Exercice 2

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible admettant une factorisation $\mathbf{LU}$ où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{U}$ est une matrice triangulaire supérieure.

1. Montrer que si factorisation $\mathbf{LU}$ existe alors elle est unique.
2. Décrire une méthode permettant de calculer explicitement les coefficients des matrices $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$.
3. (*algo*) Ecrire une fonction FACTLU permettant de calculer les matrices $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$.
4. Quel est le coût de cette méthode (évaluer le nombre d'opérations élémentaires) ?
5. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Est-il toujours possible de décomposer $\mathbf{A}$ sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{U}$ est une matrice triangulaire supérieure ?

---

1. Supposons que la matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}_2\mathbf{U}_2, \tag{1}$$

où

- $\mathbf{U}_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{U}_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathbf{L}_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{L}_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices triangulaires inférieures à diagonale unité (leurs coefficients diagonaux sont tous égaux à 1).

Nous allons montrer que $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$ et $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$. Comme $\mathbf{A}$ est inversible, alors

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{L}_1\mathbf{U}_1) = \det(\mathbf{L}_1)\det(\mathbf{U}_1) \neq 0.$$

Cela signifie donc que $\det(\mathbf{L}_1) \neq 0$ et $\det(\mathbf{U}_1) \neq 0$, autrement dit que les matrices $\mathbf{L}_1$ et $\mathbf{U}_1$ sont inversibles (on savait déjà en fait que $\mathbf{L}_1$ était inversible puisque $\mathbf{L}_1$ est triangulaire inférieure à diagonale unité). De manière similaire, on montre que $\mathbf{L}_2$ et $\mathbf{U}_2$ sont inversibles.

Ainsi, la seconde égalité de (1) est équivalente à

$$(\mathbf{L}_2)^{-1}\mathbf{L}_1 = \mathbf{U}_2(\mathbf{U}_1)^{-1}. \tag{2}$$

La matrice $\mathbf{L}_2$ est triangulaire inférieure à diagonale unité. Par conséquent, la matrice $\mathbf{L}_2^{-1}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité. Donc comme $\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_1$ est le produit de deux matrices triangulaires inférieures à diagonale unité, le terme de gauche de l'égalité (2) est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité.

De manière similaire, comme la matrice $\mathbf{U}_1$ est triangulaire supérieure, son inverse $(\mathbf{U}_1)^{-1}$ est triangulaire supérieure. Donc, le terme de droite de l'égalité (2) est une matrice trinagulaire supérieure.

Ainsi, l'égalité (2) implique que $(\mathbf{L}_2)^{-1}\mathbf{L}_1(\mathbf{L}_2)^{-1}$ et $\mathbf{U}_2(\mathbf{U}_1)^{-1}$ sont des matrices diagonales à diagonale unité. Puisque la seule matrice diagonale à diagonale unité est la matrice identité, on a

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1.$$

Autrement dit, si $\mathbf{A}$ admet une factorisation $\mathbf{LU}$ (avec $\mathbf{L}$ triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{U}$ triangulaire inférieure), cette factorisation est unique.

Remarque. *Ce résultat respose de manière essentiel sur le fait que $\mathbf{L}$ est à diagonale unité. Sans cette hypothèse, il n'y a pas unicité de la décomposition.*

2. On suppose que $\mathbf{A}$ admet une décomposition $\mathbf{LU}$. L'objectif de cette question de calculer $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$. On pose $\mathbf{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in[1:n]^2}$ ($(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$), $\mathbf{L} = (\ell_{ij})_{(i,j)\in[1:n]^2}$, $\mathbf{U} = (u_{ij})_{(i,j)\in[1:n]^2}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Comme $\mathbf{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité, on sait que, pour tout $i \in [1:n]$

$$\ell_{ii} = 1 \quad \text{et} \quad \ell_{ik} = 0 \quad \forall k > i. \tag{3}$$

De manière similaire, comme $\mathbf{U}$ est triangulaire supérieure, pour tout $j \in [1:n]$,

$$b_{kj} = 0 \quad \forall k > j. \tag{4}$$

Ainsi les inconnues du problèmes sont :

- les nombres ℓ_{ik}, pour tout $i \in [1:n]$ et pour tout $k < i$.
- les nombres u_{kj}, pour tout $j \in [1:n]$ et pour tout $k < j$.

