements limités

1.5.1 Formule de Taylor-Young et définition des développements limités

Théorème 1.5.1 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit n un entier naturel (positif), I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I (f est n fois dérivable sur I et la dérivée n-ième de f est continue sur I). Alors pour tout $a \in I$ et pour tout réel h tel que $a + h \in I$, on a*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f^{(2)}(a)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} + h^n\varepsilon(h), \tag{1.6}$$

où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Dans le théorème précédent, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de f. La reste $h^n\varepsilon(h)$ est souvent noté génériquement $o(h^n)$, ce qui signifie que $h^n\varepsilon(h) = o(h^n)$ est négligeable devant h^n, c'est à dire que

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^n\varepsilon(h)}{h^n} = \lim_{h\to 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0.$$

Remarque 1.5.2. *Il existe d'autres formules de Taylor qui diffèrent dans la façon d'exprimer le reste $h^n\varepsilon(h) = o(h^n)$.*

Nous pouvons maintenant définir la notion de développement limité.

Definition 1.5.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe $n + 1$ nombres réels (a_j), $j \in \mathbb{N}$ compris entre 0 et n, et une fonction ε définie sur I tels que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x) \quad \textit{et} \quad \lim_{x\mapsto a} \varepsilon(x) = 0.$$

Le polynome $p_{n,a,f}(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$ s'appelle la ***partie régulière*** *(ou* ***partie principale****) du développement limité. Il est parfois aussi noté $DL_n(x)$.*

On remarquera que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant a, alors, d'après le théorème 1.5.1, f admet un développement limité d'ordre n en a. Par ailleurs, il faut savoir que le développement limité est unique, ce qui signifie que, s'il existe, le polynôme $p_{n,f,a}$ est unique.

En pratique, les développements limités permettent de remplacer localement des fonctions régulières par des polynômes. En fait, connaître ce développement peut s'avérer d'une grande aide pour lever les indéterminations dans le calcul des limites. Par ailleurs les développements limités sont souvent utilisés en physique pour obtenir des modèles simplifiés.

1.5.2 Calcul des développements limités

1.5.2.1 Développement limités usuels au point 0

Nous remarquons d'abord que pour calculer un développement limité f au point a, il suffit de calculer un développement de la fonction $g(x) = f(a + x)$ au point 0. C'est pourquoi, on peut souvent se contenter de connaitre les développement limités des fonctions usuelles au point 0. Les formules suivantes peuvent être obtenues à l'aide de la formule de Taylor-Young 1.5.1 :

1. Développement limité de la fonction exponentielle en 0 :
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x). \tag{1.7}$$
2. Développement limité de la fonction $\dfrac{1}{1+x}$ en 0 :
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x). \tag{1.8}$$
3. Développement limité de la fonction $\ln(1 + x)$ en 0 :
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x). \tag{1.9}$$
4. Développement limité de la fonction $(1 + x)^\alpha$ en 0 : soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x). \tag{1.10}$$
5. Développement limité de la fonction cosinus en 0 :
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x). \tag{1.11}$$
6. Développement limité de la fonction sinus en 0 :
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x). \tag{1.12}$$

1.5.2.2 Les opérations sur les développements limités

La proposition suivante résume les opérations élémentaires possibles utiles pour le calcul des développements limités.

Proposition 1.5.4.

Somme *: soit f_1 et f_2 deux fonctions, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f_1 et f_2 admettent un développement limité à l'ordre n au point a alors la fonction $f = f_1 + f_2$ admet un développement limité à l'ordre n au point a. De plus, la partie régulière du développement limité de f à l'ordre n peut être obtenue en additionnant les parties régulières des développements de f_1 et f_2 à l'ordre n.*

Produit *: soit f_1 et f_2 deux fonctions, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f_1 et f_2 admettent un développement limité à l'ordre n au point a alors $f = f_1 f_2$ admet un développement limité à l'ordre n au point a. De plus, la partie régulière du développement limité de f à l'ordre n peut être obtenue en effectuant le produit des parties régulières des développements de f_1 et f_2 à l'ordre n puis en tronquant le résultat obtenu au degré n.*

Composition *:soit f_1 et f_2 deux fonctions, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f_1 possède un développement limité à l'ordre n en a et si f_2 possède un développement limité à l'ordre n en $f_1(a)$, alors $f = f_2 \circ f_1$ possède un développement limité à l'ordre n en a. De plus, la partie régulière du développement limité de f à l'ordre n est obtenue en composant les parties régulières des développements limités à l'ordre n de f_1 et f_2 en en tronquant le résultat obtenu au degré n.*

Dérivation *: Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en un point a et si f est de classe $\mathcal{C}^n$ dans un voisinage de a, alors la fonction f' admet un développement limité d'ordre $n - 1$ au point a. La partie régulière du développement de f' est obtenue en dérivant la partie régulière du développement limité de f à l'ordre de n.*

En utilisant la proposition précédente, on voit que la formule (1.9) découle de la formule (1.8) puisque $\ln(1 + x)$ est la primitive de $1/(1 + x)$ qui s'annule en 0. De même, Les formules (1.11) et (1.12) peuvent être obtenues à partir de la formule (1.7) puisque $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ et $\sin x = (e^{ix} + e^{-ix})/2i$.

Chapitre 2

Intégration

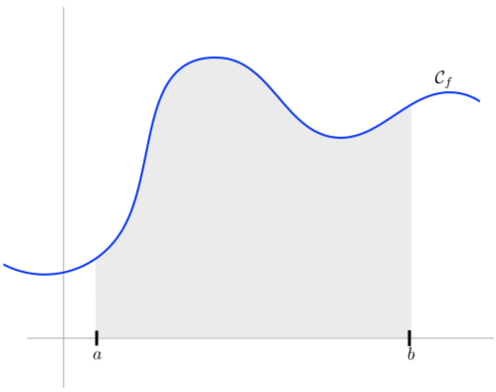
2.1 Définition non rigoureuse

Definition 2.1.1. *Soit a, b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans une repère orthonormé. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$, noté $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ l'aire de la partie du plan située entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f comptée algébriquement (ce qui signifie que l'aire est comptée négativement si f est négative).*

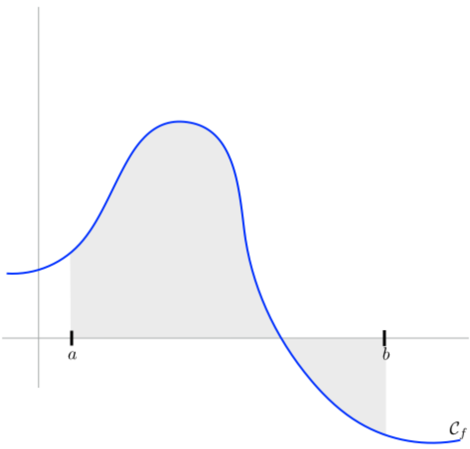
Sur les figures 2.1a-2.1b, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ correspond à l'aire de la partie grisée.

