Sup'Galilée
MACS1

Année 2017/2018

Analyse numérique-TD1
Résolution numérique des équations non linéaires

1 Stockage des nombres, erreurs d'arrondis et propagation des erreurs

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.
2. Calculer I_0 et I_1, puis montrer que
$$I_n = e - nI_{n-1} \quad \forall n \geq 1. \tag{1}$$
3. Montrer que, pour tout $x > 1$,
$$0 < \ln x \leq \frac{x}{e}. \tag{2}$$
4. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = e$.

Un programme informatique calcule I_n pour tout $n \geq 2$ en utilisant la formule (1). On note $\tilde{I}_n$ la valeur de I_n calculée par ce programme.

5. On suppose que $\tilde{I}_1 = I_1$. Expliquer pourquoi $\tilde{I}_2 \neq I_2$.
6. On suppose que $\tilde{I}_2 = I_2 + 2\varepsilon$ et on néglige les erreurs d'arrondis de l'ordinateur pour les termes suivants. Montrer que
$$I_3 = \tilde{I}_3 - 6\varepsilon \quad \text{et que} \quad I_4 = \tilde{I}_4 + 24\varepsilon$$

7- En déduire que
$$|I_n - \tilde{I}_n| = (n!)\,\varepsilon.$$

2 Résolution numérique des équations non linéaires

2.1 Méthode de dichotomie pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)\,f(b) < 0$. On définit par récurrence les trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suivantes :

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.
- $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{k+1} = \begin{cases} a_k, & \text{si } f(a_k)\,f(x_k) < 0, \\ x_k & \text{sinon,} \end{cases} \qquad b_{k+1} = \begin{cases} x_k, & \text{si } f(a_k)\,f(x_k) < 0, \\ b_k & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{et} \quad x_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}.$$

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in [a, b]$ tel que $f(\gamma) = 0$. γ est-il unique ? que se passe-t-il si f n'est pas continue ?

2. Montrer que les deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que les trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ont même limite α.

3. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(a_k)f(b_k) \leq 0$. En déduire que $f(\alpha) = 0$. Comparer α et γ.

4. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

5. Soit $\varepsilon > 0$ donné.

   (a) Déterminer k pour avoir $|x_k - \alpha| \leq \varepsilon$.

   (b) Combien faut-il d'itérations supplémentaires pour avoir une majoration en $\dfrac{\varepsilon}{10}$?

2.2 Méthode du point fixe pour la résolution de l'équation $f(x) = x$.

Exercice 3 (dimension 1)

Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a, b]$ dans lui même ($\phi([a, b]) \subset [a, b]$). Soit $x_0 \in [a, b]$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{k+1} = \phi(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

1. Montrer que la suite (4) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).

2. Montrer que si la suite (4) converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ.

3. Existence du point fixe (Théorème du point fixe de Brouwer) : montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\phi(\alpha) = \alpha$.

4. On suppose de plus que ϕ est contractante, c'est à dire que

$$\exists\, L \in]0, 1[, \text{tel que, } \forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|.$$

   a- Montrer que ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$.

   b- Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α, pour toute donnée initiale x_0 dans $[a, b]$.

Exercice 4 (Extension au cas d'un espace de Banach)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach (espace vectoriel normé complet, de norme notée $\|\cdot\|$). On considère une application $\phi : E \mapsto E$ contractante :

$$\exists\, L < 1, \text{tel que, } \forall (x, y) \in E^2,\ \|\phi(x) - \phi(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

A partir de $x_0 \in E$ donné, on construit la suite récurrente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{k+1} = \phi(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

1. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2. Montrer que la fonction ϕ est continue. En déduire que si la suite x_k converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ.

3. Montrer que si ϕ admet un point fixe alors ce point fixe est unique.

4. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En déduire que ϕ admet une unique point fixe qui est donné par la limite de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ quand k tend vers $+\infty$.

5. Application : soit $\phi : E \mapsto E$ une application continue telle que $\phi^m = \underbrace{\phi \circ \phi \circ \cdots \circ \phi}_{m\times fois}$ ($m \in \mathbb{N}^*$) soit contractante.

   a- Montrer que ϕ^m a un unique point fixe $a \in E$.
   b- Montrer que $\phi(\phi^m(a)) = \phi(a)$. En déduire que ϕ admet un point fixe.
   c- Montrer que si a est un point fixe de ϕ alors a est un point fixe de ϕ^m.
   d- À l'aide des deux questions précédentes, montrer que ϕ admet un unique point fixe.

Exercice 5 (Point fixe attractif)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α et $\phi \in \mathcal{C}^1(]\alpha_-, \alpha_+[)$. On suppose que α est un point fixe de ϕ tel que

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$. Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$ et que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.En déduire que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obtenue à l'aide de l'algorithme du point fixe

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \phi(x_k), \tag{5}$$

est bien définie et converge.

2. Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha).$$

En déduire que la méthode du point fixe est au moins d'ordre 1.

3. Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^{(p+1)}(\mathcal{V})$ et que $\phi^{(i)}(\alpha) = 0$ pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq p$. Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}.$$

En déduire que la méthode du point fixe est d'ordre $p+1$ dans ce cas.

2.3 Méthodes de Newton pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 6

Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée continue sur $\mathbb{R}$) qui admet une racine $\bar{x} \in \mathbb{R}$. La méthode de Newton est une méthode iterative d'approximation de $\bar{x}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $k \leq 0$, on définit x_{k+1} par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{6}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que sous certaines conditions, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$.

1. Sous quelle condition la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?

2. Interpréter graphiquement l'algorithme (6).

3. Montrer que l'algorithme de Newton est un algorithme du point fixe appliqué à une fonction g que l'on déterminera.

4. On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et que $f'(\overline{x}) \neq 0$. En déduire une condition suffisante de convergence de l'algorithme de Newton.

5. On suppose que $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ et que $f'(\overline{x}) \neq 0$. Montrer que la méthode de Newton, lorsqu'elle converge est d'ordre 2 (on dit alors que l'erreur de convergence est quadratique).