Comme $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, et en utilisant (3) et (4),

$$\forall (i,j) \in [1:n]^2, a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{ik} u_{kj}. \tag{5}$$

La question est donc la suivante : comment utiliser la formule (5) pour touver un algorithme de calcul des inconnues ℓ_{ik} ($i \in [1:n]$, $k < i$) et u_{kj} ($j \in [1:n]$, $k < j$) ? Nous proposons deux méthodes qui permettent de déterminer ces coefficients :

1. identification des coefficients de $\mathbf{A}$ **lignes par lignes** : calcul de $\mathbf{U}$ et $\mathbf{L}$ lignes par lignes.
2. identification des coefficients de $\mathbf{A}$ **mixte** : calcul de la $\mathbf{U}$ colonnes par colonnes et de $\mathbf{L}$ lignes par lignes.

Remarque. *La méthode que nous allons mettre en oeuvre pour calculer* $\mathbf{L}$ *et* $\mathbf{U}$ *s'appelle la méthode de Crout.*

Méthode 1 : identification lignes par lignes

Étape 1 : identification de la première ligne de $\mathbf{A}$

Nous allons voir que cette étape va nous permettre de calculer la première ligne de $\mathbf{U}$ (i.e les coefficient u_{1j} pour tout $j \in [1:n]$) et la première ligne de $\mathbf{L}$ (il n'y a en fait rien à calculer puisque $\ell_{11} = 1$ et $\ell_{1k} = 0$ sinon).

L'equation (5) pour $i = 1$ donne

$$a_{1j} = \sum_{k=1}^{1} \ell_{1k} u_{kj} = \ell_{11} u_{1j} = u_{1j}$$

car $\min(1,j) = 1$ et $\ell_{11} = 1$. Ainsi,

$$u_{1j} = a_{1j} \tag{6}$$

ce qui nous permet de calculer la première ligne de $\mathbf{U}$. A l'issue de cette première étape, la première ligne de $\mathbf{L}$ et la première ligne de $\mathbf{U}$ sont intégralement déterminée.

Étape 2 : identification de la deuxième ligne de $\mathbf{A}$

Nous allons voir que cette étape va nous permettre de calculer la deuxième ligne de $\mathbf{L}$ (i.e, le coefficient ℓ_{21}) **puis** la deuxième ligne de $\mathbf{U}$ (i.e les coefficient u_{2j} pour tout $j \geq 2$).

L'equation (5) pour $i = 2$ donne

$$a_{2j} = \sum_{k=1}^{\min(j,2)} \ell_{2k} u_{kj} \tag{7}$$

Nous discutons deux cas, suivant la valeur de $\min(j,2)$:

a- $j < 2$ $(\min(j,2) = j)$: dans ce cas, $j = 1$, et on a

$$a_{21} = \ell_{21} u_{11}.$$

Comme u_{11} a été calculé à la première étape, on en déduit que

$$\ell_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \tag{8}$$

si bien que la deuxième ligne de $\mathbf{L}$ est maintenant déterminée (On note, que puisque par hypothèse, $\mathbf{A}$ est inversible et $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, $u_{11} \neq 0$).

b- $j \geq 2$ $(\min(j,2) = 2)$: la formule (7) devient

$$a_{2j} = \ell_{21}u_{1j} + \ell_{22}u_{2j}$$

ou encore, puisque $\ell_{22} = 1$,

$$u_{2j} = a_{2j} - \ell_{21}u_{1j} \quad (\forall j \geq 2). \tag{9}$$

Le terme de droite de l'equation précédente est connu intégralement : ℓ_{21} a été calculée lors de l'étape 2-a ((8)) et les termes u_{1j} est connu depuis l'étape 1. La seconde ligne de $\mathbf{U}$ est maintenant complètement déterminée.

Remarque. *Dans le processus d'identification ci dessus, il n'est pas possible d'intervertir les étapes 2-a et 2-b.*

Étape i : identification de la ligne i de $\mathbf{A}$

Dans cette étape, nous allons calculer la ligne i de $\mathbf{L}$ (i.e, le coefficient ℓ_{ij}, $j < i$) (Étape i-a) **puis** la ligne i de $\mathbf{U}$ (i.e les coefficient u_{ij} pour tout $j \geq i$) (Étape i-b)).