Remarque 2.1.2.

- *La définition précédente peut être généralisée au cas de fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.*
- *La théorie de Riemann permet de définir rigoureusement l'intégrale (dite intégrale de Riemann).*



(a)



(b)

FIGURE 2.1 – Interprétation géométrique de la notion d'intégrale.

Les propriétés suivantes découlent directement de la définition 3.1.1 de l'intégrale.

Proposition 2.1.3. *Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$, soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$.*

1. *Si $f(x) \geq 0$ quel que soit $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*
2. *L'intégrale de Riemann est linéaire : pour tout couple de nombres réels (λ, μ),*
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$
3. *Relation de Chasles : Soit $c \in [a, b]$. Alors*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{2.1}$$

4. *L'inégalité suivante est vérifiée :*
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

En appliquant le premier point de la proposition précédente, on voit que si $f(x) \ge g(x)$ quel que soit $x \in [a,b]$, alors
$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx.$$

Formellement, la relation de Chasles donne aussi la formule
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2.2 Primitive

2.2.1 Définition

Definition 2.2.1. *Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. On appelle primitive de f toute fonction F définie et dérivable sur $[a,b]$ telle que $F' = f$. On note parfois $F = \int f$.*

Remarque 2.2.2.

1. *Si f est une primitive de f, alors toutes les primitives de f sont de la forme*
$$G = F + c$$
où c est une constante réelle. Autrement dit, il y a une infinité de primitives qui diffèrent deux à deux d'une constante.
2. *L'existence de primitive n'est pas garantie si f n'est pas continue.*

2.2.2 Lien entre primitive et intégrale : le théorème fondamental de l'analyse

Le théorème suivant, connu sous le nom de théorème fondamental de l'analyse, établit le lien entre les notions de primitive et d'intégrale :

Théorème 2.2.3 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.*

- *La fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (définie pour tout x appartenant à $[a,b]$) est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*
- *Soit G une primitive de f sur $[a,b]$. Alors, pour tout x appartenant à $[a,b]$,*
$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a).$$

Soit f une fonction continuer sur $[a,b]$ et dont la dérivée est continue sur $[a,b]$. En appliquant le second point du théorème précédent à la fonction f' (f est une primitive de f' sur $[a,b]$), on obtient :
$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a). \tag{2.2}$$

2.3 Calcul des primitives et des intégrales

2.3.1 Primitives de quelques fonctions usuelles

La tableau suivant rappelle les primitives de quelques fonctions usuelles.

$f(x)$	$a \in \mathbb{R}$	x^n	x^α ($x \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{x}$, $x \neq 0$	$\cos x$	$\sin x$	$1 + \tan^2 x$
$F(x)$	$ax + c$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\frac{x^\alpha}{\alpha+1} + c$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$\sin x + c$	$-\cos x + c$	$\tan x + c$

TABLE 2.1 – Primitives usuelles (c est une constante réelle)

2.3.2 Opérations sur les primitives

Soit f et g des fonctions dérivables de dérivée f' et g', et soit (λ, μ) un couple de nombres réels.

- Les primitives de la fonction $\lambda f' + \mu g'$ sont les fonctions de la forme $\lambda f + \mu g + c$, où c est une constante réelle.
- Les primitives de la fonction $(f' \circ g)g'$ sont les fonctions de la forme $f \circ g + c$, où c est une constante réelle.

Exercice 2.3.1.

- *Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner les primitives de la fonction $f : x \mapsto f(x) = g'(x)\sin(g(x))$.*
- *Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x) > 0$ et soit $f : x \mapsto \frac{g'(x)}{g(x)}$. Montrer que les primitives de f sont de la forme*
$$F(x) = \ln(g(x)).$$
- *Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x) < 0$ et soit $f : x \mapsto \frac{g'(x)}{g(x)}$. Déterminer les primitives de f.*

2.3.3 Formule d'intégration par parties

Une formule très utile pour le calcul des intégrales est la formule d'intégration par parties :

Proposition 2.3.2 (Intégration par parties)**.** *Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors,*
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{2.3}$$
où $[fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Démonstration. On sait que $(fg)' = f'g + fg'$. Donc, en prenant l'intégrale dans l'égalité précédente, on obtient
$$\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx \; + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$
En utilisant la seconde partie du théorème 2.2.3 (cf. aussi equation 2.2), on voit que $\int_a^b (fg)'(x)dx = [fg]_a^b$, ce qui termine la preuve de la proposition 2.3.2. □

Exercice 2.3.3.

- *En utilisant la formule d'intégration par parties, montrer que*
$$\int_1^2 \ln x \, dx = 2\ln 2 = 1.$$
- *Soit $t > 1$. Montrer que*
$$\int_1^t \ln x \, dx = t\ln t - (t-1).$$
En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$.

2.3.4 Formule du changement de variable

Pour calculer des intégrales, on peut aussi parfois utiliser la formule de changement de variable :

Proposition 2.3.4. *Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$, soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et soit f une fonction continue et définie sur l'image de $[a, b]$ par φ. Alors,*
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt. \tag{2.4}$$

Par exemple, nous pouvons appliquer la formule suivante pour calculer $\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2t\cos(t^2)dt$. Posons $f(t) = \cos t$ et $\varphi(t) = t^2$ et prenons $a = \sqrt{\pi}$ et $b = 2\sqrt{\pi}$. On vérifie facilement que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et que φ est définie, dérivable ($\varphi'(t) = 2t$) et de dérivée continue sur $\mathbb{R}$. Évidemment, son image est continue sur $\mathbb{R}$. De plus $\varphi(a) = \pi$ et $\varphi(b) = 4\pi$. On peut donc appliquer la proposition 2.3.4 :
$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2t\cos(t^2)dt = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_\pi^{4\pi} \cos x dx = [\sin x]_0^{4\pi} = 0.$$

Remarque 2.3.5. *Quand φ est bijective de $[a, b]$ dans $[\varphi(a), \varphi(b)]$, la formule* (2.4) *peut être réécrite sous la forme*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt, \tag{2.5}$$
Il est parfois plus facile d'utiliser la formule 2.5 que la formule 2.4.

