Exercice 3 (dimension 1)

Soit $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a,b]$ dans lui même ($\phi([a,b]) \subset [a,b]$). Soit $x_0 \in [a,b]$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{k+1} = \phi(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

1. Montrer que la suite (1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).

2. Montrer que si la suite (1) converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ.

3. Existence du point fixe (Théorème du point fixe de Brouwer) : montrer qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $\phi(\alpha) = \alpha$.

4. On suppose de plus que ϕ est contractante, c'est à dire que

$$\exists\, L < 1, \text{tel que, } \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x-y|.$$

   a- Montrer que ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a,b]$.

   b- Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α, pour toute donnée initiale x_0 dans $[a,b]$.

---

1. La suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, connaissant x_0.

Dans le cas présent, il faut s'assurer que $x_p \in [a,b]$ pour tout entier p car la fonction ϕ n'est par hypothèse définie que sur $[a,b]$. En effet, si x_p n'appartient pas à l'intervalle $[a,b]$, alors on ne peut pas définir x_{p+1} puisque $\phi(x_p)$ n'existe pas.

Nous montrons ce résultat pas récurrence :

- Initialisation pour $p = 0$. Par hypothèse, $x_0 \in [a,b]$.
- Hérédité : nous supposons que $x_p \in [a,b]$ et nous allons montrer que $x_{p+1} \in [a,b]$. Par définition, $x_{p+1} = \phi(x_p)$. Puisque par hypothèse, $\phi([a,b]) \subset [a,b]$, on en déduit immédiatement que $x_{p+1} \in [a,b]$.

Remarque. *hypothèse importante :* $\phi([a,b]) \subset [a,b]$.

2. Supposons que la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $\bar{x}$. $\bar{x} \in [a,b]$ car $[a,b]$ est un intervalle fermé. Par ailleurs, en utilisant la continuité de ϕ, on a

$$\lim_{p\to+\infty} \phi(x_p) = \phi(\bar{x}).$$

Par les théorème de comparaison des limites et la relation (1), on a :

$$\bar{x} = \lim_{p\to+\infty} \phi(x_{p+1}) \overbrace{=}^{(1)} \lim_{p\to+\infty} \phi(x_p) = \phi(\bar{x}).$$

Ainsi $\bar{x} = \phi(\bar{x})$ et donc $\bar{x}$ est un point fixe de ϕ.

Remarque. *hypothèses importantes :* $[a,b]$ *est fermé et* ϕ *est continue sur* $[a,b]$.

3. On considère la fonction g définie par $g(x) = \phi(x) - x$. Comme $\phi([a,b]) \subset [a,b]$,

$$g(a) = \phi(a) - a \geq a - a \geq 0.$$

De manière similaire,

$$g(b) = \phi(b) - b \leq b - b \leq 0.$$

Puisque ϕ est continue sur $[a,b]$, le théorème des valeurs intermédiaires (ou Bolzano) (sur $[a,b]$, ϕ prend toutes les valeurs entre $\phi(a)$et $\phi(b)$) garantit l'existence d'un nombre $\alpha \in [a,b]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Or

$$0 = g(\alpha) = \phi(\alpha) - \alpha,$$

donc α est un point fixe de ϕ.

Remarque. *L'hypothèse de continuité de* ϕ *est cruciale. Le résultat est faux si* ϕ *n'est pas continue. On peut par exemple considérer la fonction* $\phi : [-1,1] \to [-1,1]$ *telle que*

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ -1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{1}{2} & si\ 0 < x \leq 1, \end{cases} \tag{2}$$

qui n'admet pas de point fixe sur $[-1,1]$.

On pourra aussi remarquer qu'il n'y a pas forcément unicité du point fixe. En effet, la fonction $\phi(x) = x$ *est continue de* $[a,b]$ *dans* $[a,b]$ *et admet une infinité de points fixes.*

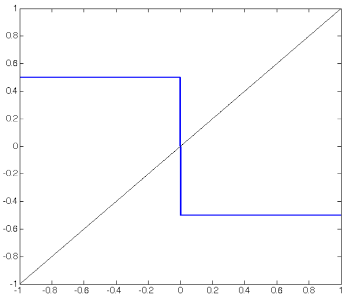

FIGURE 1 – Graphe représentatif de la fonction (2) et de la droite $y = x$

4.

a- Nous utilisons une démarche classique pour montrer l'unicité. Nous supposons que la fonction ϕ admet deux points fixes α_1 et α_2 ($\alpha_1 = \phi(\alpha_1)$ et $\alpha_2 = \phi(\alpha_2)$) et nous allons montrer que $\alpha_1 = \alpha_2$. En utilisant le fait que ϕ est contractante, on a

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

ce qui peut être réécrit comme

$$(1 - L)|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 0.$$

Comme $L < 1$, $(1 - L) > 0$, $(1 - L)|\alpha_1 - \alpha_2|$ est positif ou nul. Donc $(1 - L)|\alpha_1 - \alpha_2|$ est à la fois positif ou nul et négatif ou nul si bien que

$$(1 - L)|\alpha_1 - \alpha_2| = 0.$$

Comme $(1 - L) \neq 0$, on a $|\alpha_1 - \alpha_2| = 0$. Finalement $\alpha_1 = \alpha_2$. ϕ a donc au plus un point fixe.

b- D'après les questions 3 et 4, on sait que la fonction ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| \leq L|x_k - \alpha|,$$

si bien que, par récurrence, on peut montrer que

$$|x_k - \alpha| \leq L^k|x_0 - k|.$$

Comme $L < 1$, $\lim\limits_{k \to +\infty} L^k = 0$ et donc le terme de droite de l'inégalité précédente tend vers 0. Par le théorème de comparaison des limites,

$$\lim_{k \to +\infty} |x_k - \alpha| = 0.$$