Nous faisons l'hypothèse que les étapes précédentes (étapes k pour $k < i$) ont permis de calculer les $i-1$ premières lignes de $\mathbf{L}$ et les $i-1$ premières lignes de $\mathbf{U}$. On rappelle que l'equation (5) donne

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(j,i)} \ell_{ik}u_{kj}. \tag{10}$$

Nous discutons deux cas, suivant la valeur de $\min(j,i)$:

a- $j < i$ $(\min(j,i) = j)$: L'équation (10) devient

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \ell_{ik}u_{kj}. \tag{11}$$

On remarque que, comme $k \leq j < i$, les nombres u_{kj} sont connus. Pour $j = 1$, nous obtenons alors $a_{i1} = \ell_{i1}u_{11}$ ce qui nous permet de déterminer ℓ_{i1} par la formule

$$\ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$$

ℓ_{i1} étant déterminé, nous allons pouvoir déterminer ℓ_{i2}. En effet, l'équation (11) pour $j = 2$ donne

$$a_{i2} = \ell_{i1}u_{12} + \ell_{i2}u_{22}$$

Puisque les termes u_{12} et u_{22} (puisque $\mathbf{A}$ est inversible et $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, $u_{22} \neq 0$) ont été calculés lors d'étapes précédentes et que ℓ_{i1} vient d'être calculé, la seule inconnue de l'équation précédente est ℓ_{i2}. On obtient alors

$$\ell_{i2} = \frac{a_{i2} - \ell_{i1}u_{12}}{u_{22}}.$$

On peut ainsi continuer à déterminer ℓ_{ij} de proche en proche pour tout $j < i$. En effet, supposons ℓ_{ik} connu pour tout $k \leq j-1$. On peut réécrire l'équation (11) comme

$$\ell_{ij} = \frac{a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}u_{kj}}{u_{jj}} \quad (\forall j \leq i-1). \tag{12}$$

Le terme de droite de l'équation précédente est connu : en effet u_{kj} est connu pour tout $k < i$ (donc en particulier pour $k \leq j$). De même, les termes ℓ_{ik} sont connus. De plus, on sait que puisque $\mathbf{A}$ est inversible, l'hypothèse d'existence de la factorisation $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ garantit que $u_{jj} \neq 0$. Donc ℓ_{ij} est déterminé.

A l'issue de cette étape i-a, les coefficients ℓ_{ij} pour $j < i$ sont déterminés.

b- $j \geq i$ $(\min(j,i) = i)$: l'équation L'équation (10) devient

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}u_{kj} + \ell_{ii}u_{ij} \tag{13}$$

qui, comme $\ell_{ii} = 1$ donne

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj} \quad (\forall j \geq i). \tag{14}$$

Puisque les coefficients u_{kj} pour $k \leq i-1$ ont été déterminés lors des étapes précédentes que les coefficients ℓ_{ik} $(k \geq i)$ sont connus depuis l'étape i-a, le terme de droite de (14) est connu et l'équation (14) permet de construire u_{ij} pour tout $j \geq i$.

Remarque.

1. *Dans le processus d'identification de l'étape i-a, il n'est pas possible d'intervertir les sous étapes : dans l'égalité* (12)*, il faut connaitre ℓ_{ik} pour $k \leq j-1$ pour pouvoir calculer ℓ_{ij}. Il faut donc commencer par calculer ℓ_{i1}, puis ℓ_{i2} et ainsi de suite jusqu à $\ell_{i,i-1}$. Par contre, la définition* (14) *de u_{ij} ne fait pas appel à u_{ik} pour $k \leq j-1$. Les calculs* (14) *peuvent donc être effectués en parallèle.*
2. *On aurait aussi pu identifier les équations* (5) *colonnes par colonnes.*

Méthode 2 : identification mixte

Cette seconde méthode est une méthode récurrente qui va permettre de calculer les coefficients de $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$ en n étapes : à l'étape p, nous calculons

a- La ligne numéro p de $\mathbf{U}$, c'est à dire les coefficients u_{pj} pour $j \in [\![p, n]\!]$. Pour cela, nous utilisons la formule (10) avec $i = p$.

b- La colonne numéro p de $\mathbf{L}$, c'est à dire les coefficients ℓ_{ip} pour $i \in [\![p, n]\!]$. Pour cela, nous utilisons la formule (10) avec $j = p$.