2.4 Intégrales généralisées

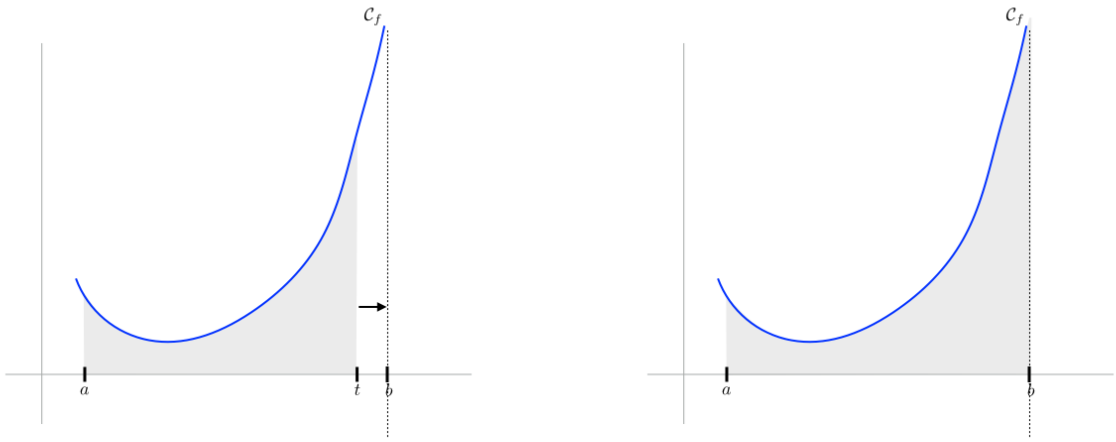
Jusqu'à présent, nous avons défini les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ lorsque f est une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$. Nous allons voir qu'il est parfois possible de donner un sens (via un passage à la limite (cf. 2.2a)) à $\int_a^b f(x)dx$ quand f est définie et continue sur les intervalles semi-ouverts $[a,b[$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b=+\infty$), ou $]a,b]$ ($b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ou $a=-\infty$).

Définitions 2.4.1 (Intégrale généralisée)**.**

1. *Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$ et soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$. Si l'intégrale $\int_a^t f(x)dx$ a une limite **finie** $\ell \in \mathbb{R}$ quand t tend vers b^-, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ **existe** ou qu'elle **converge**. On écrit alors*
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx = \ell.$$
*Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.*
2. *Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$ et soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$. Si l'intégrale $\int_t^b f(x)dx$ a une limite **finie** $\ell \in \mathbb{R}$ quand t tend vers a^+, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ **converge**. On écrit alors $\int_a^b f(x)dx = \ell$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.*

Remarque 2.4.2. *La définition 2.4.1-1. peut être étendue au cas où b" $=$ " $+\infty$. De même, la définition 2.4.1-2. peut être étendue au cas a" $=$ " $-\infty$.*

Géométriquement, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si l'aire de la partie du plan située entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f pour x compris entre a et b est finie (partie grisée sur la figure 2.2).



(a) (b)

FIGURE 2.2 – Illustration géométrique de la notion d'intégrale généralisée

Par exemple, on peut montrer les résultats suivants :

Proposition 2.4.3.

1. *Soit α un nombre réel. L'intégrale $\int_1^\infty x^\alpha dx$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.*
2. *Soit α un nombre réel. L'intégrale $\int_0^1 x^\alpha dx$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.*

Démonstration. Nous allons montrer la proposition 2.4.3-1, la preuve du second point étant similaire. Nous allons considérer séparément les cas $\alpha=-1$ et $\alpha \neq -1$. Si $\alpha \neq 1$, alors en utilisant le théorème fondamental de l'analyse 2.2.3 (et le fait que $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive de x^α), on obtient
$$\int_1^t x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^t = \frac{1}{\alpha+1}(t^{\alpha+1}-1).$$
Ainsi, en prenant la limite, on voit que
$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > -1,\\ \frac{1}{\alpha+1} & \text{si } \alpha < -1.\end{cases}$$
Donc l'intégrale converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha > 1$. Dans le cas où $\alpha = 1$, alors
$$\int_1^t \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^t = \ln t.$$

Comme $\ln t$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge. $\square$

Remarquons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ diverge quand $\alpha \in]-1, 0[$ alors même que la fonction $x^\alpha = 0$ tend vers 0.

Chapitre 3

Équations différentielles ordinaires

3.1 Généralités

3.1.1 Définitions générales

Definition 3.1.1.

- *On appelle Équation Différentielle Ordinaire (EDO) d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) une relation de la forme*

$$\mathcal{F}(t, y(t), y'(t), y''(t), \cdots, y^{(n)}(t)) = 0, \tag{3.1}$$

  où $\mathcal{F}$ est une fonction continue (dépendant de $n+2$ paramètres), et y', y'', $\cdots$, $y^{(n)}$ désignent les dérivées successives d'une fonction y jusqu'à l'ordre n.
- *Soit I un intervalle $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et y une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I (y est une fonction continue, dérivable n fois dont les dérivées successives jusqu'à l'ordre n sont continues). On dit que la fonction y est solution de l'équation différentielle* (3.1) *sur l'intervalle I si*

$$\mathcal{F}(t, y(t), y'(t), y''(t), \cdots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad \textit{pour tout } t \in I. \tag{3.2}$$

- *Résoudre l'équation différentielle* (3.1) *sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, c'est trouver toutes les fonctions y de classe $\mathcal{C}^n(I)$ telles que la relation* (3.2) *soit satisfaite.*

3.1.2 Quelques exemples

3.1.2.1 Dynamique des populations

Une population isolée dans un milieu où la nourriture est abondante conduit à l'équation différentielle suivante pour l'effectif y en fonction du temps t :

$$y'(t) = Ky(t) \quad \text{pour tout } t > 0. \tag{3.3}$$

Dans l'équation précédente, K est une constante réelle. L'équation précédente est une équation différentielle d'ordre 1. En introduisant la fonction continue $\mathcal{F}$ (continue dépendant de trois variables x_1, x_2 et x_3)

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, x_3) = x_3 - Kx_2,$$

on peut réécrire l'équation (3.3) sous la forme générale (3.1) $\mathcal{F}(t, y(t), y'(t)) = 0$.

