Sup'Galilée
Etudiants ingénieurs apprentis 1ère année

25/09/2015 9h00-12h00

Mathématiques : cours d'harmonisation contrôle

Une feuille de notes de cours recto manuscrite est autorisée.
Cette feuille doit être rendue avec votre copie à la fin du contrôle.

Le sujet comporte **deux pages**.

Les exercices 1 à 4 sont des applications directes du cours et des travaux dirigés.

Exercice 1 : nombres complexes (3 points)

1. Déterminer l'ensemble de nombres complexes z_1 et z_2 tels que

$$(z_1)^2 = 5 + 12i \quad \text{et} \quad (z_2)^2 = 5e^{-i\pi/8}.$$

2. Trouver l'ensemble des nombres complexes z qui satisfont

$$3z^2 + \sqrt{5}z - i = 0.$$

Exercice 2 : calcul de limites et d'intégrales (5 points)

1. Calculer les trois limites suivantes :

$$(a) \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4 - 2x^2 + \sqrt{2}}{x^3 + 7}, \quad (b) \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}} \quad (c) \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

2. Calucler les deux intégrales suivantes en utilisant la formule d'intégration par parties :

$$(a) \int_0^1 xe^{3x}dx, \quad (b) \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + x + 2)\cos(x)dx.$$

Exercice 3 : équation différentielle ordinaire (3 points)

On s'intéresse à l'équation différentielle ordinaire

$$y'(x) + 2y(x) = 40 \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

1. Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (1).
2. Trouver une solution particulière de l'équation (1) (on pourra chercher une solution constante).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (1) et déterminer l'unique solution y telle que $y(0) = 0$.

Exercice 4 : résolution de système linéaire (3 points)

Résoudre le système linéaire suivant en utilisant la méthode du pivot de Gauss (on admet que ce système a une solution unique) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 2 \\ -2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2\,x_3 & = & -5 \end{array}\right.$$

Exercice 5 : problème général (6 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} e^{x\ln|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Expliquer pourquoi f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Calculer la dérivée de f sur chacun de ces intervalles.
4. Montrer que
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{h \ln h} - 1}{h \ln h} = 1.$$
5. En déduire que
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{h \ln h} - 1}{h} = -\infty.$$
6. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.