Sup'Galilée
MACS1

Devoir Maison : révisions
à rendre le 27 octobre 2017

Exercice 1

Soit m un nombre réel et soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 3m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A.
   Correction : Un calcul direct donne
   $$\det A = -m^2(m-1).$$
   □

2. Déterminer, suivant les valeurs de m, les dimensions de l'image et du noyau de A.
   Correction : On va considérer différent cas :
   (a) Si $m \neq 0$ et $m \neq 1$, alors $\det A \neq 0$. La matrice est donc inversible et on a $dim(Ker(A)) = 0$ et $dim(Im(A)) = 4$.
   (b) Si $m = 0$, alors
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
   On a donc
   $$KerA = span\{u_1, u_2\} \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   si bien que $\dim(Ker(A)) = 2$, et par le théorème du rang $\dim(Im(A)) = 2$.
   (c) Si $m = 1$, alors
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
   si bien que
   $$KerA = span\{u_1\} \quad u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   On a donc $\dim(Ker(A)) = 1$, et par le théorème du rang $\dim(Im(A)) = 3$.
   □

Exercice 2

On considère quatre nombres réels a, b, c et d ainsi que les matrices carrées U et A suivantes

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

1. Trouver une condition sur a, b, c et d telle qu'il existe une matrice X carrée de taille 2 telle que
$$UX + XU = A$$

Correction : On pose
$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$
On a
$$UX + XU = \begin{bmatrix} (x_1 + x_3) & (x_2 + x_4) \\ (x_1 + x_3) & (x_2 + x_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) & (x_1 + x_2) \\ (x_3 + x_4) & (x_3 + x_4) \end{bmatrix}$$
si bien qu'on obtient le système linéaire suivant :
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$
En applicant la méthode du pivot de Gauss, on voit que le système précédent est équivalent au système
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ a-d-2c \\ b-a+c-d \end{bmatrix}$$
Une condition nécessaire pour que le système est une solution est donc que
$$a - c - b + d = 0.$$
cette condition est suffisante. En effet si cette condition est vérifiée, on peut par substitution résoudre le système quelle que soit la valeur de x_4.

2. Peut-on ajouter une condition supplémentaire sur a, b, c et d pour que la matrice X soit déterminée de manière unique ?
Correction : Non, ce n'est pas possible. On a vu à la questions précédente que la matrice M associée au système linéaire n'est pas inversible. Cela signifie que $Ker(A) \neq \emptyset$. Ainsi, s'il y a une solution, il y en a une infinité. □

Exercice 3

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois fonctions
$$f_1(x) = e^{-x} \quad f_2(x) = xe^{-x} \quad f_3(x) = x^2e^{-x}.$$

1. Soit F le sous espace vectoriel de E engendré par f_1, f_2 et f_3. Montrer que F est de dimension 3.
Correction : Pour répondre à cette question, il suffit de montrer que la famille composée des fonctions f_1, f_2 et f_3 est libre. Supposons que
$$a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1f_1(x) + a_2f_2(x) + a_3f_3(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Alors
$$e^{-x}\left(a_1 + a_2x + a_3x^2\right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Comme $e^{-x} \neq 0$, on en déduit que
$$a_1 + a_2x + a_3x^2 = 0 \forall x \in \mathbb{R}.$$
et donc que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

2. Pour tout $f \in F$, on introduit l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f) = f'$.

(a) Montrer que φ est une application linéaire de F dans F. Écrire la matrice A dans la base f_1, f_2, f_3 de F.
Correction : Soit $f \in F$. Alors , il existe $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}$ tel que

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$$

On a donc

$$\varphi(f) = a_1 f_1' + a_2 f_2' + a_3 f_3'$$

Or

$$f_1' = -f_1 \quad f_2' = f_1 - f_2 \quad f_3' = 2f_2 - f_3.$$

Donc

$$\varphi(f) = (a_2 - a_1) f_1 + (2a_3 - a_2) f_2 - a_3 f_3$$

ce qui prouve que $\varphi(f)$ appartient à F. Par ailleurs, l'application φ est linéaire car l'opérateur de dérivation est linéaire : Quelles que soient deux fonctions f et g dérivables, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$

