Sup'Galilée
MACS1

26 septembre 2016

Cours en harmonisation mathématiques
Contrôle

durée : 2 heures

Une feuille de notes de cours recto manuscrite est autorisée.
Cette feuille doit être rendue avec votre copie à la fin du contrôle.

Exercice 1 : nombres complexes (5 points)

1. Mettre sous forme algébrique et exponentielle le nombre
$$z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$$
2. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.
   (a) Exprimer $|z-i|^2$ et $|z+i|^2$ en fonction de x et y.
   (b) Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est réel.
3. Trouver l'ensemble des nombres complexes z qui satisfont
$$z^2 - 2iz + (2i-1) = 0.$$

Correction:

1.
$$z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-4(1-i\sqrt{3})}{1+3} = -1 + i\sqrt{3} = 2(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\,e^{2i\pi/3}.$$

2. (a) $|z-i|^2 = x^2 + (y-1)^2$ et $|z+i|^2 = x^2 + (y+1)^2$.
   (b) $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si $|z-i|^2 = |z+i|^2$. Or
$$|z-i|^2 = |z+i|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+(y-1)^2 = x^2+(y+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = (y+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y-1 = y+1 \\ y-1 = -(y+1) \end{cases}$$
   Comme l'équation $y-1 = y+1$ n'a pas de solution (puisqu'elle est équivalente à $-1 = 1$), on a
$$|z-i|^2 = |z+i|^2 \quad \Leftrightarrow \quad y-1 = -y-1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$$
   ce qui signifie que z est réelle. Géométriquement, l'ensemble des points tels que $|z-i| = |z+i|$ est la médiatrice du segment $[i, -i]$ et correspond donc à l'axe réel.

3. $\Delta = (-2i)^2 - 4(2i-1) = -8i$. On pose $d = \sqrt{8}e^{-i\pi/4} = 2-2i$, alors $d^2 = -8i$. L'équation admet donc deux solutions données par
$$r_1 = \frac{2i + (2-2i)}{2} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{2i-(2-2i)}{2} = -1+2i.$$

□

Exercice 2 : équations différentielles ordinaires (3 points)

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle ordinaire suivante :
$$y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^x} \tag{1}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée.
2. Montrer que la fonction $y_p = e^{-x}\ln(e^x+1)$ est solution particulière de (1).
3. En déduire l'ensemble des solution de (1).

Correction:

1. Les solutions de l'equation homogène associée à (1) sont les fonctions y de la forme $y = k\,e^{-x}$ où k est une constante réelle.
2. $$y_p' = -e^{-x}\ln(e^x+1) + e^{-x}\frac{e^x}{e^x+1} = -y_p + \frac{1}{1+e^x}.$$
3. Les solutions de l'équation (1) sont les fonctions de la forme $y(x) = y_p(x) + k\,e^{-x}$ où k est une constante réelle.

□

Exercice 3 : études de fonctions (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} & \text{si } x \text{ appartient à }]-1,0[\cup]0,+\infty[, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Expliquer pourquoi f est continue et dérivable sur les intervalles $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ et calculer la dérivée f' de f sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
2. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)-x$.
3. Montrer que f est continue sur $]-1,+\infty[$.
4. f est-elle dérivable en 0 ?
5. Calculer $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Correction:

1. Sur les intervalles $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$, les fonctions $x\mapsto\ln(1+x)$, $x\mapsto x$ et $x\mapsto x^2$ sont continues et dérivable. De plus la fonction $x\mapsto x$ ne s'annule pas. Donc la fonction f est continue et dérivable sur $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$.
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2\ln(1+x) - 2x\ln(1+x) + 2x}{x^3(1+x)}$$
2. En utilisant les développements limités usuels, on trouve
$$\ln(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + O(x^4).$$
Donc
$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$
$\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$, f est continue en 0. Donc, en utilisant la question 1, f est continue sur $]-1,+\infty[$.
3. $$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0} -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3}x + o(x) = -\infty$$
et
$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0} -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3}x + o(x) = +\infty$$
4. $\lim_{x\to-1}\ln(1+x) = -\infty$ donc $\lim_{x\to-1}\ln(1+x) - x = -\infty$. Par conséquent
$$\lim_{x\to-1} f(x) = \frac{1}{(-1)^2}\lim_{x\to-1}\ln(1+x) - x = -\infty.$$
En utilisant les résultats de croissances comparées on sait que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2} = 0$. Donc
$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

□

Exercice 4 : intégration (5 points)

Soit n un entier positif ou nul et soit

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2 (remplacer n par 0, 1 et 2 dans l'expression précédente).
2. Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Montrer que

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

Correction:

1.

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1dx = \frac{\pi}{2} \quad I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1,$$

et

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos(2x))dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}[\sin 2x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

2. La fonction $x \mapsto \sin x$ est positive sur $]0, 2\pi[$. Donc, pour tout entier naturel strictemement positif,la fonction $x \mapsto \sin^n x$ est positive sur $]0, 2\pi[$ puisque la fonction $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Cette propriété est évidemment vraie aussi pour $n = 0$ pusique $\sin^0(x) = 1 \geq 0$. En utilisant la propriété de monotonie l'intégrale, on a donc

$$\int_0 \sin^n x dx \geq 0.$$

3.

4. Comme $x \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin x \leq 1$. Donc, pour tout entier naturel n,

$$0 \leq \sin^{n+1}(x) = \underbrace{\sin x}_{\in[0,1]} \sin^n(x) \leq \sin^n(x).$$

En utilisant de nouveau la propriété de monotonie de l'intégrale, on a donc

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \leq I_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui signifie que la suite I_n est décroissante.

$$I_{n+2} \quad = \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(x)\sin^x dx$$

Posons $u(x) = \sin^{n+1}(x)$ $(u'(x) = (n+1)\cos(x)\sin^n(x)$ et $v'(x) = \sin^x$ $(v(x) = -\cos x)$. En utilisant la formule d'intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= -\int_0^{\pi/2} (-\cos x)\cos(x)(n+1)\sin^n(x) + \underbrace{[-\cos x \sin^{n+1}(x)]_0^{\pi/2}}_{=0} \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^2}_{=1-\sin^2 x} \sin^n(x)dx \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx - (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(x)dx \\
&= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

□