Exercice 6

Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée continue sur $\mathbb{R}$) qui admet une racine $\bar{x} \in \mathbb{R}$. La méthode de Newton est une méthode iterative d'approximation de $\bar{x}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $k \leq 0$, on définit x_{k+1} par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{1}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que sous certaines conditions, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$.
1. Sous quelle condition la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?

2. Interpréter graphiquement l'algorithme (1).

3. Montrer que l'algorithme de Newton est un algorithme du point fixe appliqué à une fonction g que l'on déterminera.

4. On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et que $f'(\overline{x}) \neq 0$. En déduire une condition suffisante de convergence de l'algorithme de Newton.

5. On suppose que $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ et que $f'(\overline{x}) \neq 0$. Montrer que la méthode de Newton, lorsqu'elle converge est d'ordre 2 (on dit alors que l'erreur de convergence est quadratique).

---

1. Pour que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bien définie, il faut que chacun de ses termes soient bien définis. Pour cela, il faut et il suffit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f'(x_k)$ ne s'annule pas. En particulier, si f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors la suite est bien définie.

2. Le terme x_{k+1} défini par (1) est l'intersection entre la tangente à f au point x_k et l'axe des abscisses $y = 0$ (voir Figure 1) : en effet, l'équation de la tangente à f au point x_k est donnée par

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k).$$

Le point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente est le point d'abscisse $\tilde{x}$ (et d'ordonnée 0), tel que $0 = f'(x_k)\tilde{x} + (f(x_k) - f'(x_k)x_k)$, c'est à dire

$$\tilde{x} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

On retrouve bien que $x_{k+1} = \tilde{x}$.

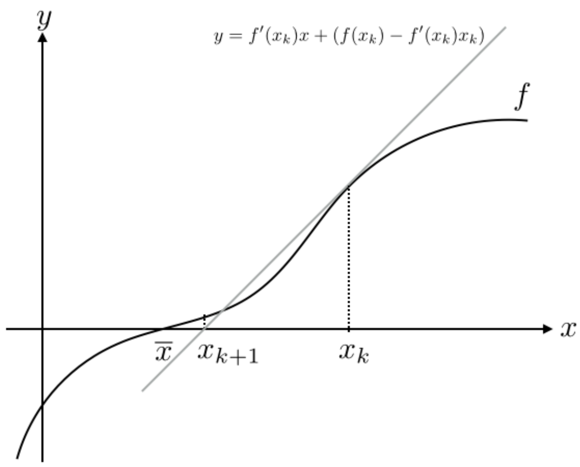

FIGURE 1 – Illustration de la méthode de Newton. Le point x_{k+1} est défini comme l'intersection entre l'axe des abscisses et la tangent à la courbe f au point x_k (en gris sur le dessin, droite d'équation $y = f'(x_k)x + (f(x_k) - f'(x_k)x_k)$)

Remarque. *Si $f'(x_k) = 0$, la tangente à f au point x_k est parallèle à l'axe des abscisses. Il n y a donc pas de point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente à f au point x_k. On retrouve bien que l'on ne peut pas définir x_{k+1} dans ce cas.*

3. Il suffit de remarquer que $x_{k+1} = g(x_k)$ où

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2}$$

Si $f'(x)$ ne s'annule pas (au moins localement près de $\bar{x}$), alors $g(x)$ est une fonction continue dans un voisinage de $\bar{x}$.

4. Puisque f est deux fois dérivable et que $f'(\bar{x}) \neq 0$, g est $\mathcal{C}^1$ en utilisant l'exercice précédent, on sait que la méthode du point fixe associée à g va converger localement (c'est à dire quad x_0 est suffisamment proche de $\overline{x}$) si $|g'(\overline{x})| < 1$. Or,

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}. \tag{3}$$

On rappelle que par définition $f(\overline{x}) = 0$. Si l'on suppose que $f'(\overline{x}) \neq 0$, alors $g'(\overline{x}) = 0$. Donc, $|g'(\overline{x})| < 1$, et il existe un nombre réel $\eta > 0$ et un nombre réel $K \in]0, 1[$ tels que, pour tout $x \in [\overline{x} - \eta, \overline{x} + \eta]$,

$$|g'(x)| \leq K < 1.$$

Par suite, si $x_0 \in [\overline{x} - \eta, \overline{x} + \eta]$, l'algorithme de Newton converge (cf. exercice précédent ou le Theorème 3.5 du cours).

Remarque. *L'algorithme de Newton converge localement. Cela signifie qu'il faut choisir x_0 suffisamment proche de $\overline{x}$ pour que ce dernier converge.*

4. Supposons que f est trois fois dérivable et que $f'(\overline{x}) \neq 0$. Par conséquent, g est deux fois dérivable. De plus, d'après (3), $g'(\overline{x}) = 0$. En utilisant l'exercice précédent (ou la Proposition 3.6 du cours), on en déduit que la méthode de Newton est donc au moins d'ordre 2. On dit alors que l'erreur $e_k = x_k - \alpha$ est quadratique : en effet, pour k suffisamment grand,

$$e_{k+1} \leq C e_k^2.$$