Étape 1 :

a- On calcule la ligne numéro 1 de $\mathbf{U}$, c'est à dire les coefficients u_{1j} pour tout $j \in\in [\![1, n]\!]$.
Pour cela nous utilisons la formule (10) avec $i = 1$: $\forall j \in [\![1, n]\!]$

$$a_{1j} = \sum_{k=1}^{\min(1,j)} \ell_{1k} u_{kj} = \ell_{11} u_{1j} = u_{1j}$$

On a donc

$$u_{1j} = a_{1j} \quad \forall j \in [\![1, n]\!].$$

b- On calcule la colonne numéro 1 de $\mathbf{L}$, c'est à dire les coefficients ℓ_{i1} pour tout $i \in\in [\![1, n]\!]$.
Tout d'abord, on pose

$$\ell_{11} = 1,$$

puis, nous utilisons la formule (10) avec $i = 1$: $\forall i \in [\![2, n]\!]$

$$a_{i1} = \sum_{k=1}^{\min(i,1)} \ell_{ik} u_{k1} = \ell_{i1} u_{k1}$$

On en déduit que

$$\ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{k1}} \quad \forall i \in [\![2, n]\!].$$

Étape p :

À cette étape, on suppose que l'on connait les $p-1$ premières colonnes de $\mathbf{L}$ et les $p-1$ premières lignes de $\mathbf{U}$. Plus précisément, on suppose que les coefficients suivants sont connus :

- les coefficients ℓ_{ij} pour tout $j \in [\![1, p-1]\!]$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (ou $[\![j, n]\!]$).
- les coefficients u_{ij} pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ (ou $[\![i, n]\!]$).

On procède alors en deux étapes :

a- On calcule la ligne numéro p de $\mathbf{U}$, c'est à dire les coefficients u_{pj} pour tout $j \in [\![p, n]\!]$.
Pour cela nous utilisons la formule (10) avec $i = p$: $\forall j \in [\![p, n]\!]$

$$a_{pj} = \sum_{k=1}^{\min(p,j)} \ell_{pk} u_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \ell_{pk} u_{kj} = \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \ell_{pk} u_{kj}}_{\text{connu}} + u_{pj}.$$

Or, quel que soit $k \in [\![1, p-1]\!]$, ℓ_{pk} (coefficient de la colonne $k \leq p-1$ de $\mathbf{L}$) et u_{kj} (coefficient de la ligne $k \leq p-1$ de $\mathbf{U}$) sont connus. On en déduit donc

$$u_{pj} = a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} \ell_{pk} u_{kj} \tag{15}$$

b- On calcule la colonne numéro p de $\mathbf{L}$, c'est à dire les coefficients ℓ_{ip} pour tout $i \in\in [\![p, n]\!]$.
Tout d'abord, on pose

$$\ell_{pp} = 1,$$

puis, nous utilisons la formule (10) avec $i = p$: $\forall i \in [\![p+1, n]\!]$

$$a_{ip} = \sum_{k=1}^{\min(i,p)} \ell_{ik} u_{kp} = \sum_{k=1}^{p} \ell_{ik} u_{kp} = \sum_{k=1}^{p-1} \ell_{ik} u_{kp} + \ell_{ip} u_{pp}$$

Quel que soit $k \in [\![1, p-1]\!]$, ℓ_{ik} (coefficient de la colonne $k \leq p-1$ de $\mathbf{L}$) et u_{kp} (coefficients de la ligne $k \leq p-1$ de $\mathbf{U}$) sont connus. Par ailleurs, u_{pp} est aussi désormais connu par la formule (15). On en déduit donc que

$$\ell_{ip} = \frac{a_{ip} - \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \ell_{ik} u_{kp}}{u_{pp}} \quad \forall i \in [\![p+1, n]\!]. \tag{16}$$

Remarque. *Lors de l'étape p, il est possible de calculer les champs u_{pj} et ℓ_{ip} en parallèle. En revanche, il faut attendre que u_{pp} soit calculé avant de pouvoir calculer les nombres ℓ_{ip}.*

3. Algorithmes : nous proposons deux algorithmes. L'algorithme est basé sur une identification par lignes, alors que l'algorithme est basé sur une identification mixte.

Fonction FACTLU($\mathbf{A}$) : **L, U**

[$\mathbf{A}$ est une matrice carrée (inversible), ,
$\mathbf{U}$ est un matrice carrée triangulaire supérieure
$\mathbf{L}$ est une matrice trianguaire inferieure à diagonale unité

Ce programme calcule la décomposition $\mathbf{LU}$ de $\mathbf{A}$
par identification par lignes]

[Quelques initialisations]
$\mathbf{U} \leftarrow zeros(size(\mathbf{A}))$; $\mathbf{L} \leftarrow zeros(size(\mathbf{A}))$; *[On initialise les matrices $\mathbf{U}$ et $\mathbf{L}$ par la matrice nulle]*

