Sup'Galilée 25/09/2015 9h00-12h00
Etudiants ingénieurs apprentis 1ère année

Mathématiques : cours d'harmonisation
correction du contrôle

Exercice 1 : nombres complexes (3 points)

1. Déterminer l'ensemble de nombres complexes z_1 et z_2 tels que $(z_1)^2 = 5 + 12i$ $(z_2)^2 = 5e^{-i\pi/8}$.

   Correction :
   - On cherche z sous la forme $z_1 = x + iy$. On a

   $$(z_1)^2 = z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Re(z_1) = 5 \\ Im(z_1) = 12 \\ |z_1|^2 = \sqrt{169} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

   On somme la première equation et la troisième équation, on trouve $x = \pm 3$. On fait la différence entre la troisième équation et la première équation, on trouve $y = \pm 2$. En utilisant la deuxième équation, on voit que $2xy$ est positif si bien que x et y ont le même signe. Finalement, les deux solutions sont $-3 - 2i$ et $3 + 2i$.

   - On cherche z_2 sous forme exponentielle, c'est à dire $z_2 = re^{i\theta}$ où r est un réel positif et θ est un réel. Alors $(z_2)^2 = r^2e^{2i\theta} = 5e^{-i\pi/8}$. On en déduit,

   $$\begin{cases} r = \sqrt{5} \\ 2\theta = -\pi/8 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{5} \\ \theta = -\pi/16 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

   Finalement les deux solutions sont $\sqrt{5}e^{-i\pi/16}$ et $\sqrt{5}e^{i15\pi/16}$.

2. Trouver l'ensemble des nombres complexes z qui satisfont

   $$3z^2 + \sqrt{5}z - i = 0.$$

   Correction : $\Delta = (\sqrt{5})^2 - 4 \times 3 \times (-i) = 5 + 12i$. On pose $d = 3 + 2i$ (d'après la première question que $d^2 = 5 + 12i$), les racines de l'equation sont alors

   $$z_1 = \frac{-\sqrt{5} + (3 + 2i)}{6} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-\sqrt{5} - (3 + 2i)}{6}$$

Exercice 2 : calcul de limites et d'intégrales (5 points)

1. Calculer les trois limites suivantes :

   $$(a) \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4 - 2x^2 + \sqrt{2}}{x^3 + 7}, \quad (b) \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}} \quad (c) \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

   Correction :

   (a) D'après les résultats du cours sur les limites de fonctions rationnelles, on sait que

   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4 - 2x^2 + \sqrt{2}}{x^3 + 7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} 5x = -\infty.$$

   (b) On sait que $-1 \leq \sin(x^2) \leq 1$. Donc $-\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = 0$, on peut appliquer le théorème de comparaison des limites (aussi appelé théorème des gendarmes) pour conclure que

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}} = 0.$$

   (c) Le développement limité du numérateur est donné par $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, si bien que $\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(x)$ et

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

2. Calucler les deux intégrales suivantes en utilisant la formule d'intégration par parties :

$$(a)\ \int_0^1 xe^{3x}dx, \quad (b)\ \int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x+2)\cos(x)dx.$$

Correction :

(a) On pose $u(x) = x$ ($u'(x) = 1$) et $v'(x) = e^{3x}$ ($v(x) = \frac{e^{3x}}{3}$). On applique alors la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 x\,e^{3x}\,dx = \left[\frac{x\,e^{3x}}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x} = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{e^{3x}}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{9} + \frac{2\,e^3}{9}.$$

(b) On applique deux fois successivement la formule d'intégration par parties :
- première I.P.P : $u(x) = (x^2+x+2)$, $u'(x) = 2x+1$, $v'(x) = \sin(x)$, $v(x) = \cos(x)$.
- seconde I.P.P : $u(x) = 2x+1$, $u'(x) = 2$, $v'(x) = -\sin(x)$, $v(x) = \cos(x)$.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x+2)\cos(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)(-\sin(x))dx + \underbrace{[-\sin(x)(2x+1)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} \\ &= -2\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)dx + [(2x+1)\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -4\pi.\end{aligned}$$

Exercice 3 : équation différentielle (3 points)

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = 40 \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

1. Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (1).

   Correction : L'équation (1) est une différentielle ordinaire d'ordre 1 linéaire à coefficients constants. D'après les résultats du cours, l'ensemble des solutions de l'equation homogène associée ($y'(x) + 2y(x) = 0$) sont les fonctions y_0 de la forme

   $$y_0(x) = c\,e^{-2x}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (\text{éventuellement } c \in \mathbb{C}).$$

2. Trouver une solution particulière de l'équation (1) (on pourra chercher une solution constante).

   Correction : on cherche une solution particuler constante $y_p = k$. Alors $(y_p(x)))' + 2y(x) = 2k$. On prend donc $y_p = 20$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de (1) et déterminer l'unique solution y telle que $y(0) = 0$.

