Sup'Galilée
MACS1

Controle continu
27 octobre 2017
16h-17h30 (durée 1h30)

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice et les téléphones portables sont interdits.

Le sujet est constitué de **quatre exercices** indépendants. Il comporte **deux pages**.

Exercice 1 (4 points)

Soit m un nombre réel et soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & 3m-1 \\ 0 & m & m \\ 1 & m & 3m-1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A.
2. Déterminer, suivant les valeurs de m, les dimensions de l'image et du noyau de A.

Exercice 2 (3 points)

Soit a, b, c trois nombres réels. A quelle condition (sur a, b et c) le système linéaire suivant admet-il une solution ?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Cette solution est-elle unique ?

Exercice 3 (8 points)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois fonctions

$$f_1(x) = \cos(x) \quad f_2(x) = x\cos(x) \quad f_3(x) = \sin(x) \quad f_4(x) = x\sin(x)$$

1. Soit F le sous espace vectoriel de E engendré par f_1, f_2, f_3 et f_4. Montrer que F est de dimension 4.
2. Pour tout $f \in F$, on introduit l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f) = f'$. Montrer que φ est une application linéaire de F dans F. Écrire la matrice (notée A) associée à l'application linéaire φ dans la base f_1, f_2, f_3, f_4 de F.
3. On pose

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Montrer que

$$A^2 = (-1)(I_4 - 2B)$$

   où I_4 désigne la matrice identité de taille 4×4.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{2n} = (-1)^n (I_4 - 2nB) \quad A^{2n+1} = (-1)^n ((2n+1)C + D)$$

   On pourra utiliser les relations suivantes :

$$B^2 = 0 \quad CB = 0 \quad DB = -C.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la question précédente, calculer la dérivée n-ième de la fonction g définie par

$$g(x) = \cos x - x\sin x.$$

Exercice 4 : algorithme du point fixe (8 points)

Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que la fonction g admet un point fixe x^* sur $[0,1]$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq g(x) \leq 1$.
3. On considère la fonction $\hat{g} : [0,1] \to [0,1]$ définie par

   $$\hat{g}(x) = g(x) \quad \forall x \in [0,1].$$

   La fonction $\hat{g}$ est la restriction de g à l'intervalle $[0,1]$. Montrer que la fonction $\hat{g}$ est contractante (on pourra étudier les variations de $\hat{g}'$ sur $[0,1]$).
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*.