Sup'Galilée
Etudiants ingénieurs apprentis $1^{\text{ère}}$ année

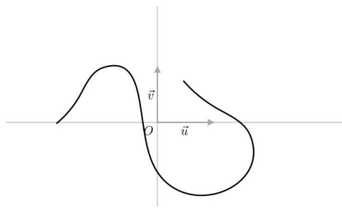
Année 2017/2018

Mathématiques : cours d'harmonisation-TD1
Fonction d'une variable réelle

---

1 Vrai ou faux (justifier)

1. La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction (dans un repère orthonormé).



2. Les solutions de l'équation $\cos(x) = 0$ (c'est à dire l'ensemble des nombres réels x satisfaisant $\cos x = 0$) sont $\pi/2$ et $-\pi/2$.
3. La fonction $x \mapsto \tan x$ est paire.
4. La fonction $x \mapsto |x| \cos(|x|)$ est positive ou nulle.
5. Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par
$$f_1(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{3}\ln x} & \text{si } x \in]0, +\infty[, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
La fonction f_1 est continue sur $]0, +\infty[$.
6. La fonction f_1 est continue en 0.
7. La fonction f_1 est dérivable en 0.
8. Soit $f : x \mapsto x^5$. Puisque $f'(0) = 0$, f admet un extremum en 0.
9. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ satisfaisant $f'(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$. Alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2 Ensembles de définition

Exercice 1

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x - 5}$
4. $f_4 : x \mapsto \ln(\ln x)$

3 Parité et symétries

Exercice 2

Étudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sin(ax)$, $a \in \mathbb{R}^*$
2. $f_2 : x \mapsto \cos(3x) + \sin\left(\dfrac{x}{7}\right)$

Exercice 3

On suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormé. Montrer que la courbe C_f représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 3$ admet la droite $x = 1/2$ comme axe de symétrie.

4 Limites

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x+7}{x+2}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x})$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(5x)e^{-12x}$
5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x^3}{1-x}$
6. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$
7. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-2x+1}$
8. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3-4x+9}{x^2+x+2}$

5 Continuité

Exercice 5

Les fonctions suivantes sont-elle continues en 0 ?

1. $f_1(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
2. $f_2(x) = \begin{cases} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
3. $f_3(x) = xE(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

6 Dérivation

Exercice 6

Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^3-1}{4x-5}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $f_3 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$
4. $f_4 : x \mapsto \cos(3x+5)\ln(\ln x)$

Exercice 7

En utilisant la notion de nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \mapsto e} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{x-e}$
2. $\lim\limits_{x \mapsto e} \dfrac{\ln x - 1}{x-e}$
3. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\sin x}{x}$

7 Dérivation : applications du théorème de Rolle et du théorème des accroissements finis

Exercice 8

Soit p la fonction polynômiale définie par $p(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$. Montrer que p' s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.

Exercice 9

Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. En utilisant le théorèmes des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \ln x$, montrer que

$$a < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < b.$$

8 Développements limités

Exercice 10

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{2x} \quad f_2(x) = e^{1+x} \quad f_3(x) = \ln(1+2x) \quad f_4(x) = \cos^2 x \sin^2 x$$

2. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 1 des fonctions suivantes :

$$g_1(x) = \frac{1}{2-x} \quad g_2(x) = \sqrt{x}$$

Exercice 11 (calcul de limites)

Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

9 Problèmes concrets

Exercice 12

Nous effectuons une course en montagne entre un point A et un point B. Nous partons le premier jour à 4h et arrivons au refuge à 11h. Le lendemain, nous partons du point B à 4h et arrivons au point A à 11h. Est-il possible que nous passions au même endroit à la même heure à un jour d'intervalle ?

Exercice 13

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2x^2\sqrt{x} - 5x\sqrt{x} + 1.$$

1. Déterminer le domaine de défintion de f
2. En étudiant les variations de la fonction f, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 14

On considère le segment de parabole défini pour $x \in [-1, 3]$ par

$$s(x) = \frac{x^2}{2} - 2x \quad (x \in [-1, 3]).$$

Prolongez le segment de parabole par deux (demi-)droites d_1 et d_2 de sorte que la fonction f obtenue soit définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On déterminera les équations des droites d_1 et d_2.

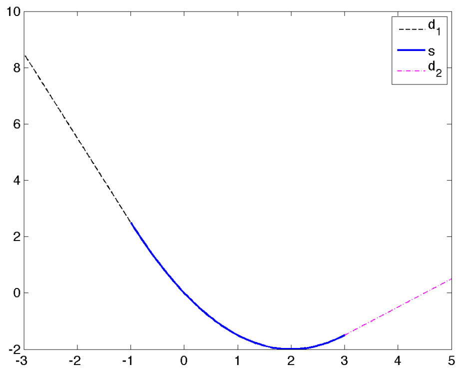


FIGURE 1 – Segment s prolongé par les deux droites d_1 (pour $x < -1$) et d_2 (pour $x > 3$).

Exercice 15

Une brêche s'est ouverte dans les flancs d'un pétrolier. Supposons que le pétrole s'écoulant du tanker s''étend autour de la brèche selon un disque dont le rayon augmente de $2ms^{-1}$. À quelle vitesse augmente la surface de la marée noire quand le rayon de la nappe de pétrole est de $60m$?

Exercice 16

On veut faire une gouttière avec une longue feuille de métal de 12 cm de large et de longueur L, en pliant les deux longs cotés et en les relevant d'une hauteur x perpendiculairement à la feuille. Quelle hauteur doivent avoir les cotés relevés pour que la gouttière ait une contenance maximale ?

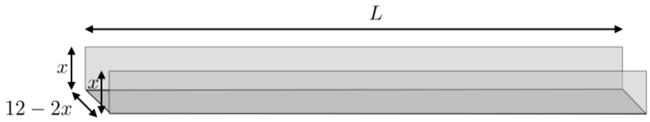


FIGURE 2 – Représentation schématique de la gouttière (Exercice 16).

Exercice 17

Parmi tous les rectangles de périmètre $2p$, quel est celui dont l'aire est maximale ? Quelle est son aire ?