3.1.2.2 Physique

La relation fondamentale de la dynamique de Newton s'écrit

$$f = m\,a$$

où m est la masse d'une particule, f est la force exercée sur cette particule et a son accélération. Dans le cas d'un mouvement rectiligne et quand la force est liée à la position $y(t)$ par un ressort, la relation précédente devient

$$m\,y''(t) = f(t). \tag{3.4}$$

L'équation précédente est une équation du second ordre. On peut réécrire l'équation (3.3) sous la forme générale (3.1) en introduisant la fonction continue $\mathcal{F}(x_1, x_2, x_3, x_4) = mx_4 - f(x_1)$.

3.1.3 Équations différentielles ordinaires linéaires

Dans le cadre de ce cours, nous allons nous restreindre à l'étude des équations différentielles ordinaires linéaires.

Definition 3.1.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) est une équation différentielle de la forme*

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t), \quad t \in I, \tag{3.5}$$

où la fonction b est continue, et, pour chaque entier k compris entre 0 et n les fonctions a_k sont continues. On suppose en outre que a_n est non nulle.

Dans le cas où les fonctions a_k ne dépendent pas de t, on parle d'équation différentielle ordinaire à ***coefficients constants****. On dit que l'équation est* ***homogène*** *lorsque $b = 0$.*

Les équations (3.3)-(3.4) sont des équations linéaires à coefficients constants. L'équation (3.3) est homogène ($a_1 = 1$, $a_0 = -K$, $b = 0$) alors que l'équation (3.4) ne l'est pas ($a_2 = m$, $a_1 = a_0 = 0$, $b(t) = f(t)$).

Remarque 3.1.3 (propriété des E.D.O linéaires homogènes)**.** *Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle linéaire homogène associée à* (3.5) *(i.e. $b = 0$), alors quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $y_3 = y_1 + \lambda y_2$ est solution de* (3.5).

La résolution des E.D.O est une question difficile. D'une part, on n'est pas toujours capable de montrer que ces équations ont une ou plusieurs solutions. D'autre part, quand bien même on peut démontrer l'existence de solutions (par des arguments abstraits par exemple), il est parfois impossible d'obtenir des solutions explicites.

Dans le cadre de ce cours, nous restreignons donc encore notre étude et nous considèrerons seulement les E.D.O linéaires suivantes :

1. E.D.O. linéaire du premier ordre :
$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t), \tag{3.6}$$
2. E.D.O. linéaire du second ordre à coefficients constants :
$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = b(t) \tag{3.7}$$
a_2, a_1 et a_0 sont des nombres réels et $a_2 \neq 0$.

3.2 Équation différentielles ordinaires linéaires d'ordre 1

On considère l'equation (3.6) sur une intervalle I. Si $a_1(t)$ ne s'annule pas sur I, on peut diviser l'équation par $a_1(t)$ pour obtenir l'equation suivante (dite E.D.O sous forme résolue)

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \quad t \in I, \tag{3.8}$$

où $a(t) = a_0(t)/a_1(t)$ et $f(t) = b(t)/a_1(t)$.

3.2.1 Étude de l'équation homogène

Pour commencer l'analyse, nous étudions l'équation (3.8) avec $f = 0$:

$$y_0'(t) + a(t)y_0(t) = 0 \quad \forall t \in I. \tag{3.9}$$

où $a(t)$ est une fonction continue. On a le résultat suivant.

Proposition 3.2.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit a une fonction continue sur I. Toute solution y_0 de l'équation différentielle ordinaire* (3.9) *est de la forme*

$$y_0(t) = k\, e^{-A(t)}, \tag{3.10}$$

où k est une constante réelle et A est une primitive de la fonction a.

3.2.2 Étude de l'équation non homogène ($f(t) \neq 0$)

Proposition 3.2.2. *Soit a et f deux fonctions continues sur I. Toute solution de l'équation différentielle ordinaire* (3.8) *est de la forme*

$$y = y_p + y_0 \tag{3.11}$$

où

- *y_p est une solution particulière de* (3.8).
- *y_0 est une solution de l'équation homogène* (3.9).

Démonstration. Supposons que l'on connaisse deux solutions particulières y_{p_1} et y_{p_2}. Posons $d = y_{p_2} - y_{p_1}$. Alors d satisfait l'équation homogène (3.9). L'application de la proposition 3.2.1 termine la preuve. □

Ainsi, pour résoudre l'équation (3.8), il suffit donc de trouver une solution particulière y_p puis de lui ajouter une solution quelconque de l'équation homogène.

Remarque 3.2.3.

1. *L'équation* (3.8) *admet une infinité de solutions.*
2. *L'existence d'une solution particulière y_p peut être démontrée (par des arguments abstraits).*
3. *En pratique, il n'est pas forcément facile de trouver une solution particulière.*

3.2.3 Recherche d'une solution particulière

Dans cette partie, nous mentionnons deux méthodes qui permettent dans certains cas d'exhiber des solutions particulières de l'équation (3.8).

3.2.3.1 Méthode de variation de la constante

Dans le cas général, si nous ne trouvons pas de solution particulière évidente, on peut essayer de chercher y_p sous la forme

$$y_p(t) = c(t)e^{-A(t)}, \quad t \in I,$$

où c est une fonction supposée dérivable sur I. La forme précédente ressemble à la forme générale des solutions de l'équation homogène (cf. (3.10)), mais, à la différence de celles-ci, c n'est pas une constante. On vérifie alors que

$$y_p'(t) + a(t)y_p(t) = c'(t)e^{-A(t)}.$$

Ainsi y_p sera solution de (3.8) si et seulement si

$$c'(t) = f(t)e^{A(t)} \quad t \in I.$$

Autrement dit, la recherche d'une solution particulière y_p revient à rechercher une primitive de $f(t)e^{A(t)}$.

Exercice 3.2.4. *Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et A une primitive de a. En utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer les solutions de l'équation*

$$y'(t) + a(t)y(t) = e^{-A(t)} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3.2.3.2 EDO linéaire d'ordre 1 à coefficients constants pour des seconds membres f spéciaux.

On considère l'EDO linéaire d'ordre 1 à **coefficients constants** suivante

$$y'(t) + ay(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.12}$$

où a est une constante réelle.

1. Si $f(t) = p(t)e^{kt}$ où $k \in \mathbb{R}$ et p est un polynôme de degré n, on peut construire une solution de particulière de (3.12) sous la forme

   $$y_p(t) = e^{kt}q(t),$$

   où q est une polynôme de degré au plus $n+1$.
2. Si $f(t) = p(t)\cos(kt)$ ou $f(t) = p(t)\sin(kt)$ avec $k \in \mathbb{R}$ et p est un polynôme de degré n, alors on peut construire une solution particulière de (3.12) sous la forme

   $$y_p(t) = p_1(t)\cos(kt) + p_2(t)\sin(kt),$$

   où p_1 et p_2 sont des polynômes de degré au plus $n+1$.

