Sup'Galilée
Etudiants ingénieurs apprentis 1ère année

Année 2017/2018

Mathématiques : cours d'harmonisation-TD4
Matrices

---

1 Vrai ou faux (justifier)

1. On considère deux matrices A et B.
   (a) Si le produit AB est défini, alors le produit BA est défini.
   (b) Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit AB est défini.
   (c) Si le produit AB est défini, alors le produit A^tB^t est défini.
   (d) Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit AB^t est défini.
   (e) Si les produit AB et BA sont définis, alors A et B sont des matrices carrées de même taille.
   (f) Si les produit AB et BA sont définis, alors la somme $A+B^t$ existe.
2. Soit A une matrice carrée.
   (a) La matrice AA^t est symétrique.
   (b) Si A est inversible, A^tA est inversible.
   (c) Si A est diagonale, alors A est inversible.
   (d) Si A est inversible, alors $A^tA = AA^t$.
   (e) Si A est orthogonale ($A^tA = I$), alors A est inversible.
   (f) Soit A une matrice telle que $A^3 = 0$. Alors $\det(A) = 0$.

2 Opérations sur les matrices

Exercice 1

Effectuer toutes les multiplications possibles entre les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Exercice 2

Calculer A^n et B^n pour tout entier $n \geq 1$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

3 Calcul de déterminants

Exercice 3

1. Calculer le déterminant des matrices A, B, C suivante suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

   où a, b, c sont des nombres réels.
2. Montrer que C est inversible si et seulement si a, b et c sont des nombres deux à deux distincts.

4 Résolution de systèmes linéaires

Exercice 4

Résoudre les trois systèmes linéaires suivants à l'aide de la méthode de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ 2x_2 + 6x_3 & = & 22 \\ 3x_3 & = & 9 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 4 \\ x_1 - x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = & -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & -2 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 7x_2 & = & -15 \\ -x_1 + x_2 - 9x_3 + 9x_4 & = & -21 \\ 3x_3 - x_4 & = & 4 \end{array}\right.$$