Exercice 2

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)\, f(b) < 0$. On définit par récurrence les trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suivantes :

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.
- $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{k+1} = \begin{cases} a_k, & \text{si } f(a_k)\, f(x_k) < 0, \\ x_k & \text{sinon,} \end{cases} \qquad b_{k+1} = \begin{cases} x_k, & \text{si } f(a_k)\, f(x_k) < 0, \\ b_k & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{et} \quad x_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}.$$

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in [a,b]$ tel que $f(\gamma) = 0$. γ est-il unique ? que se passe-t-il si f n'est pas continue ?
2. Montrer que les deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que les trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ont même limite α.
3. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(a_k)f(b_k) \leq 0$. En déduire que $f(\alpha) = 0$. Comparer α et γ.
4. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$
5. Soit $\varepsilon > 0$ donné.
   (a) Déterminer k pour avoir $|x_k - \alpha| \leq \varepsilon$.
   (b) Combien faut-il d'itérations supplémentaires pour avoir une majoration en $\dfrac{\varepsilon}{10}$?

---

1. La fonction f est continue sur $[a,b]$ et est telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents (puisque $f(a)f(b) < 0$). Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\gamma \in]a,b[$ tel que $f(\gamma) = 0$. En règle général, la racine γ n'est pas unique. Il peut y a avoir plusieurs racines. Si f n'est pas continue, l'existence de γ n'est pas garantie. En effet, la fonction
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$
discontinue en 0 vérifie bien $f(1)f(-1) < 0$ mais n'a pas de racine sur $]-1,1[$.
2. L'algorithme de la méthode de dichotomie peut être compris de la façon suivante. supposons que l'on a a_k, b_k et x_k vérifiant
$$a_k < b_k \quad f(a_k)f(b_k) \leq 0 \quad \text{et } x_k \text{ milieu de } [a_k, b_k]$$
Par hypothèse, il existe au moins une racine de f entre a_k et b_k. On a l'alternative suivante :
   (a) Si $f(a_k)f(x_k) < 0$, alors le théorème des valeurs intermédiaire garantit l'existence d'au moins une racine sur l'intervalle $]a_k, x_k[$. On peut donc continuer la recherche de racine sur l'intervalle $[a_k, x_k]$. On pose donc
$$a_{k+1} = a_k \quad b_{k+1} = x_k,$$
puis
$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(a_{k+1} + b_{k+1}).$$
   (b) Si $f(a_k)f(x_k) \geq 0$, alors, puisque $f(a_k)f(b_k) \leq 0$, on a forcément $f(b_k)f(x_k) \leq 0$. Cela signifie qu'il y a au moins une racine dans l'intervalle $[x_k, b_k]$. On peut donc continuer la recherche de racine sur l'intervalle $[x_k, b_k]$. Donc on pose
$$a_{k+1} = x_k \quad b_{k+1} = b_k$$
Dans les deux cas, on a bien
$$a_{k+1} < b_{k+1} \quad f(a_{k+1})f(b_{k+1}) \leq 0 \quad x_{k+1} \text{ milieu de } [a_{k+1}, b_{k+1}]$$
3. Deux suites $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes si elle vérifie les conditions suivantes :
   - La suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- La suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim\limits_{k\to+\infty}(z_k - y_k) = 0$.

Le théorème des suites adjacentes garantit que deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.
Vérifions que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
Montrons d'abord par récurrence les trois relations suivantes :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} \geq a_k \quad b_{k+1} \leq b_k \quad a_k < x_k < b_k.$$

Plus précisément, nous allons démontrer la propriété suivante par récurrence :

$$(P_k): \quad a_{k+1} \geq a_k \quad b_{k+1} \leq b_k \quad a_{k+1} < x_k < b_{k+1}.$$

- Initialisation pour $k = 0$. Pour $k = 0$, on a $a_0 < x_0 < b_0$. Puis

  $$a_1 \in \{a_0, x_0\} \quad b_1 \in \{x_0, b_0\}$$

  ce qui signifie exactement que $a_1 \geq a_0 \leq x_0$ et $x_0 \leq b_1 \leq b_0$. Remarquons également qu'on ne peut pas avoir à la fois $a_1 = x_0$ et $b_1 = x_0$. Par conséquent

  $$a_1 \geq a_0 \quad b_1 \leq b_0 \quad a_1 < b_1.$$

  Puis, comme $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, on a donc

  $$a_1 < x_1 < b_1$$

- Hérédité. Puisque $a_k < x_k < b_k$, on a

  $$a_{k+1} \in \{a_k, x_k\} \quad b_{k+1} \in \{x_k, b_k\} \quad b_{k+1} \neq a_{k+1}$$

