Sup'Galilée
MACS1

Controle continu

27 octobre 2017

16h-17h30 (durée 1h30)

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice et les téléphones portables sont interdits.

Le sujet est constitué de **quatre exercices** indépendants. Il comporte **deux pages**.

Exercice 1 (4 points)

Soit m un nombre réel et soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & 3m-1 \\ 0 & m & m \\ 1 & m & 3m-1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A.
   Correction : Un calcul direct donne
   $$\det A = -m$$
   □

2. Déterminer, suivant les valeurs de m, les dimensions de l'image et du noyau de A.
   Correction : On considère différents cas :
   (a) Si $m \neq 0$ La matrice est donc inversible et on a $dim(Ker(A)) = 0$ et $dim(Im(A)) = 3$.
   (b) Si $m = 0$, alors
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
   On a donc
   $$KerA = span\{u_1\} \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   si bien que $\dim(Ker(A)) = 1$, et par le théorème du rang $\dim(Im(A)) = 2$.

   □

Exercice 2 (3 points)

Soit a, b, c trois nombres réels. A quelle condition (sur a, b et c) le système linéaire suivant admet-il une solution ?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Cette solution est-elle unique ?
Correction : Par la méthode du pivot de Gauss, on voit que le système précédent est équivalent au système triangulaire

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b-c \\ a+b+c \end{bmatrix}$$

qui admet une solution si $a+b+c = 0$. Cette solution n'est pas unique.

Exercice 3 (8 points)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois fonctions

$$f_1(x) = \cos(x) \quad f_2(x) = x\cos(x) \quad f_3(x) = \sin(x) \quad f_4(x) = x\sin(x)$$

1. Soit F le sous espace vectoriel de E engendré par f_1, f_2, f_3 et f_4. Montrer que F est de dimension 4.
   Correction : Pour répondre à cette question, il suffit de montrer que la famille composée des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 est libre. Supposons que

   $$a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + a_4 f_4(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Alors
   $$\cos(x)\,(a_1 + a_2 x) + \sin(x)\,(a_3 + a_4 x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   En choisissant $x = 0$ et $x = \pi$
   $$a_1 = 0 \quad a_1 + a_2\pi = 0$$
   ce qui implique que $a_1 = a_2 = 0$. De même, en choisissant $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$,on obtient

   $$a_3 + \frac{\pi}{2}a_4 = 0 \quad a_3 - \frac{\pi}{2}a_4 = 0$$

   ce qui implique que $a_3 = a_4 = 0$.

2. Pour tout $f \in F$, on introduit l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f) = f'$. Montrer que φ est une application linéaire de F dans F. Écrire la matrice (notée A) associée à l'application linéaire φ dans la base f_1, f_2, f_3, f_4 de F.
   Correction : Soit $f \in F$. Alors , il existe $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}$ tel que

   $$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4'$$

   On a donc
   $$\varphi(f) = a_1 f_1' + a_2 f_2' + a_3 f_3' + a_4 f_4'$$
   Or
   $$f_1' = -f_3 \quad f_2' = f_1 - f_4 \quad f_3' = f_1 \quad f_4' = f_3 + f_2$$
   Donc
   $$\varphi(f) = (a_2 + a_3) f_1 + a_4 f_2 + (a_4 - a_1) f_3 - a_2 f_4$$
   ce qui prouve que $\varphi(f)$ appartient à F. Par ailleurs, l'application φ est linéaire car l'opérateur de dérivation est linéaire : Quelles que soient deux fonctions f et g dérivables, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

   $$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$

   La matrice A est donnée par
   $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   □

3. On pose
   $$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Montrer que
   $$A^2 = (-1)(I_4 - 2B)$$
   où I_4 désigne la matrice identité de taille 4×4.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{2n} = (-1)^n (I_4 - 2nB) \quad A^{2n+1} = (-1)^n ((2n+1)C + D)$$

