Sup'Galilée
MACS1

Devoir Maison 2
à faire pour le 15 décembre 2017

Exercice 1 : points fixes répulsifs

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et α un point fixe de f tel que
$$|f'(\alpha)| > 1.$$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$x_{k+1} = f(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$
Montrer que si la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α alors il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$
$$x_k = \alpha.$$

Exercice 2

Soit $\lambda \in]0,4[$. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \lambda x(1-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Étude des points fixes de g.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \in [0,1]$.
   (b) Déterminer les points fixes de g. Indiquer dans quelles conditions ces points fixes sont répulsifs ou attractifs.
2. Étude du cas $\lambda \in]3,4[$. On considère la suite fonction $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g_1(x) = g \circ g(x)$$
   (a) Montrer que les points fixes de g sont des points fixes de g_1.
   (b) Montrer que si r est point fixe de g_1, alors $g(r)$ est aussi point fixe de g_1.
   (c) Montrer g_1 admet 4 points fixes r_0, r_1, r_2 et $g(r_2)$ où r_2 est un nombre à déterminer.
   (d) Montrer que r_2 et $g(r_2)$ sont des points fixes attractifs de g_1 si et seulement si $\lambda \in]3, 1+\sqrt{6}[$.
   (e) Soit $x_0 \in [0,1]$. On définit la suite
$$x_{n+1} = g(x_n)$$
   Supposons que $\lambda \in]3, 1+\sqrt{6}[$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $|x_0 - r_2| < \varepsilon$, le couple de suite $(x_{2k+1}, x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $(g(r_2), r2)$.

Exercice 3 : factorisation LU d'une matrice diagonale strictement dominante

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale strictement dominante :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad |A_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{ij}|$$

1. Montrer que la matrice $\mathbf{A}$ est inversible.
2. Montrer que toutes les sous matrices principales de $\mathbf{A}$ sont non inversibles. En déduire que $\mathbf{A}$ admet une factorisation LU : il existe une matrice $\mathbf{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.

Exercice 4 : normes matricielles

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|_p}{\|x\|_p}.$$

pour $p \in \mathbb{N}$ ou $p = \infty$.

1. Montrer que

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\|x\|_p = 1} \|\mathbf{A}x\|_p \tag{2}$$

   et en déduire que

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|x\|_p = 1} \|\mathbf{A}x\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|_p}{\|x\|_p}. \tag{3}$$

2. Montrer que

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|$$

   et que

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

3. Soit $\mathbf{S}$ une matrice symétrique. Montrer que

$$\lambda_{\min}(\mathbf{S}) \leq \frac{|\langle \mathbf{S}x, x \rangle|}{\|x\|_2^2} \leq \lambda_{\min}(\mathbf{S}) \tag{6}$$

   où $\lambda_{\min}(\mathbf{S})$ (resp. $\lambda_{\max}(\mathbf{S})$) correspond à la plus petite (reps. la plus grande) valeur propre de $\mathbf{S}$ et $< \cdot, \cdot >$ représente le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$. En déduire que

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^t \mathbf{A})}$$

   où $\rho(\mathbf{A}^t\mathbf{A})$ est le rayon spectral de la matrice $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$.