Exercice 5 (Point fixe attractif)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α et $\phi \in \mathcal{C}^1(]\alpha_-, \alpha_+[)$. On suppose que α est un point fixe de ϕ tel que

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$. Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$ et que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.En déduire que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obtenue à l'aide de l'algorithme du point fixe

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \phi(x_k), \tag{1}$$

est bien définie et converge.

2. Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha).$$

En déduire que la méthode du point fixe est au moins d'ordre 1.

3. Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^{(p+1)}(\mathcal{V})$ et que $\phi^{(i)}(\alpha) = 0$ pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq p$. Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}.$$

En déduire que la méthode du point fixe est d'ordre $p + 1$ dans ce cas.

---

1. Puisque ϕ' est continue et que $|\phi'(\alpha)| < 1$, il existe $\delta > 0$ et un intervalle fermé $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ tels que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $|\phi'(x)| < 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathcal{V} \subset [\alpha_-, \alpha_+]$. On pose

$$L = \sup_{x\in\mathcal{V}} |\phi'(x)| = \max_{x\in\mathcal{V}} |\phi'(x)|.$$

Comme $\mathcal{V}$ est fermé, $L < 1$. Soient $(x, y) \in \mathcal{V}^2$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]x, y[\subset \mathcal{V}$ telle que

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi'(\xi)(x - y).$$

Puisque $|\phi'(\xi)| \leq L$, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathcal{V}^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|,$$

ce qui signifie ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$. De plus, en utilisant la formule précédente on vérifie aisément que $|\phi(x)-\alpha| \leq |x-\alpha|$, ce qui implique que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$. D'après l'exercice 2 (ou le Théorème 3.3 du cours), on sait que si $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obtenue par l'algorithme du point fixe (1) est bien définie et converge vers α.

2. Comme α est un point fixe de ϕ et $x_{k+1} = \phi(x_k)$, on a

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \frac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha}.$$

On reconnait alors le taux d'accroissement de la fonction ϕ entre x_k et α, qui tend vers $\phi'(\alpha)$ lorsque x_k tend vers α. Comme, d'après la question précédente, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers α, on a donc

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha),$$

ou encore (définition de la limite d'une suite)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N},\ k \geq K \Rightarrow \left| \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} - \phi'(\alpha) \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Remarque. *Soit f une fonction continue sur $\mathcal{V}$ admettant un point fixe $\alpha \in \mathcal{V}$, soit $x_0 \in \mathcal{V}$. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par* (1)*.*

- On dit qu'une méthode de point fixe est d'ordre 1 *s'il existe une constante $0 < C < 1$ telle que*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha| \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- *Soit* $p \geq 1$. *On dit qu'une méthode de point fixe est d'ordre* p *s'il existe une constante* $C_p > 0$ *telle que*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C_p |x_k - \alpha|^p \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En particulier, une méthode d'ordre 2 *est dite quadratique.*

Choisissons ε suffisamment petit pour que $C = \max(|\phi'(\alpha) - \varepsilon|, |\phi'(\alpha) + \varepsilon|) < 1$ (ceci est bien entendu possible puisque $|\phi'(\alpha)| < 1$). D'après la formule (2), il existe un entier $K \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $k \geq K$,

$$\phi'(\alpha) - \varepsilon < \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} < \phi'(\alpha) + \varepsilon$$

Donc, pour tout $k \geq K$

$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} \leq \max(|\phi'(\alpha) - \varepsilon|, |\phi'(\alpha) + \varepsilon|) = C.$$

Puisque $C < 1$, on en déduit que si $|\phi'(\alpha)| \leq 1$, la méthode du point fixe est (au moins) d'ordre 1.

3. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, il existe $\xi_k \in]\alpha, x_k[$ tel que

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(x_k - \alpha)^i}{i!} \underbrace{\phi^{(i)}(\alpha)}_{=0} + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k).$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\xi_k \in]\alpha, x_k[$ tel que

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{1}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k). \tag{3}$$

Par ailleurs, comme $\phi'(\alpha) = 0$, alors (en particulier)$|\phi'(\alpha)| < 1$. D'après la question 1, cela signifie que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par l'agorithme du point fixe (1) converge vers α. Comme de plus, $\phi \in \mathcal{C}^{(p+1)}(\mathcal{V})$, $\phi^{(p+1)}$ est continue sur $\mathcal{V}$ et $\lim_{k \to +\infty} \phi^{(p+1)}(\xi_k) = \phi^{(p+1)}(\alpha)$. Finalement, en prenant la limite dans (3), on obtient

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{1}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\alpha),$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N},\ k \geq K \Rightarrow \left| \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} - \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!} \right| < \varepsilon. \tag{4}$$

Prenons $\varepsilon > 0$ (quelconque) et posons, comme dans la question précédente

$$C = \max\left(\left|\frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!} - \varepsilon\right|, \left|\frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!} + \varepsilon\right|\right).$$

Alors, en utilisant (4), on vérifie facilement qu'il existe un entier $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq K$,

$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^{p+1}} \leq C,$$

ce qui signifie que la méthode du point fixe est alors d'ordre $p + 1$.