**Mathématiques : cours d'harmonisation-TD3**
**Equations différentielles ordinaires**

---

# 1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

## Exercice 1

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = (2x+1)e^{-2x} \tag{1}$$

1. Vérifier que l'équation (1) est une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre à coefficients constants.
2. Trouver les solutions $y_0 \in C^1(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle homogène associée à (1).
3. Trouver l'ensemble des solutions $y \in C^1(\mathbb{R})$ de (1) : on pourra chercher une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = (ax^2 + bx)e^{-2x}, \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$$

4. Déterminer la solution de (1) qui s'annule en $0$.

## Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$xy'(x) - y(x) = \ln x \tag{2}$$

1. Vérifier que l'équation (2) est une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre.
2. On considère l'intervalle $I = ]0, +\infty[$. Montrer que sur cet intervalle, l'équation (2) est équivalente à l'équation

$$y'(x) - \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x} \quad \text{pour tout } x \in I. \tag{3}$$

3. Résoudre l'équation homogène associée à (3).
4. Vérifier que la fonction $p(x) = -\ln x - 1$ est une solution particulière de (3). En déduire l'ensemble des solutions de (3).
5. Déterminer la solution $y$ de (3) qui vérifie $y(1) = 1$.

## Exercice 3 (équation de Bernouilli)

On souhaite résoudre l'équation différentielle

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)y^n(x), \tag{4}$$

où $n$ est un entier positif supérieur ou égal à 2.

1. En posant $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$, montrer 'formellement' (on pourra considerer que $y$ ne s'annule pas) que $z$ satisfait l'équation différentielle

$$a(x)z'(x) + b(x)(1-n)z(x) = (1-n)c(x). \tag{5}$$

2. Application : résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y - xy'(x) = 2xy^2(x)$$

# 2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

## Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0.$
2. $4y''(x) + 12y'(x) + 9y(x) = 9x^2 + 1.$
3. $y''(x) + y'(x) + y(x) = e^x.$

### Exercice 5

On considère l'équation différentielle

$$x(x+1)y''(x) + (4x+3)y'(x) = 3 \tag{6}$$

1. Cette équation différentielle est une équation différentielle linéaire du second ordre ? Est-elle à coefficients constants ?
2. En posant $z(x) = y'(x)$, trouver l'équation différentielle satisfaite par $z$.
3. Résoudre cette nouvelle équation différentielle.
4. En déduire les solutions de (6).

## 3 Problèmes

### Exercice 6

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = x - 1. \tag{7}$$

1. Calculer $\int_1^x e^t(t-1)dt$.
2. Soit $z$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $f(x) = z(x)e^{-x}$. Montrer que $f$ est solution de l'équation différentielle (7) si et seulement si, pour tout $x$ réel, $z'(x) = e^x(x-1)$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $z'(x) = e^x(x-1)$.
4. En déduire les solutions de (7).

### Exercice 7

Cet exercice propose deux modèles pour quantifier l'evolution d'une population de rongeurs.

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{3e^{x/4}}{2 + e^{x/4}}.$$
Étudier les variations de la fonction $f$ ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population au temps $t \geq 0$ est noté $g_\ell(t)$ ($g_\ell$ est une fonction définie sur $[0, +\infty]$). Le temps $t$ est exprimé en années et l'unité choisie pour $g_\ell(t)$ est la centaine d'individus. On constate que $g_\ell$ est une solution sur $[0, +\infty]$ de l'équation différentielle
$$y'(t) - \frac{y(t)}{4} = 0. \tag{8}$$
   (a) Résoudre l'équation différentielle (8). Déterminer la fonction $g_\ell(t)$, lorsqu'au temps $t = 0$ la population comprend $100$ rongeurs.
   (b) Évaluer le nombre d'années nécessaires pour que la population d'individus dépasse $300$ rongeurs.
3. Dans le milieu naturel, la présence d'un prédateur empêche la croissance très rapide observée en laboratoire. On note $g_n(t)$ la population exprimée en centaines d'individus au temps $t$ ($t$ exprimé en années). On remarque que pour tout $t > 0$, $g_n$ satisfait l'équation différentielle suivante
$$y'(t) = \frac{y(t)}{4} - \frac{y(t)^2}{12}, \quad t > 0. \tag{9}$$
   (a) Montrer que toute fonction $y(t)$ strictement positive est solution de l'EDO (9) si et seulement si $h(t) = \frac{1}{y(t)}$ satisfait l'équation
$$h'(t) = -\frac{h(t)}{4} + \frac{1}{12}, \quad t > 0. \tag{10}$$
   (b) En déduire $g_n(t)$ lorsqu'au temps $t = 0$ la population comprend $100$ rongeurs.
   (c) Comment se comporte la population $g_n$ quand $t$ tend vers $+\infty$ ?