   Correction : D'après les résultats du cours sur les solutions des équations différentielles ordinaires linéaires du premier ordre, l'ensemble des solutions y est donné par

   $$y(x) = 20 + c\,e^{-2x} \quad c \in \mathbb{R} \quad (\text{éventuellement } c \in \mathbb{C}).$$

   On calculer c pour que $y(0) = 0$. On a $y(0) = 20 + c$, si bien que l'unique solution de (1) qui satisfait $y(0) = 0$ est

   $$y(x) = 20(1 - e^{-2x}).$$

Exercice 4 : résolution de système linéaire (3 points)

Résoudre le système linéaire suivant en utilisant la méthode du pivot de Gauss (on admet que ce système a une solution unique) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 2 \\ -2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2\,x_3 & = & -5 \end{array}\right. \tag{2}$$

Correction :

1. On transforme le système en un système triangulaire supérieur en faisant des combinaisons linéaires des équations :

(a) On 'élimine' l'inconnue x_1 des deuxième et troisième équations. Plus précisemment, on effectue les combinaisons linéaires suivantes : $L_1 \leftarrow L_1$ (la première équation reste inchangée), $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ (on ajoute deux fois la première équation à la seconde), $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ (on ajoute la première et troisième équation). On obtient

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 2 \\ & & 5x_2 & + & 7x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 5\,x_3 & = & -3 \end{array}\right.$$

(b) On 'élimine' l'inconnue x_2 de la troisième équation. $L_1 \leftarrow L_1$, $L_2 \leftarrow L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_2/5$. On obtient alors le système triangulaire supérieur suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 2 \\ & & 5x_2 & + & 7x_3 & = & 3 \\ & & & & \dfrac{18}{5}\,x_3 & = & -\dfrac{18}{5} \end{array}\right.$$

2. On résoud le système triangulaire obtenu par substitutions :

(a) La troisième équation donne $x_3 = -1$.

(b) On substitue x_3 dans la seconde équation, on en déduit x_2 :

$$5x_2 = 3 - 7x_3 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

(c) On substitue x_2 et x_3 dans la première équation, on en déduit x_1 :

$$x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_3 = 1.$$

Finalement, la solution du système linéaire (2) est le vecteur

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : problème général (6 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} e^{x\ln|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction : on calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$. Comme, d'après les résultats du cours $\lim_{x\to 0} x\ln|x| = 0$, alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, si bien que f est continue en 0. Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, $f(x) = e^{x\ln(-x)}$. Comme la fonction $x \mapsto \ln x$ est continue et sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]-\infty, 0[$. De plus, la fonction $x \mapsto x$ est continue sur $]-\infty, 0[$. Donc le produit $x \mapsto x\ln|x|$ est continu sur $]-\infty, 0[$. Comme, par ailleurs, la fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction f (otenue par composition de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x\ln|x|$) est continue sur $]-\infty, 0[$. Par les mêmes arguments, on montre que f est continue sur $]0, +\infty[$. Puisque f est également continue en 0 alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Correction : on rappelle que $\lim_{x\to\pm\infty} x\ln|x| = \pm\infty$. Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln|x|} = 0.$$

3. Expliquer pourquoi f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Calculer la dérivée de f sur chacun de ces intervalles.

Correction : sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, $f(x) = e^{x\ln(-x)}$. Comme la fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable et sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$. De plus, la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$. Donc le produit $x \mapsto x\ln|x|$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$. Comme, par ailleurs, la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f (otenue par composition de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x\ln|x|$) est dérivable sur $]-\infty, 0[$. Par les mêmes arguments, on montre que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. On a

$$(x\ln|x|)' = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } x > 0, \\ \ln(-x) + 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc, pour tout $x \neq 0$

$$f'(x) = (\ln|x| + 1)e^{x\ln|x|}$$

4. Montrer que
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h\ln h}-1}{h\ln h} = 1.$$
Correction : en utilisant par exemple la limite du taux d'accroissement (ou un développement limité), on montre que
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$$
Comme par ailleurs $\lim_{h\to 0^+} h\ln h = 0$, par composition des limites, on en déduit que
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h\ln h}-1}{h\ln h} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1.$$

5. En déduire que
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h\ln h}-1}{h} = -\infty.$$
Correction : en utilisant le résultat de la question précédente (ainsi que les résultats usuels sur la mutliplication des limites), on a
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h\ln h}-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \ln h \left(\frac{e^{h\ln h}-1}{h\ln h}\right) = -\infty.$$

6. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

Correction : évaluons la limite du taux d'accroissement de f en 0, c'est à dire $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$. En utilisant la question précédente, on a
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h\ln h}-1}{h} = -\infty,$$
si bien que la limite du taux d'accroissement est infinie. Donc f n'est pas dérivable en 0.