3.2.4 Le problème de Cauchy

Comme déjà mentionné dans la remarque 3.2.3, l'équation (3.8) admet une infinité de solutions. Pour restaurer l'unicité, on peu ajouter une **condition initiale**

$$y(t_0) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$t_0 \in \mathbb{R}$ étant donné. Autrement dit, quelles que soient a et f deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) = \alpha. \end{cases} \tag{3.13}$$

Le problème (3.2.5) est appelé problème de Cauchy.

Exercice 3.2.5. *Résoudre le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) - 2y(t) = 0 \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) = 1. \end{cases}$$

3.3 Équations différentielles ordinaires d'ordre 2 linéaires à coefficients constants

On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, a, b et c trois constantes réelles et f une fonction continue sur I. On suppose que $a \neq 0$. On s'intéresse alors à la résolution de l'E.D.O d'ordre 2 linéaire à coefficients constants suivante :

$$ay''(t) + by(t) + cy(t) = f(t) \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{3.14}$$

3.3.1 Étude de l'équation homogène

Comme précédemment, on commence par étudier l'E.D.O homogène assoicée à (3.14), donnée par

$$ay_0''(t) + by_0(t) + cy_0(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

On introduit l'équation caractéristique associée à l'équation (3.15), donnée par

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3.16}$$

L'équation précédente admet deux racines (qui peuvent être complexes) notées r_1 et r_2. On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.3.1.

1. *Si les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique* (3.16) *sont distinctes, alors les solutions de l'équation* (3.15) *s'écrivent sous la forme*
$$y_0(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \tag{3.17}$$
où A et B sont des constantes réelles ou complexes.
2. *Si $r_1 = r_2$, alors les solutions de l'équation* (3.15) *s'écrivent sous la forme*
$$y_0(t) = (A + Bt)e^{r_1 t} \tag{3.18}$$
où A et B sont des constantes réelles ou complexes.

Remarque 3.3.2. *Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant associé à l'équation caractéristique* (3.16).

1. *Si $\Delta > 0$, alors r_1 et r_2 sont réelles. Donc, si on s'intéresse aux solutions y_0 réelles, il suffit de prendre A et B réelles dans* (3.17).
2. *Si $\Delta < 0$, alors r_1 et r_2 sont complexes conjuguées :*
$$r_1 = \alpha + i\beta \quad \textit{et} \quad r_2 = \alpha - i\beta.$$
Pour obtenir les solutions réelles de (3.15)*, il suffit de prendre les parties réelle et imaginaire de* (3.17) *qui sont de la forme*
$$y_0(t) = e^{\alpha t}\left(c\cos(\beta t) + d\sin(\beta t)\right)$$
où c et d sont des constantes réelles.
3. *Les solutions de l'equation* (3.18) *sont déterminées à deux constantes A et B près. Pour lever ces indéterminations, on peut par exemple spécifier les deux conditions initiales $y_0(t_0)$ et $y_0'(t_0)$ pour un nombre réel t_0 donné.*

3.3.2 Étude de l'équation inhomogène

Le résultat suivant est entièrement similaire à celui de la proposition 3.2.2.

Proposition 3.3.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction continue sur I. Toute solution $y \in \mathcal{C}^2(I)$ de l'équation différentielle* (3.14) *est de la forme*

$$y = y_p + y_0 \tag{3.19}$$

où

- y_p *est une solution particulière de* (3.14).
- y_0 *est une solution de l'équation homogène* (3.15).

Ainsi, ici encore, la résolution de l'équation différentielle ordinaire requiert donc la recherche d'une solution particulière. Si $f(t) = e^{\alpha t}p(t)$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ et p un polynôme de degré n, on pourra construire une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = q(t)e^{\alpha t},$$

où q est un polynôme de degré au plus $n + 2$.

Chapitre 4

Matrices

4.1 Généralités

4.1.1 Définition

Definition 4.1.1. *Soit n et p deux nombres entiers strictement positifs.*

1. *Une matrice A à n lignes et p colonnes est un tableau de n lignes et p colonnes de la forme*
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$
où $a_{i,j}$ ($i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, p]\!]$) sont des nombres réels (appelés coefficients de la matrice). On écrit aussi
$$A = (a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,p]\!]} \tag{4.2}$$
On dit que la matrice A est de taille (ou de type) $n \times p$.
2. *Lorsque $n = p$, on dit que la matrice A est une matrice* ***carrée*** *de taille (ou d'ordre) n. Dans ce cas, on appelle* ***diagonale*** *de la matrice A le vecteur d de longueur n dont les composantes sont les éléments diagonaux de A :*
$$d_i = a_{ii} \quad \in [\![1, n]\!].$$
Si $n \neq p$, la matrice est dite rectangulaire.

Dans la définition précédente, si p et q sont deux entiers, on utilise la notation $[\![p, q]\!]$ pour désigner l'ensemble des nombres entiers compris entre p et q. Par abus de notations, et lorsqu'il n y a pas d'ambiguité, on réécrit parfois (4.2) comme $A = (a_{ij})$.

Donnons quelques exemples de matrices : la matrice A suivante est rectangulaire de taille 2×3
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$
et la matrice
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
est carrée de diagonale $(1, 4)$.

Remarque 4.1.2. *Dans le cadre de ce cours, nous nous restreignons aux matrices réelles. On peut bien sûr étendre cette notion aux matrices complexes ($a_{ij} \in \mathbb{C}$).*

4.1.2 Quelques matrices particulières

Dans les exemples ci dessous n et p sont des nombres entiers strictement positifs.

- **Matrice ligne et matrice colonne :** soit A une matrice de taille $n \times p$. Si $n = 1$, on parle de matrice ligne alors que si $p = 1$, on parle de matrice colonne. Par exemple, les matrices M_ℓ et M_c suivantes sont respectivement une matrice ligne et une matrice colonne de taille 1×3 et 2×1 :
$$M_\ell = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel strictement positif m tout vecteur de $\mathbb{R}^m$, peut être considéré comme une matrice colonne de taille $m \times 1$ ou bien comme une matrice ligne de taille $1 \times m$.

