

Mathématiques : cours d'harmonisation contrôle

Une feuille de notes de cours recto-verso manuscrite est autorisée.
Cette feuille doit être rendue avec votre copie à la fin du contrôle.

Exercice 1 : nombres complexes (5.5 points)

1. On considère les nombres complexes u et v suivants :

$$u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad v = 1 - i.$$

- (a) Calculer le module et un argument des nombres complexes u et v .
(b) En déduire le module et un argument du nombre complexe $w = \frac{u}{v}$.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z satisfaisant l'équation

$$z^2 - (5i + 14)z + 2(5i + 12) = 0.$$

On pourra remarquer que $125^2 = 15625$.

Exercice 2 : intégrales (3.5 points)

1. Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \sin x \cos^2 x$.
2. Montrer que $\cos^3 x = \cos x - \cos x \sin^2 x$.
3. En déduire

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x \cos^2 x.$$

Exercice 3 : limites (3 points)

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}.$$

Exercice 4 (4 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$. On note C_f la courbe représentative de f .

- Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- Calculer $f(1+x)$ et $f(1-x)$. Que peut-on déduire pour la courbe C_f ?
- Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f .
- Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

Exercice 5 : équations différentielles (6 points)

1. On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + 4y(x) = \sin(3x)e^{-4x} \tag{1}$$

- (a) Déterminer les solutions de l'équation homogène associée (i.e. les solutions de $y'(x) + 4y(x) = 0$).
(b) Déterminer une solution particulière de l'équation (1). On pourra chercher une solution particulière de la forme $y_{\text{part}}(x) = K(x)e^{-4x}$.
(c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).
2. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$x^3 y' - x^2 y = 1 + x^3 \ln x.$$