Sup'Galilée
MACS1

26 septembre 2016

Harmonisation en mathématiques
Contrôle
durée : 2 heures

Une feuille de notes de cours recto manuscrite est autorisée.
Cette feuille doit être rendue avec votre copie à la fin du contrôle.

Exercice 1 : nombres complexes (5 points)

1. Mettre sous forme algébrique et exponentielle le nombre
$$z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$$
2. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.
   (a) Exprimer $|z-i|^2$ et $|z+i|^2$ en fonction de x et y.
   (b) Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est réel.
3. Trouver l'ensemble des nombres complexes z qui satisfont
$$z^2 - 2iz + (2i-1) = 0.$$

Exercice 2 : équations différentielles ordinaires (3 points)

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle ordinaire suivante :
$$y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^x} \tag{1}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée.
2. Montrer que la fonction $y_p = e^{-x}\ln(e^x+1)$ est solution particulière de (1).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

Exercice 3 : étude de fonction (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} & \text{si } x \text{ appartient à } \ ]-1,0[\cup]0,+\infty[, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Expliquer pourquoi f est continue et dérivable sur les intervalles $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ et calculer la dérivée f' de f sur $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$.
2. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$.
3. Montrer que f est continue sur $]-1,+\infty[$.
4. f est-elle dérivable en 0 ?
5. Calculer $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 4 : intégration (5 points)

Soit n un entier positif ou nul et soit
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2 (remplacer n par 0, 1 et 2 dans l'expression précédente).
2. Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Montrer que
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$