Pour i **de** 1 **à** n **faire**

  ***[1- On calcule la ligne i de $\mathbf{L}$ (ℓ_{ij}, $j < i$)** (formule (12))]*
  Pour j **de** 1 **à** $i-1$ **faire**

    $\mathbf{L}(i,j) \leftarrow \mathbf{A}(i,j)$
    Pour k **de** 1 **à** $j-1$ **faire**
      $\mathbf{L}(i,j) \leftarrow \mathbf{L}(i,j) - \mathbf{L}(i,k)\mathbf{U}(k,j)$;
    Fin Pour
    $\mathbf{L}(i,j) \leftarrow \mathbf{L}(i,j)/\mathbf{U}(j,j)$;

  Fin Pour
  [2- On pose $\ell_{ii} = 1$]
  $\mathbf{L}(i,i) \leftarrow 1$

  ***[3- On calcule la ligne i de $\mathbf{U}$ (u_{ij}, $j \geq i$)** (formule (14))]*
  Pour j **de** i **à** n **faire**
    $\mathbf{U}(i,j) \leftarrow \mathbf{A}(i,j)$;
    Pour k **de** 1 **à** $i-1$ **faire**
      $\mathbf{U}(i,j) \leftarrow \mathbf{U}(i,j) - \mathbf{L}(i,k)\mathbf{U}(k,j)$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour
Retourner $\mathbf{L}$,$\mathbf{U}$;
Fin

Algorithme 1: Algorithme pour la factorisation $\mathbf{LU}$

Remarque. *On pourrait ne stocker qu'un tableau $\mathbf{A}$ et remplacer les valeurs de $\mathbf{A}$ par celles de $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$.*

Fonction FACTLUM($\mathbf{A}$) : **L, U**

[$\mathbf{A}$ est une matrice carrée (inversible) ,
$\mathbf{U}$ est un matrice carrée triangulaire supérieure
$\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité

Ce programme calcule la décomposition $\mathbf{LU}$ de $\mathbf{A}$
par identification mixte]

[Quelques initialisations]
$\mathbf{U} \leftarrow zeros(size(\mathbf{A}))$; $\mathbf{L} \leftarrow zeros(size(\mathbf{A}))$; *[On initialise les matrices $\mathbf{U}$ et $\mathbf{L}$ par la matrice nulle]*

Pour p **de** 1 **à** n **faire**

  ***[1- On calcule la ligne** p **de** $\mathbf{U}$ **:** $(u_{pj},\ j \in [\![p, n]\!])$ (formule (15))]*
  Pour j **de** p **à** n **faire**
    $\mathbf{U}(p, j) \leftarrow \mathbf{A}(p, j)$
    Pour k **de** 1 **à** $p-1$ **faire**
      $\mathbf{U}(p, j) \leftarrow \mathbf{U}(p, j) - \mathbf{L}(p, k)\mathbf{U}(k, j)$
    Fin Pour
  Fin Pour
  ***[2- On calcule la colonne** p **de** $\mathbf{L}$ **:** $(\ell_{ip},\ i \in [\![p, n]\!])$ (formule (16))]*
  $\mathbf{L}(p, p) \leftarrow 1$
  Pour i **de** $p+1$ **à** n **faire**
    $\mathbf{L}(i, p) \leftarrow \mathbf{A}(i, p)$
    Pour k **de** 1 **à** $p-1$ **faire**
      $\mathbf{L}(i, p) \leftarrow \mathbf{L}(i, p) - \mathbf{L}(i, k)\mathbf{U}(k, p)$
    Fin Pour
    $\mathbf{L}(i, p) \leftarrow \mathbf{L}(i, p)/\mathbf{U}(p, p)$
  Fin Pour
Fin Pour
Retourner **L**,**U** ;

Fin

Algorithme 2: Algorithme pour la factorisation $\mathbf{LU}$ par identification mixte

4. Coût de la factorisation $\mathbf{LU}$.

Identification par lignes

On évalue d'abord le coût pour l'identification chaque ligne. On pose

- N_i^+ : nombre d'additions ou de soustractions intervenant dans le caclul de la ligne i de $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$.
- N_i^* : nombre de multiplications ou de divisions intervenant dans le caclul de la ligne i de $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$.