La matrice A est donnée par

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

□

(b) On pose

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer la formule suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (-1)^n \left(I_3 - nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \right).$$

où I_3 désigne la matrice identité de taille 3×3.
Correction : On vérifie d'abord la formule pour $n = 0$. Ensuite, on montrer par récurrence que la formule est vraie pour tout n.

i. Pour $n = 1$, un calcul direct montrer que $A = -(I - B)$.
ii. Supposons que la formule soit vraie pour $n \geq 1$. Montrons qu'elle reste valide pour $n+1$. On remarque d'abord que $B^3 = 0$. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= -(I - B) \times (-1)^n \left(I_3 - nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \right), \\ &= (-1)^{n+1} \left(I_3 - nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 + nB^2 \right), \\ &= (-1)^{n+1} \left(I_3 - nB + \frac{n(n+1)}{2} B^2 + nB^2 \right). \end{aligned}$$

□

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la question précédente déterminer la dérivée n-ième de la fonction g définie par

$$g(x) = (3 - 2x + 8x^2) e^{-x}.$$

Correction : On remarque que, pour toute fonction f n fois dérivable,

$$f^{(n)} = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}(f)$$

Donc, dans le cas où $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 \in F$, et $f^{(n)} = b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3$, on

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

En utilisant la question précédente

$$A^n = (-1)^n \begin{bmatrix} 1 & -n & n(n-1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans le cas présent, on trouve

$$b_1 = (-1)^n(3 + 2n + 8n(n-1)) \quad b_2 = (-1)^n(-2 - 16n) \quad b_3 = (-1)^n 8.$$

□

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale impropre

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$$

converge et calculer I_k.
Correction : La fonction $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue en 0. La convergence est donc à étudier en $+\infty$. Or, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, on sait que, pour t suffisamment grand, $t^k e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$ et qui converge. Donc l'intégrale

$$\forall \int_0^a t^k e^{-t} dt$$

est majorée indépendamment de a. De plus $a \mapsto \int_0^a t^k e^{-t} dt$ est croissante. Donc l'intégrale est convergente. Par réccurence, on peut montrer que

$$I_k = k!.$$

En effet,

$$I_0 = 1 \quad \text{et} \quad I_k = k I_{k-1}.$$

□

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $f \in F$. Montrer que l'intégrale impropre

$$c_k(f) = \int_0^{+\infty} t^k f(t)\, dt$$

converge.
Correction : Puisque $f = a_1 e^{-t} + a_2 t e^{-t} + a_3 t^2 e^{-t}$, et, en utilisant la question précédente,

$$c_k(f) = a_1 I_k + a_2 I_{k+1} + a_3 I_{k+2}.$$

□

(c) Soit $\psi : F \mapsto F$ définie par

$$\psi(f) = (c_3(f)(1-x) + c_2(f)x^2)e^{-x}.$$

Monter que ψ est une application linéaire de F dans F. Écrire sa matrice dans la base f_1, f_2, f_3 de F.
Correction : ψ est linéaire car $f \mapsto c(f)$ est linéaire. Par ailleurs, puisque, quel que soit $f \in F$ $(c_3(f)(1-x) + c_2(f)x^2)$ est un polynome degré au plus 2, on a bien $\psi(f) \in F$. On a

$$c_2(f_1) = 2 \quad c_3(f_1) = 6 \quad c_2(f_2) = 6 \quad c_3(f_2) = 24 \quad c_2(f_3) = 24 \quad c_3(f_3) = 120.$$

Donc

$$\psi(f_1) = (6 - 6x + 2x^2)e^{-x} = 6f_1 - 6f_2 + 2f_3 \quad \psi(f_2) = 24f_1 - 24f_2 + 6f_3 \quad \psi(f_3) = 120f_1 - 120f_2 + 24f_3.$$

Ainsi la matrice C de l'application linéaire ψ dans la base f_1, f_2, f_3 est

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 24 & 120 \\ -6 & -24 & -120 \\ 2 & 6 & 24 \end{bmatrix}$$

□

(d) Déterminer les dimensions du noyau de ψ et de l'image de ψ.
Correction : Le noyau de la matrice C est donné par

$$Ker(C) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a = 12c \quad b = -8c\}$$

Ainsi, la dimension du noyau de ψ est 1 et la dimension de son image est 2.