- **Matrice identité :** on appelle matrice identité d'ordre n la matrice carrée d'ordre n notée $I_n = (a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,n]\!]}$ telle que
$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad i \in [\![1,n]\!], \quad j \in [\![1,n]\!].$$
On a
$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matrice nulle :** la matrice nulle de taille $n \times p$, notée dans ce cours 0_{np}, est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.
$$0_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matrice (carrée) diagonale :** on dit qu'une matrice carrée D de taille n est diagonale si $D = (d_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,n]\!]}$ est telle que $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$:
$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$
Autrement dit, une matrice est diagonale si tous ses termes extra-diagonaux sont nuls. Par exemple, la matrice I_n est la matrice diagonale ne contenant que des 1 sur sa diagonale. De même, la matrice carrée nulle $0_{n,n}$ est une la matrice diagonale de taille n dont les éléments diagonaux sont nuls. Enfin, les matrices D_1 et D_2 ci dessous sont diagonales :
$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

- **Matrice (carrée) triangulaire inférieure :** une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,n]\!]}$ de taille n est triangulaire inférieure si les termes situés au dessus de sa diagonale sont nuls :
$$A = (a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,n]\!]} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
Autrement dit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$
$$a_{ij} = 0 \text{ si } j > i.$$
Par exemple, les matrices suivantes sont triangulaire inférieures :
$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

- **Matrice (carrée) triangulaire supérieure :** une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,n]\!]}$ de taille n est triangulaire supérieure si les termes situés en dessous de sa diagonale sont nuls :
$$A = (a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,n]\!]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$
$$A_{ij} = 0 \text{ si } j < i.$$

Les matrices qui suivent sont des matrices triangulaires supérieures :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

On remarque que les matrices diagonales sont les seules matrices à être à la fois triangulaires inférieures et supérieures.

4.1.3 Egalité de deux matrices et transposition

4.1.3.1 Égalité entre deux matrices

Soit n et p deux entiers strictement positifs. Deux matrices $A = (A_{ij})$ et $B = (B_{ij})$ de taille $n \times p$ sont égales si et seulement si

$$B - A = 0_{np},$$

c'est à dire si et seulement si tous leurs termes sont égaux : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$

$$A_{ij} = B_{ij}.$$

Évidemment, on ne peut parler d'égalité entre deux matrices que si celles-ci sont de même taille.

4.1.3.2 Transposition

Definition 4.1.3. *Soit n et p deux entiers strictement positifs.*

- *Soit M une matrice de taille $n \times p$. On appelle matrice transposée de M, notée $M^t = (M^t)_{ij}$, la matrice de taille $p \times n$ définie par*
$$(M^t)_{ij} = M_{ji} \quad i \in [\![1, p]\!], \quad j \in [\![1, n]\!],$$
- *Si M est une matrice carrée telle que $M^t = M$, on dit que la matrice M est **symétrique**.*

La matrice transposée M^t de la matrice M est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de M. Par exemple,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (M_1)^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dans certains ouvrages, la matrice M^t est notée ${}^tM$ ou M^T. On pourra remarquer que la matrice transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure et que les matrices diagonales sont symétriques. Par ailleurs on peut vérifier que
$$(M^t)^t = M,$$
et que si M est une matrice $m \times n$ et N une matrice $n \times p$, alors

$$(MN)^t = N^t M^t.$$

4.2 Opération sur les matrices

4.2.1 Somme de matrices

Definition 4.2.1. *Soit n et p deux entiers strictement positifs et soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de taille $n \times p$. On définit par $S = (s_{ij}) = A + B$ la matrice de taille $n \times p$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$*

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \textit{(addition termes à termes).}$$

Il est important de noter que l'on ne peut additionner deux matrices que si elles sont de même taille. En utilisant la définition précédente, on montre les propriétés suivantes :

1. l'addition matricielle est commutative : si A et B sont des matrices de même taille, alors $A + B = B + A$.
2. l'addition matricielle est associative : si A,B et C sont des matrices de même taille, alors,

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

4.3 Multiplication par un scalaire

Definition 4.3.1. *Soit n et p deux entiers strictement positifs, $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $n \times p$ et λ un nombre réel. On définit par $M = (M_{ij}) = \lambda A =$ la matrice de taille $n \times p$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, p]\!]$*

$$M_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Ainsi, la matrice $M = \lambda A$ est obtenue en multipliant chaque terme de A par λ.

4.3.1 Multiplication matricielle (multiplication entre deux matrices)

Definition 4.3.2. *Soit m, n et p trois entiers strictement positifs, A une matrice de taille $n \times m$ et B une matrice de taille $m \times p$. On définit $P = (p_{ij}) = AB$ comme étant la matrice de taille $n \times p$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$*

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}.$$

Autrement dit, Le nombre p_{ij} correspond au produit scalaire entre la ligne i de A et la colonne j de B. On remarquera que pour pouvoir effectuer la multiplication entre deux matrices A et B, le nombre de colonnes de A doit coïncider avec le nombre de lignes de B.

Remarque 4.3.3. *Contrairement à l'addition, la multiplication matricielle n'est pas commutative. En effet, si A et B sont des matrices carrées de même taille, alors en général*

$$AB \neq BA.$$

Ci dessous, voici quelques exemples de multiplications matricielles.

- Multiplication d'une matrice 2×3 par une matrice 3×3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad P = AB = \begin{bmatrix} 3 & 25 & 4 \\ 12 & 14 & 6 \end{bmatrix}.$$

- Multiplication d'une matrice 1×2 par une matrice 2×1 (produit scalaire en une matrice ligne et une matrice colonne) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad P = AB = [11]. \tag{4.3}$$

- Multiplication d'une matrice 2×2 par une matrice 2×1 (produit matrice-vecteur) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P = AB = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

On pourra remarquer qu'il existe des matrices A et B non nulles telles que $AB = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad P = AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.3.2 Matrices carrées

Dans cette partie, nous nous intéressons aux propriétés de matrices carrées.

4.3.3 Matrice inverse

Definition 4.3.4. *Soit A une matrice carrée de taille n. On dit que la matrice A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B de taille n telle que*

$$AB = BA = I_n. \tag{4.4}$$

Dans le cas où B existe, on note $B = A^{-1}$ et on dit que B est la matrice inverse de A.

Remarque 4.3.5.

- *Il existe au plus une matrice B satisfaisant* (4.4)*, ce qui signifie que si la matrice inverse existe, elle est unique.*
- *Une matrice A telle que $A^{-1} = A^t$ est dite matrice orthogonale (ou unitaire).*
- *Si A et B sont deux matrices inversibles de même taille alors on peut vérifier que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

On remarquera que la matrice nulle n'est pas inversible. La question de l'inversibilité d'une matrice est une question importante puisqu'elle apparait dans de très nombreuses applications. On a le critère d'inversibilité suivant :

Proposition 4.3.6. *Une matrice carrée A de taille n est inversible si et seulement pour tout vecteur colonne (ou matrice colonne) $u \in \mathbb{R}^n$ non identiquement nul, $Au \neq 0$.*

Le critère précédent n'est pas toujours simple à utiliser. Le connaissance du déterminant (défini dans la prochaine section) fournit un autre moyen de savoir si la matrice est inversible.