  En particulier, on en deduit que $a_{k+1} < b_{k+1}$. Comme $x_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$, on a donc

  $$a_{k+1} \geq a_k \quad b_{k+1} \leq b_k \quad a_{k+1} < x_k < b_{k+1},$$

  ce qui termine la preuve de la propriété (P_{k+1}).

On a donc bien montré que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Il reste à montrer que $\lim_{k\to+\infty}(b_k - a_k) = 0$. Pour cela, on montre par récurrence que

$$b_k - a_k = \frac{(b-a)}{2^k}$$

c'est à dire, qu'à chaque itération la taille de l'intervalle de recherche est divisée par 2. L'initialisation pour $k = 0$ est évidente. Supposons que la propriété est vraie au rang k et montrons qu'elle reste vraie pour $k+1$. Discutons suivant les cas (a) et (b) de la question 2 ci dessous.

(a) Si $f(a_k)f(x_k) < 0$, alors

$$a_{k+1} = a_k \quad b_{k+1} = x_k = \frac{b_k + a_k}{2}$$

Par suite, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$|a_{k+1} - b_{k+1}| = |a_k - x_k| = \frac{|a_k - b_k|}{2} = \frac{1}{2}\frac{(b-a)}{2^k} = \frac{(b-a)}{2^{k+1}}$$

(b) Si $f(a_k)f(x_k) \geq 0$, alors

$$a_{k+1} = x_k = \frac{b_k + a_k}{2} \quad b_{k+1} = b_k.$$

De nouveau, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$|a_{k+1} - b_{k+1}| = |b_k - x_k| = \frac{|b_k - a_k|}{2} \leq \frac{(b-a)}{2^k}.$$

On a donc bien montré que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elle convergent donc vers une même limite α.
Enfin, puisque

$$a_k < x_k < b_k,$$

le théorème de gendarmes donne $\lim_{k\to} x_k = \alpha$.

4. Par définition de l'algorithme, on a vu à la question 2 que
$$f(a_k)f(b_k) \leq 0.$$
Par conséquent, le passage à la limite donne
$$f(\alpha)^2 \leq 0$$
ce qui implique $f(\alpha) = 0$. On a donc montré que l'algorithme de dichotomie converge vers une racine de f sur $[a, b]$. En règle génerale, on ne peut pas conclure que $\alpha = \gamma$. Par contre, si f n'a qu'une racine dans l'intervalle $[a, b]$, alors $\alpha = \gamma$.
5. On a vu que
$$|b_k - a_k| = \frac{(b-a)}{2^k}$$
et x_k milieu de $[a_k, b_k]$. Donc
$$|x_k - a_k| = \frac{(b-a)}{2^{k+1}} \quad \text{et} \quad |x_k - b_k| = \frac{(b-a)}{2^{k+1}}$$
Mais α appartient à $[a_k, x_k]$ ou à $[x_k, b_k]$. Dans le premier cas, on a donc
$$|\alpha - x_k| < |a_k - x_k| \leq \frac{(b-a)}{2^{k+1}},$$
et, dans le second cas,
$$|\alpha - x_k| < |b_k - x_k| \leq \frac{(b-a)}{2^{k+1}}.$$
6. (a) Pour avoir $|x_k - \alpha| < \varepsilon$, il suffit que
$$\frac{(b-a)}{2^{k+1}} < \varepsilon$$
c'est à dire que
$$k > \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln 2} - 1.$$
On peut prendre $k = \frac{\ln(b-a)-\ln(\varepsilon)}{\ln 2}$.
(b) $|x_{\tilde{k}} - \alpha| < \varepsilon/10$, on peut prendre
$$\tilde{k} = \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon/10)}{\ln 2}$$
si bien que
$$\tilde{k} - k = \frac{-\ln(\varepsilon) + \ln(10) + \ln \varepsilon}{\ln 2} = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \approx 3.3$$
Il suffit donc de 4 itérations supplémentaires pour diviser l'erreur par 10 (au moins).