Exercice 4 (Extension au cas d'un espace de Banach)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach (espace vectoriel normé complet, de norme notée $\|\cdot\|$). On considère une application $\phi : E \mapsto E$ est contractante :

$$\exists\, L < 1, \text{tel que, } \forall (x, y) \in E^2,\ \|\phi(x) - \phi(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

A partir de $x_0 \in E$ donné, on construit la suite récurrente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{k+1} = \phi(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

1. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2. Montrer que la fonction ϕ est continue. En déduire que si la suite x_k converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ.

3. Montrer que si ϕ admet un point fixe alors ce point fixe est unique.

4. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En déduire que ϕ admet une unique point fixe qui est donné par la limite de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ quand k tend vers $+\infty$.

5. Application : soit $\phi : E \mapsto E$ une application continue telle que $\phi^m = \underbrace{\phi \circ \phi \circ \cdots \circ \phi}_{m fois}$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ est contractante :

   a- Montrer que ϕ^m a un unique point fixe $a \in E$.
   b- Montrer que $\phi(\phi^m(a)) = \phi(a)$. En déduire que ϕ admet un point fixe.
   c- Montrer que si a est un point fixe de ϕ alors a est un point fixe de ϕ^m.
   d- À l'aide des deux questions précédentes, montrer que ϕ admet un unique point fixe.

---

1. Il suffit de montrer que $x_k \in E$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La vérification est immédiate puisque ϕ est une application de E dans E.

2. Il est facile de voir que ϕ est continue. En effet, comme ϕ est contractante (et en utilisant le théorème de comparaison des limites)

$$\lim_{x\to y} \|\phi(x) - \phi(y)\| \leq L \lim_{x\to y} \|x - y\| = 0.$$

En fait, on peut montrer que la fonction ϕ est uniformément continue, c'est à dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in E^2, \|x - y\| < \eta \Rightarrow \|\phi(x) - \phi(y)\| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\eta = \varepsilon$. On suppose que $\|x - y\| < \eta$. Alors, puisque ϕ est contractante, on a

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq L\varepsilon < \varepsilon,$$

ce qui prouve l'uniforme continuité de ϕ. Ainsi, si la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ dans E, alors $\bar{x} \in E$ et, comme ϕ est continue, on a

$$\bar{x} = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to+\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Autrement dit, $\bar{x}$ est un point fixe de ϕ.

3. Supposons que ϕ admette deux points fixes x_1 et x_2 appartenant à E. Alors, puisque ϕ est contractante,

$$\|x_1 - x_2\| = \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|,$$

ou encore

$$\underbrace{(1 - L)}_{>0}\underbrace{\|x_1 - x_2\|}_{\geq 0} \leq 0.$$

Donc $\|x_1 - x_2\| = 0$ et $x_1 = x_2$.

4. **Démarche genérale :** pour montrer l'existence d'un point fixe, nous allons d'abord montrer que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E. Comme E est un espace **complet**, nous en déduirons que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\bar{x} \in E$. En utilisant la question 2, on sait que $\bar{x}$ est un point fixe de E. Nous aurons ainsi établi l'existence d'un point fixe pour ϕ. Enfin, la question 3 nous assure par ailleurs que ce point fixe est unique.

Nous rappelons que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{p>n, q>n} \|x_p - x_q\| = 0,$$

ou encore, en utilisant les quantificateurs,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \forall n \geq N, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|x_{n+k} - x_n\| < \varepsilon. \tag{2}$$

Cela signifie que les termes de la suite se rapprochent uniformément les uns des autres quand n tend vers $+\infty$.

