Mathématiques : cours d'harmonisation-TD2
Intégration

---

1 Vrai ou faux (justifier)

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$.
   (a) f est définie sur $]-1,1[$.
   (b) f est strictement positive quand $x \in]0,1[$.
   (c) f est croissante sur $]-1,1[$.
   (d) $f(0) = 1$.
   (e) f est une fonction paire.

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $G(x) = \int_0^x g(t)dt$.
   (a) G est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) G est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée g.
   (c) Si g est croissante sur $\mathbb{R}$, alors G est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (d) Si g est positive sur $\mathbb{R}$ alors G est positive sur $\mathbb{R}$.
   (e) Si g est positive sur $\mathbb{R}$ alors G est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (f) Si g est périodique de période T, alors G est périodique de période T.

2 Calcul directs d'intégrales et de primitives

Exercice 1

1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une primitive :
   (a) $f_1(x) = 14x^5 - 5x^4 + 3$, $(D_{f_1} = \mathbb{R})$,
   (b) $f_2(x) = \dfrac{8}{x}$ $(D_{f_2} =]-\infty, 0[)$,
   (c) $f_3(x) = e^{5x-7} + (5x-4)^4$ $(D_{f_3} = \mathbb{R})$,
   (d) $f_4(x) = \dfrac{5}{3x+1}$ $(D_{f_4} =]-1/3, +\infty[)$.
   (e) $f_5(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^4 x}$ $(D_{f_5} =]0, \frac{\pi}{2}[)$.
2. Pour les deux fonctions suivantes, déterminer la primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$:
   (a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ avec $x_0 = 2$ et $y_0 = 0$,
   (b) $f(x) = 2e^{4x-7}$ avec $x_0 = -2$ et $y_0 = -1$.

Exercice 2

1. En utilisant la formule $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$, donner une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \sin^2(x)$ et calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$.
2. Soit la fonction f définie par $f(x) = xE(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Calculer $\int_0^4 f(x)dx$.

3 Formule d'intégration par parties

Exercice 3

1. En utilisant une ou plusieurs fois la formule d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :
$$(a)\int_0^1 xe^{-x}dx, \quad (b)\int_1^2 \ln(x+1)dx, \quad (c)\int_0^\pi x^2\cos(x)dx.$$
2. Donner la valeur des intégrales suivantes :
$$(a)\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin x dx, \quad (b)\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos x dx, \quad (c)\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x^2}\sin x dx$$
3. En utilisant une ou plusieurs fois la formule d'intégration par parties, donner une primitive des fonctions suivantes
$$(a)\,(x^3-2x)e^x, \quad (b)\,x^2\ln x, \quad (c)\,x^n\ln x\ (n\in\mathbb{N}).$$

4 Formule de changement de variables

Exercice 4

1. En utilisant le changement de variable $\varphi(t)=2t+5$, calculer $\int_2^5(2t+5)^5dt$.
2. En utilisant le changement de variable $x=\varphi(t)=\sin t$, calculer $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$.
3. En utilisant le changement de variable $1+x^2=\varphi(t)$, trouver une primitive de la fonction f définie par $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$.

5 Problèmes

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}$.

1. Déterminer les nombres réels a, b et c, tels que, pour tout $x>1$,
$$g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}$$
2. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
4. En utilisant les résultats obtenus précédemment calculer
$$I=\int_2^3\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx.$$

Exercice 6

On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier naturel par
$$x_n=\int_0^1 t^n\cos t dt \quad \text{et} \quad y_n=\int_0^1 t^n\sin t dt \quad n\in\mathbb{N}.$$

1. Montrer que $x_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite de la $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$
$$x_n\leq\frac{1}{n+1}.$$
et en déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$
$$x_{n+1}=-(n+1)y_n+\sin(1).$$
5. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}y_n=0$.