On pourra utiliser les relations suivantes :

$$B^2 = 0 \quad CB = 0 \quad DB = -C.$$

Correction : La démonstration est par récurrence sur n. On vérifie d'abord la formule pour $n = 0$. Supposons que la formule soit vraie pour $n \geq 1$. Montrons qu'elle reste valide pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned} A^{2(n+1)} = A^{2n}A^2 = (-1)^n (I_4 - 2nB)(-1)(I_4 - 2B) = (-1)^{n+1}(I_4 - 2nB - 2B + 4nB^2) \\ = (-1)^{n+1}(I_4 - 2(n+1)B) \quad (1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A^{2(n+1)+1} &= A^{(2n+1)+2} = A^{(2n+1)}A^2 = (-1)^n ((2n+1)C + D)(-1)(I_4 - 2B) \\ &= (-1)^{n+1} ((2n+1)C + D - 4(2n+1)CB - 2DB) = (-1)^{n+1} ((2n+1+2)C + D) \quad (2) \end{aligned}$$

□

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la question précédente, calculer la dérivée n-ième de la fonction g définie par

$$g(x) = \cos x - x \sin x.$$

Correction :
Soit $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 \in F$. Alors $f^{(n)} = b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 + b_4$ avec

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Dans notre cas $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$, et $a_4 = -1$. Donc, en utilisant la question précédente, si $n = 2k$, alors

$$A^{2k} = (-1)^k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans le cas présent, on trouve

$$b_1 = (-1)^k(1 - 2k) \quad b_2 = b_3 = 0 \quad b_4 = (-1)^k$$

Donc

$$f^{2k}(x) = (-1)^k(1 + 2k)\cos(x) - (-1)^k x \sin x.$$

Si $n = 2k+1$, alors

$$A^{2k+1} = (-1)^k \begin{bmatrix} 0 & (2k+1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & (2k+1) \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc

$$b_1 = (-1)^k(2k+1) \quad b_2 = (-1)^k \quad b_3 = (-1)^k(-2-k) \quad b_4 = (-1)^{k+1}$$

et donc

$$f^{2k}(x) = (-1)^k(2k+1)\cos x + (-1)^k x \cos x + (-1)^k(-2-k)\sin + (-1)^{k+1} x \sin x$$

□

Exercice 4 : algorithme du point fixe (8 points)

Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que la fonction g admet un point fixe x^* sur $[0, 1]$.
Correction : Considérons la fonction h définie par

$$h(x) = g(x) - x$$

Comme la fonction g est continue sur $[a, b]$, la fonction h est continue sur $[a, b]$. De plus on a $h(0) = 1 > 0$ et $g(1) = -\frac{1}{2} < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc au moins un point $x^* \in]0, 1[$ tel que $h(x^*) = 0$.

Comme $h(x) = g(x)-x$, x^* est un point fixe de g.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq g(x) \leq 1$.
Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $x^2 + 1 > 0$,

$$g(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0.$$

De plus, $x^2 + 1 \geq 1$, donc

$$\frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

□

3. On considère la fonction $\hat{g} : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par

$$\hat{g}(x) = g(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

La fonction $\hat{g}$ est la restriction de g à l'intervalle $[0, 1]$. Montrer que la fonction $\hat{g}$ est contractante (on pourra étudier les variations de $\hat{g}'$ sur $[0, 1]$).
Correction : On a

$$\hat{g}'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \quad \hat{g}''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

Il est donc facile de voir que $g'(\frac{1}{\sqrt{3}}) < \hat{g}'(x) < 0$. Or

$$\hat{g}'(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{3\sqrt{3}}{8} > -1.$$

Par conséquent,

$$|\hat{g}'(\frac{1}{\sqrt{3}})| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Soit $(x, y) \in [0, 1]^2$. D'après le théorème des accroissements finis, il exist $\xi \in (x, y)$ tel que

$$|\hat{g}(x) - \hat{g}(y)| = |\hat{g}'(\xi)||x - y|$$

Or, comme $|'\hat{g}(\xi)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$, on a donc

$$|\hat{g}(x) - \hat{g}(y)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}|x - y|.$$

ce qui démontre que $\hat{g}$ est contractante.

4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*.
Correction : Le théorème du point fixe de Banach nous garantit que la fonction $\hat{g}$ admet un unique point fixe y^* sur $[0, 1]$ et que pour tout $y_0 \in [0, 1]$, la suite

$$y_{n+1} = \hat{g}(y_n)$$

converge vers y^*. On en déduit donc d'abord que $x^* = y^*$. De plus, puisque quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_n \in [0, 1]$ pour tout $n \geq 1$ la fonction $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_n = x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tend vers x^*.