Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.
2. Calculer I_0 et I_1, puis montrer que
$$I_n = e - nI_{n-1} \quad \forall n \geq 1. \tag{1}$$
3. Montrer que, pour tout $x > 1$,
$$0 < \ln x \leq \frac{x}{e}. \tag{2}$$
4. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = e$.

Un programme informatique calcule I_n pour tout $N \geq 2$ en utilisant la formule (1). On note $\tilde{I}_n$ la valeur de I_n calculée par ce programme.

5. On suppose que $\tilde{I}_1 = I_1$. Expliquer pourquoi $\tilde{I}_2 \neq I_2$.
6. On suppose que $\tilde{I}_2 = I_2 + 2\varepsilon$ et on néglige les erreurs d'arrondis de l'ordinateur pour les termes suivants. Montrer que
$$I_3 = \tilde{I}_3 - 6\varepsilon \quad \text{et que} \quad I_4 = \tilde{I}_4 + 24\varepsilon$$

7- En déduire que
$$|I_n - \tilde{I}_n| = (n!)\,\varepsilon.$$

---

1. Pour tout $x \in [1, e]$, comme la fonction $x \mapsto \ln x$ est croissante sur $[1, e]$, on a
$$0 < \ln x < 1 \tag{3}$$
Comme la fonction $X \mapsto X^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc
$$0 < (\ln x)^n \quad \forall x \in [1, e] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$
L'inégalité reste vraie pour $n = 0$ car $(\ln x)^0 = 1 > 0$. Par conséquent (monotonie de l'intégrale) pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 < \int_1^e (\ln x)^n dx = I_n$$
Donc I_n est minorée par 0.
Pour démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on utilise le fait que pour tout $x \in [1, e]$
$$0 < (\ln x)^{n+1} < (\ln x)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$
Puis, en utilisant de nouveau la monotonie de l'intégrale, on a
$$0 < \underbrace{\int_1^e (\ln x)^{n+1} dx}_{I_{n+1}} < \underbrace{\int_1^e (\ln x)^n dx}_{I_n}$$
ce qui prouve que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On montre l'inégalité (4) par récurrence :
   - L'initialisation pour $n = 0$ est donnée par (3).
   - Supposons que la propriété soit vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$. Pour cela multiplions l'inégalité (4) par par $\ln x$. Comme $x > 1$, $\ln x$ est positif (les signes dans l'inégalité restent inchangés) et on obtient donc
   $$0 < (\ln x)^{n+2} < (\ln x)^{n+1}.$$

2. On trouve $I_0 = (e-1)$. Pour calculer I_1, on fait une intégration par parties ($u(x) = \ln x$, $v(x) = x$) :

$$I_1 = \int_1^e (\ln x) dx = -\int_1^e 1 dx + [x \ln x]_1^e = (1-e) + e = 1.$$

Pour montrer la formule de récurrence, on fait également une intégration par parties. On pose

$$u(x) = (\ln x)^n \quad u'(x) = \frac{n}{x}(\ln x)^{n-1} \quad v'(x) = 1 \quad v(x) = x.$$

On a donc

$$I_n = \int_0^e u(x)v'(x) = -n\int_1^e (\ln x)^{n-1} dx + [x(\ln x)^n]_1^e = -nI_n + e.$$

3. On propose deux méthodes pour démontrer l'inégalité (2) :

(a) On étudie la fonction $f(x) = \ln x - \frac{x}{e}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Pour répondre à la question, on va montrer que f est négative sur $[1, e]$ On a $f(1) = -\frac{1}{e} < 0$, $f(e) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (par croissances comparées). De plus, comme $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, on a

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e.$$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-1/e$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

FIGURE 1 – Tableau de variations de la fonction f

Cela démontre bien que f est négative sur $[1, +\infty]$ et donc sur $[1, e]$.

(b) La seconde démonstration proposée consiste à remarquer que la fonction $x \mapsto \ln x$ est une fonction strictement concave. En effet $(\ln x)^{(2)} = -\frac{1}{x^2} < 0$. Par conséquent, cette fonction est sous toutes ses tangentes, et, en particulier sous sa tangent au point e. Or, la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point e est la droite d'équation

$$y(x) = \ln e + (x-e)\frac{1}{e} = \frac{x}{e}.$$

On en déduit alors la majoration demandée.

4. On part de l'inégalité (2)

$$0 < \ln x \leq \frac{x}{e} \quad \forall x \in [1, e].$$

Comme la fonction $X \mapsto X^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $n \geq 1$, on a

$$0 \leq (\ln x)^n \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n \quad \forall x \in [1, e] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

La monotonie de l'intégrale donne alors

$$0 \leq \int_1^e (\ln x)^n dx \leq \frac{1}{e^n}\int_1^e x^n dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme $\int_1^e x^n dx = \frac{1}{n+1}(e^{n+1} - 1)$, on en déduit que

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}\frac{e^{n+1}-1}{e^n}.$$

Or,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{n+1}-1}{e^n} = e - \frac{1}{e^n} = e \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1},$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1}(e^{n+1} - 1) = 0.$$

Le théoreme des gendarmes nous garantit donc que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.
Pour calculer la deuxième limite, on utilise la formule de récurrence de la deuxième question. On a

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n \quad nI_n = e - I_{n+1} - I_n.$$

Ainsi, comme $\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} I_{n+1} = 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} nI_n = \lim_{n \to +\infty} (e - I_{n+1} - I_n) = e.$$

5. Puisque $I_1 = 1 = 2^0$, le terme I_1 peut être représenté de manière exacte en base 2 et peut donc être stocké de manière exacte sur l'ordinateur. En revanche, $I_2 = e - 1$, et comme e est un nombre irrationnel, I_2 ne peut être stocké de manière exacte en base 2 dans l'ordinateur. Il y aura donc une erreur d'arrondi.
6. On a
$$\tilde{I}_3 = e - 3\tilde{I}_2 = e - 3(I_2 + 2\varepsilon) = I_3 - 6\varepsilon.$$
De même
$$\tilde{I}_4 = e - 4\tilde{I}_3 = e - 4(I_3 + 6\varepsilon) = I_4 + 24\varepsilon.$$
7. On démontre ce résultat par récurrence. L'intialisation a été faite à la question précédente. Supposons que $|I_n - \tilde{I}_n| = (n!)\,\varepsilon$, c'est à dire que
$$\tilde{I}_n = I_n \pm (n!)\,\varepsilon.$$
Alors
$$\tilde{I}_{n+1} = e - (n+1)\tilde{I}_n = e - (n+1)(I_n \pm (n!)) = I_{n+1} \mp \varepsilon(n+1)!$$
On a donc bien
$$|I_{n+1} - \tilde{I}_{n+1}| = (n+1)!\,\varepsilon$$
En particulier, si $\varepsilon \approx 10^{-16}$ (précision machine double précision), alors $|I_1 6 \tilde{I}_1 6| \approx 4 10^{-11} \approx 1$.

Remarque. *Cet exemple montre qu'une toute petite erreur d'arrondi peut se propager au travers des calculs numériques et produire des résultats catastrophiques.*