4.3.4 Déterminants

Dans cette partie, nous définissons par récurrence le déterminant d'une matrice carrée. Nous commençons par le cas $n = 2$.

4.3.4.1 Matrice carrée de taille 2

Definition 4.3.7. *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de taille 2 :*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Le déterminant de A, noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ est le nombre réel défini par

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Dans le cas d'une matrice carrée A de taille 2, il est facile de voir que son déterminant est nul si ses colonnes ou ses lignes sont colinéaires (ce qui correspond à la non inversibilité de la matrice).

4.3.4.2 Matrice carrée de taille n ($n \in \mathbb{N} n \geq 2$)

Par récurrence, on peut étendre la définition du déterminant de A à une matrice carrée de taille n.

Definition 4.3.8. *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de taille n.*

- *On appelle $A_{k\ell}$ la sous matrice carrée de taille $n-1$ obtenue en supprimant la ligne k et la colonne ℓ de A.*
- *Le déterminant de A est donné par la formule suivante :*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \\ &= a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{1+n} \det(A_{1n}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Remarque 4.3.9.

- *Le déterminant est parfois aussi défini comme*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det(A_{i1}) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) + \cdots + (-1)^{1+i} a_{i1} \det(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{1+n} \det(A_{n1}). \tag{4.6}$$

  On peut montrer que les deux définitions sont équivalentes.
- *Le déterminant d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) est égal au produit de ses coefficients diagonaux.*

4.3.4.3 Propriétés du déterminant

La proposition suivante liste certaines propriétés importantes du déterminant :

Proposition 4.3.10. *Soit n un entier strictement positif, A et B deux matrices carrées de taille n et λ un nombre réel.*

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- $\det A = \det(A^t)$.

On peut montrer le théorème fondamental suivant :

Théorème 4.3.11. *Soit n un entier strictement positif et A une matrice carrée de taille n. Alors A est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$.

En pratique, pour calculer des déterminants, on pourra utiliser les propriétés suivantes :

Proposition 4.3.12. *Soit n un entier strictement positif et A une matrice carrée de taille n.*

- *Si A a deux lignes ou deux colonnes égales, alors* $\det A = 0$.
- *Soit A_1 la matrice obtenue à partir de A en multipliant une ligne de A par un nombre réel λ. Alors*

$$\det A_1 = \lambda \det A.$$

- *Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$ deux indices tels que $i \neq j$ et soit A_2 la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes i et j de A. Alors*

$$\det A_2 = -\det A.$$

- *Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$ deux indices tels que $i \neq j$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit A_3 la matrice obtenue à partir de A en ajoutant à la ligne i de A λ fois la ligne j de A. Alors*

$$\det A_3 = \det A.$$

4.4 Résolution de systèmes linéaires carrés : la méthode du pivot de Gauss

4.4.1 Définiton d'un sytème linéaire carré

Pour terminer ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution de systèmes de n équations linéaires à n inconnues. Par exemple, nous cherchons les deux nombres réels x_1 et x_2 tels que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Les équations $x_1 + x_2 = 1$ et $x_1 - x_2 = 0$ sont dites linéaires (par rapport à x_1 et x_2) car elles sont obtenues en faisant des combinaisons linéaires des inconnues x_1 et x_2. Par ailleurs, on dit que le système précédent est carré car il y a le même nombre d'équations que d'inconnues. Ainsi, le système d'équation (4.7) est un système de deux équations linéaires à deux inconnues. De même, le système d'équations suivant est un système de 3 équations linéaires à 3 inconnues :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_3 = 7. \end{cases} \tag{4.8}$$

On remarque que l'on peut réécrire les deux systèmes précédents sous forme matricielle de type $Ax = b$ où A est une matrice carrée et x et b sont des vecteurs (ou matrices colonnes). Dans le premier cas, on a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

alors que dans le second cas,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Par contre, notons que le système

$$\begin{cases} x_1 + (x_2)^2 = 7, \\ \ln x_1 + \cos x_2 = 0. \end{cases}$$

est bien un système de deux équations à deux inconnues mais les équations ne sont pas linéaires. Sa résolution dépasse le cadre de ce cours.

Nous pouvons maintenant donner une définition générale d'un système de n équations linéaires à n inconnues.

Definition 4.4.1. *Soit n un entier strictement positif. On appelle système de n équations linéaires à n inconnues le problème suivant : connaissant les n données $(b_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, trouver les n inconnues $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ telles que*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn} = b_n. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1^n} a_{ij}x_j = b_i \ \textit{ pour tout } i \in [\![1, n]\!]. \tag{4.9}$$

En introduisant la matrice carrée $A = (a_{ij})$ de taille n

$$A = (a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,n]\!]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

ainsi que les vecteurs (ou matrices colonnes) x et b

$$x = (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = (b_i)_{i\in[\![1,n]\!]} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

le système (4.9) *peut être réécrit sous forme matricielle : chercher le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$Ax = b. \tag{4.11}$$

L'objectif de cette partie est de répondre aux deux questions suivantes :

1. Est ce que le système (4.9) admet une solution ? Si oui, est elle unique ?
2. Si le système admet une unique solution, comment peut-on calculer cette solution ?

4.4.2 Existence et unicité

Pour répondre à la première question posée, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 4.4.2. *Le système linéaire* (4.9) *admet une unique solution si et seulement si la matrice A associée (définie par* (4.10)*) est inversible (si et seulement* $\det A \neq 0$*)*

Remarque 4.4.3. *Dans le cas où A n'est pas inversible, il y a deux cas possibles. Soit il n'y a pas de solution, soit il y en a une infinité.*

4.4.3 Résolution de systèmes linéaires par la méthode de Gauss

4.4.3.1 Résolution des systèmes triangulaires par substitution

Nous partons du constat suivant : les systèmes triangulaires (i.e. les systèmes pour lesquels la matrice associée au système linéaire est triangulaire) sont faciles à résoudre par la méthode de substitution. Par exemple, le système triangulaire supérieur

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_3 = 1 \end{cases}$$

est facilement résolu en utilisant la méthode dite de 'remontée' :

1. On résout d'abord la troisième (et dernière équation) et on obtient x_3 :
$$x_3 = \frac{1}{5}.$$
2. On substitue x_3 par sa valeur dans la seconde équation et on obtient x_2 :
$$x_2 = \frac{1}{2}(1 - x_3) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{5}) = \frac{2}{5}.$$
3. On substitue x_2 et x_3 par leur valeur dans la première équation et obtient x_1 :
$$x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 - \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}.$$

La technique précédente se généralise facilement à tous les systèmes triangulaires supérieurs, quelle que soit leur taille. Remarquons que la résolution est possible si la matrice associée est inversible (i.e. puisqu'ici la matrice A est triangulaire, il suffit que les termes diagonaux de A soient tous non nuls).

