Sup'Galilée
Etudiants ingénieurs apprentis $1^{\text{ère}}$ année

26/09/2017

Examen
13h45-15h15

Une feuille de notes de cours recto-verso manuscrite est autorisée.
Cette feuille doit être rendue avec votre copie à la fin du contrôle.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 (Fonctions) (9 points)

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $]-1, 0[$ et sur $]0, 1[$.
2. Déterminer
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x).$$
3. Montrer que f est continue et dérivable en 0.
4. Calculer $f'(x)$.
5. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition (dresser le tableau de variations de f).

Exercice 2 (Intégrales) (4 points)

1. Calculer l'intégrale suivante :
$$\int_1^e \ln t dt.$$
2. Montrer que $\cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$. En déduire
$$\int_0^\pi \cos^2 t \, dt.$$

Exercice 3 (12 points)

L'objectif de cet exercice est de résoudre le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - 2x_3(t) \\ x_3'(t) = 3x_1(t) - 3x_2(t) + x_3(t). \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Les inconnues du système précédent sont les fonctions $t \to x_1(t)$, $t \to x_2(t)$, $t \to x_3(t)$. On pose

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \qquad X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix}.$$

On remarque que $X : t \mapsto X(t)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque. *Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.*

1. **Résolution d'un système d'E.D.0 diagonal.**

(a) Soit $d \in \mathbb{R}^*$. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$x'(t) = dx(t). \tag{2}$$

(b) Soit D une matrice diagonale inversible carrée de taille 3 :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad d_1 \in \mathbb{R}^*, \quad d_2 \in \mathbb{R}^*, \quad d_3 \in \mathbb{R}^*.$$

Déterminer l'ensemble des solutions du système d'E.D.0

$$X'(t) = DX(t).$$

On pourra réécrire le système matriciel comme un système de trois équations différentielles ordinaires du premier ordre découplées de type (2).

2. **Forme matricielle du système** (1) : montrer que le système (1) peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$X'(t) = MX(t) \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Introduction d'une matrice P et calcul de son inverse :** on introduit la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) À l'aide de la méthode de Gauss, calculer les vecteur u_1, u_2 et u_3 tels que

$$Pu_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Pu_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Pu_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) En déduire l'inverse de P.

(c) On pose $T = P^{-1}MP$. Montrer que T est diagonale.

4. **Résolution du système** (1)**.**

(a) Soit $X(t)$ une solution du système (1). On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$. En utilisant les questions 2 et 3, montrer que $Y(t)$ satisfait le système matriciel suivant :

$$Y'(t) = TY(t) \tag{3}$$

(b) En utilisant la question 1, déterminer $Y(t)$. En déduire l'ensemble des solutions du système (1).