Sup'Galilée
MACS1

Année 2017/2018

Analyse numérique-TD2
Méthodes directes pour la résolution des systèmes linéaires

---

1 Résolution des systèmes linéaires diagonaux et triangulaires

Exercice 1

Soient $\mathbf{D}$, $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$ trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, respectivement diagonale, triangulaire inférieure et triangulaire supérieure. Soit $b \in \mathbb{C}^n$.

1. *(algo)* Résoudre $\mathbf{D}x = b$ et écrire l'algorithme (fonction ResDiag) permettant de résoudre ce système. Calculer le coût (évaluer le nombre d'opérations élémentaires) de cet algorithme.
2. *(algo)* Résoudre $\mathbf{L}x = b$ et écrire l'algorithme (fonction ResTriInf) permettant de résoudre ce problème. Calculer le coût de cet algorithme.
3. *(algo)* Résoudre $\mathbf{U}x = b$ et écrire l'algorithme (fonction ResTriSup) permettant de résoudre ce problème. Calculer le coût de cet algorithme.
4. Soit $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Expliquer comment résoudre $\mathbf{A}x = b$ et écrire l'algorithme (fonction ResFactLU) permettant de résoudre ce problème. Calculer le coût de cet algorithme.

2 Factorisation LU

Exercice 2 : généralités

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible admettant une factorisation $\mathbf{LU}$ où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{U}$ est une matrice triangulaire supérieure.

1. Montrer que si factorisation $\mathbf{LU}$ existe alors elle est unique.
2. Décrire une méthode permettant de calculer explicitement les coefficients des matrices $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$.
3. (*algo*) Ecrire une fonction FactLU permettant de calculer les matrices $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$.
4. Quel est le coût de cette méthode (évaluer le nombre d'opérations élémentaires) ?
5. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Est-il toujours possible de décomposer $\mathbf{A}$ sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{U}$ est une matrice triangulaire supérieure ?

Exercice 3 : sous matrices principales

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $m \in [\![1, n]\!]$. On appelle $\mathbf{A}_m \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ la matrice carrée obtenue en prenant les m premières lignes et les m premières colonnes de $\mathbf{A}$. Les matrices $(\mathbf{A}_m)_{m\in[\![1,n]\!]}$ sont appelées sous-matrices principales de $\mathbf{A}$.

On suppose que $\mathbf{A}$ admet une factorisation $\mathbf{LU}$ où $\mathbf{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{U}$ est triangulaire inversible. Montrer que les sous matrices principales de $\mathbf{A}$ sont inversibles.

Exercice 4 : factorisation $\mathbf{LU}$ des matrices à diagonale strictement dominante

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ est une matrice dite à diagonale strictement dominante :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |\mathbf{B}_{ii}| > \sum_{j\in[\![1,n]\!], j\neq i} |\mathbf{B}_{ij}|$$

1. Montrer que $\mathbf{A}$ est inversible.
2. Montrer que toutes les sous matrices principales de $\mathbf{A}$ sont inversibles. En déduire que $\mathbf{A}$ admet une factorisation $\mathbf{LU}$ ($\mathbf{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{U}$ est triangulaire supérieure inversible).
3. Montrer que $\mathbf{L}^T$ est une matrice à diagonale strictement dominante.

3 Méthode d'élimination de Gauss

Exercice 5

1. Résoudre le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ par la méthode d'élimination de Gauss dans les trois cas suivants :

a-

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

b-

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c-

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dans chaque cas, on écrira les étapes de la méthode sous forme matricielle.

2. *(algo)* Soit $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible et soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur ($\mathbf{b} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Écrire l'algorithme d''élimination de Gauss pour résoudre le système linéaire $\mathbf{Mx} = \mathbf{b}$.

4 Factorisation des matrices symétriques

Exercice 6

1. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible admettant une factorisation $\mathbf{LU}$ où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{U}$ est une matrice triangulaire supérieure. Montrer que $\mathbf{A}$ admet une factorisation $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^t$ où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale inversible.
2. Montrer qu'une matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une factorisation $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^t$ où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs si et seulement si $\mathbf{A}$ est symétrique définie positive. Montrer que cette factorisation est unique.
3. En déduire que $\mathbf{A}$ admet une unique factorisation de Cholesky $\mathbf{A} = \mathbf{BB}^t$ où $\mathbf{B}$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs si et seulement si $\mathbf{A}$ est matrice symétrique définie positive.
4. On suppose $\mathbf{A}$ symétrique définie positive. Décrire une méthode permettant de calculer explicitement les coefficients de la matrice $\mathbf{B}$ précédente.
5. *(algo)* Ecrire la fonction CHOLESKY permettant de calculer la matrice $\mathbf{B}$ de la méthode précédente. Quel est le coût de la méthode ?

5 Vrai ou Faux ?

1. Toute matrice inversible $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$) peut être écrite sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ où $\mathbf{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure.
2. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$) une matrice inversible admettant les deux décompositions suivantes :

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}_2\mathbf{U}_2,$$

où $\mathbf{L}_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{L}_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices triangulaires inférieures, et $\mathbf{U}_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{U}_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices triangulaires supérieures. Alors $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$ et $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$.
3. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$) une matrice triangulaire inférieure. Alors $\mathbf{A}$ admet une décomposition $\mathbf{LU}$, où $\mathbf{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure.
4. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$) une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une matrice $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure inversible dont les éléments diagonaux sont strictement négatifs telle que $\mathbf{A} = \mathbf{BB}^T$.