4.4.3.2 Présentation générale de l'algorithme de Gauss

Ce constat en tête, l'algorithme de Gauss (ou du pivot de Gauss) pour la résolution du système linéaire (4.9) est le suivant :

- **Étape 1 (élimination) :** en faisant des combinaisons linéaires des équations, on transforme le système linéaire (4.9) ($Ax = b$) en un système équivalent
$$Tx = d \tag{4.12}$$
où T est une matrice triangulaire supérieure.
- **Étape 2 (remontée) :** on résout le système triangulaire (4.12) obtenu à l'aide de la méthode de 'remontée'.

4.4.3.3 Description de l'étape d'élimination de l'algorithme de Gauss (Étape 1)

L'étape d'élimination de l'algorithme de Gauss est basée sur le fait que l'on ne change pas la solution d'un système linéaire si, à une des équations de ce système, on ajoute une combinaison linéaire des autres équations. Ainsi, par un nombre fini de combinaisons linéaires des équations, on va pouvoir transformer n'importe quel système linéaire en un système triangulaire.

Nous allons détailler l'étape 1 dans le cas d'un exemple :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 & \text{(eq1)} \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 & \text{(eq2)} \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & \text{(eq3)} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

a- On élimine l'inconnue x_1 des équations 2 et 3 (par combinaisons linéaires des équations 2 et 3 avec l'équation 1) : plus précisément, on effectue les combinaisons linéaires suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \text{(eq1)} \leftarrow \text{(eq1)} \\ \text{(eq2)} \leftarrow \text{(eq2)} - 3 \times \text{(eq1)} \\ \text{(eq3)} \leftarrow \text{(eq3)} - 5 \times \text{(eq1)} \end{array} \right.$$

Le tableau précédent est à comprendre au sens suivant : la première équation reste inchangée. La seconde équation est remplacée par l'ancienne seconde équation moins trois fois la première équation. La troisième équation est remplacée par l'ancienne troisième équation moins cinq fois la première équation. Matriciellement, cette opération consiste à réaliser des combinaisons linéaires des lignes L_i ($i \in [\![1, 3]\!]$) de la matrice et du second membre :

$$\left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{array} \right.$$

Ainsi, le système linéaire (4.13) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 & \text{(eq1)} \\ 0 - x_2 + 4x_3 = -7 & \text{(eq2)} \\ 0 - 3x_2 + 4x_3 = -19 & \text{(eq3)} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -19 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Autrement dit cette étape consiste à 'faire apparaitre des 0 sur les coefficients sous diagonaux de la première colonne de la matrice du système linéaire'.

b- On élimine l'inconnue x_3 de la troisième équation de (4.14) : plus précisément, on effectue les combinaisons linéaires suivantes

$$\left| \begin{array}{l} \text{(eq1)} \leftarrow \text{(eq1)} \\ \text{(eq2)} \leftarrow \text{(eq2)} \\ \text{(eq3)} \leftarrow \text{(eq3)} - 3 \times \text{(eq1)} \end{array} \right.$$

D'un point de vue matriciel, cela revient à effectuer les combinaisons linéaires suivantes sur la matrice et le second membre :

$$\left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$$

Ainsi, le système linéaire (4.14) (et donc le système (4.13)) est équivalent au système triangulaire supérieur suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 & \text{(eq1)} \\ 0 - x_2 + 4x_3 = -7 & \text{(eq2)} \\ 0 + 0 - 8x_3 = 6 & \text{(eq3)} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Cette étape consiste donc à 'faire apparaitre des 0 sur les termes sous diagonaux de la deuxième colonne de la matrice'.

On a ainsi obtenu un système triangulaire équivalent au système de départ, ce qui termine l'étape d'élimination de l'algorithme de Gauss. Si on suit (4.12), la matrice T et le vecteur d sont donc donnés par

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

La second étape de l'algorithme (étape de substitution) consiste alors à mettre en oeuvre la méthode de remontée décrite dans le paragraphe 4.4.3.1. Finalement, on obtient

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ 6 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

qui satisfait bien le système linéaire initial (4.13).

Échange entre deux lignes L'algorithme d'élimination décrit ci-dessus peut être généralisé à n'importe quelle matrice carrée de taille n. Cependant, certaines étapes nécessitent une sous étape préliminaire consistant à échanger deux lignes. C'est par exemple le cas pour le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & \text{(eq1)} \\ 0 + 0 + 2x_3 = 1 & \text{(eq2)} \\ 0 + x_2 + 8x_3 = 6 & \text{(eq3)} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Dans le système ci-dessus, les éléments sous diagonaux de la première colonne de la matrice sont déjà nuls. On peut donc considérer que l'étape a- de l'étape d'élimination a déjà été réalisée. Nous pouvons passer directement à l'étape b- qui consiste à éliminer x_2 de la troisième équation. Or, il se trouve que la variable x_2 est en fait déjà éliminée de la deuxième équation. Cela se traduit par la présence d'un 0 au niveau du second coefficient diagonal de la matrice (ce coefficient est appelé pivot pour l'étape b de l'algorithme d'élimination). Cela nous empêche d'éliminer x_2 de la troisième équation à partir d'une combinaison linéaire des équations 2 et 3. Pour remédier à ce problème, on peut échanger les équations 2 et 3 afin d'obtenir un pivot non nul. On obtient alors

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & \text{(eq1)} \\ 0 + x_2 + 8x_3 = 6 & \text{(eq2)} \\ 0 + 0 + 2x_3 = 1 & \text{(eq3)} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

On pourra ensuite continuer les étapes de l'algorithme d'élimination de Gauss comme précédemment.

Remarque 4.4.4. *Si l'échange entre deux lignes n'est pas possible (ce qui revient à dire qu'à l'etape k, le terme diagonal de la colonne k ainsi tous ses termes sous diagonaux sont nuls), cela signifie simplement que la matrice n'est pas inversible.*