Le suite de cette question consiste à montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par (1) est une suite de Cauchy. Commençons par un calcul préliminaire. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|x_{n+k} - x_n\| \quad \leq \quad \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \|x_{n+k-1} - x_{n+k-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| = \sum_{j=1}^{k} \|x_{n+j} - x_{n+j-1}\|. \tag{3}$$

Comme ϕ est contractante, il est par ailleurs facile de voir que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{j+1} - x_j\| \leq L^j \|x_1 - x_0\|.$$

En introduisant cette majoration dans (3), on a

$$\begin{aligned}
\|x_{n+k} - x_n\| \quad &\leq \quad \sum_{j=1}^{k} L^{n+j-1} \|x_1 - x_0\|, \\
&= \quad L^n \, \|x_1 - x_0\| \, \sum_{j=0}^{k-1} L^j \qquad \text{(somme d'une suite géométrique)}, \\
&= \quad L^n \, \|x_1 - x_0\| \, \frac{1 - L^k}{1 - L}, \\
&\leq \quad L^n \, \|x_1 - x_0\| \, \frac{1}{1 - L} \qquad (0 \leq L < 1).
\end{aligned} \tag{4}$$

Remarque (Somme d'une suite géométrique)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison ℓ : $u_0 \in \mathbb{R}$*

$$u_n = u_0 \ell^n \quad n \in \mathbb{N}$$

Alors, pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$

$$\sum_{n=p}^{n=q} u_n = \overbrace{u_p}^{\text{premier terme}} \; \frac{1 - \ell^{\overbrace{q - p + 1}^{\text{nb. de termes}}}}{1 - \ell}$$

Montrons maintenant $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, c'est à dire que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie (2). Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons N tel que

$$L^N \frac{|x_1 - x_0|}{1 - L} < \varepsilon.$$

Bien sur, un tel N existe puisque, comme $0 < L < 1$, L^n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (on peut par exemple définir N comme étant le plus petit entier tel que $N > \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln L}$). Ainsi, pour tout $n \geq N$, et pour tout nombre entier $k \geq 0$, en utilisant (4), on voit que

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leq L^n \, \|x_1 - x_0\| \, \frac{1}{1 - L} \leq L^N \|x_1 - x_0\| \, \frac{1}{1 - L} < \varepsilon, \tag{5}$$

ce qui prouve (2) et donc que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Remarque. *Nous attirons l'attention sur le fait que cette preuve d'existence est fausse si E n'est pas complet.*

Nous avons donc démontré le résultat suivant :

Théorème (Théorème du point fixe de Banach)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et soit $\phi : E \mapsto E$ une application contractante :*

$$\exists\, L < 1, \textit{tel que, } \forall (x, y) \in E^2, \; \|\phi(x) - \phi(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Alors φ admet un unique point fixe x_* appartenant à E. De plus, quel que soit $x_0 \in E$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

converge vers x_*.

5. Application :

   a- ϕ^m est contractante. Donc, en utilisant la question précédente, ϕ^m a un unique point fixe, noté a dans E :
   $$\phi^m(a) = a.$$

   b- En utilisant la précédente formule, on a $\phi(\phi^m(a)) = \phi(a)$, ce qui peut aussi s'écrire
   $$\phi^m(\phi(a)) = \phi(a).$$
   Autrement dit, $\phi(a)$ est un point fixe de ϕ^m. Mais puisque ϕ^m a un unique point fixe a, on a
   $$\phi(a) = a.$$
   Ainsi, ϕ admet un point fixe.

   c- Si a est un point fixe de ϕ, alors $\phi(a) = a$. Ceci implique que $\phi \circ \phi(a) = a$, et par récurrence on montre facilement que $\phi^m(a) = a$. Ainsi a est un point fixe de ϕ^m.

   d- On a montré dans la question b que ϕ admet un point fixe. Il reste à montrer que ce point fixe est unique. Supposons que ϕ a deux points fixes distincts a_1 et a_2. Alors, d'après la question précédente,
   $$\phi^{(m)}(a_1) = a_1 \quad \phi^{(m)}(a_2) = a_2.$$
   Or, d'après la question a, $\phi^{(m)}$ a un unique point fixe a. On en déduit donc que $a_1 = a_2 = a$. Donc ϕ admet un unique point fixe.

Remarque. *Soit U un sous ensemble fermé de E. On remarquera que les résultats de l'exercice restent valables dans le cas où $\phi : U \subset E \to E$ est telle que $\phi(U) \subset U$.*