En étudiant l'algorithme de la question 3, on voit que

colonne	$N_{i,j}^+$	$N_{i,j}^*$
$j < i$	$j-1$	j
$j \geq i$	$i-1$	$i-1$

Donc

$$
\begin{aligned}
N_i^* &= \sum_{j=1}^{n-1} N_{i,j}^* = \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} j}_{\text{somme de suite arithmétique}} + \sum_{j=i}^{n} \underbrace{(i-1)}_{\text{independant de } j} \\
&= \frac{(i-1)\overbrace{(1+(i-1))}^{=i}}{2} + (n-i+1)(i-1) \\
&= -\frac{i^2}{2} + \frac{i}{2} + (n+1)(i-1).
\end{aligned}
$$

De même,

$$\begin{aligned}
N_i^+ &= \sum_{j=1}^{i-1}(j-1) + \sum_{j=1}^{n}(i-1) \\
&= \frac{(i-1)(i-2)}{2} + (n-i+1)(i-1) \\
&= N_i^* - (i-1).
\end{aligned}$$

On calcule ensuite le nombre total d'additions N^+ et de multilplications N^* en effectuant la somme sur les lignes pour i allant de 1 à n. On a

$$\sum_{j=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc

$$\sum_{j=1}^{n}(-\frac{i^2}{2}+\frac{i}{2}) = -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = -\frac{n(n+1)(n-1)}{6}.$$

De plus,

$$\sum_{i=1}^{n}(n+1)(i-1) = (n+1)\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n+1)(n-1)}{2}.$$

Finalement

$$N^* = \frac{n(n+1)(n-1)}{2} - \frac{n(n+1)(n-1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

De même,

$$\begin{aligned}
N^+ &= \sum_{i=1}^{n} N_i^+ = \sum_{i=1}^{n} N_i^* - \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(i-1)}_{=n(n-1)/2}, \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2}, \\
&= \frac{n(n-1)}{6}(2(n+1)-3), \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Le nombre total d'opérations $N_{\textsf{total}} = N^+ + N^*$ est donc donné par

$$\begin{aligned}
N_{\textsf{total}} &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \\
&= \frac{n(n-1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Quand n est grand le coût total de la factorisation $\mathbf{LU}$ est donc de l'ordre de $\frac{2n^3}{3}$. Pour résoudre le système $\mathbf{A}x = \mathbf{LU}x = b$ (cf exercice 1) est donc de

$$\frac{2n^3}{3} + O(n^2) \sim \frac{2n^3}{3}.$$

Identification mixte

On pose

1. N_p^+ : nombre d'additions et de soustractions intervenant lors du calcul de la ligne p de U et de la colonne p de L.
2. N_p^* : nombre de multilplications et de divisions intervenant lors du calcul de la ligne p de U et de la colonne p de L.
   On a

   $$N_p^+ = N_{p,U}^+ + N_{p,L}^+$$

   où $N_{p,U}^+$ (resp. $N_{p,L}^+$) désigne le nombre d'additions et de soustractions intervenant lors du calcul de la ligne p de U (resp. colonne p de $\mathbf{L}$). Or,

   $$N_{p,U}^+ = \sum_{j=p}^{n} N_{p,U,j}^+$$

où $N^+_{p,U,j}$ désigne le nombre d'additions et de soustractions intervenant lors du calcul de de u_{pj}. On a

$$N^+_{p,U,j} = p$$

Donc

$$N^+_{p,U} = p(n-p+1)$$

De manière similaire, on trouve

$$N^+_{p,L} = p(n-p+1)$$

ce qui donne

$$N^+_p = 2p(n-p+1)$$

En sommant sur p, on trouve donc

$$N^+ = \sum_{p=1}^{n} 2p(n-p+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

De manière similaire,

$$N^* \sim \frac{n^3}{3}$$

et on retrouve le meme nombre d'opérations que dans le cas de l'identification par lignes.

Remarque. *Même si les deux algorithmes conduisent à un nombre similaire de calculs, l'algorithme par indentification mixte se révèle avantageux dans le cas d'une implémentation parallèle.*

5. Non, même quand la matrice $\mathbf{A}$ est inversible, on ne peut pas toujours la décomposer sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ n'est pas toujours possible. En effet, si $u_{jj} = 0$, on ne peut pas appliquer l'algorithme (puisqu'il faudrait diviser par 0).

Une condition suffisante pour cette factorisation existe est que les mineurs principaux de $\mathbf{A}$ soient tous non nuls. On rappelle que le mineur principal de $\mathbf{A}$ d'ordre i est le déterminant de la matrice formée par la i premières colonnes et i premières lignes de $\mathbf{A}$.

Par contre, on peut toujours permuter des lignes pour obtenir une décomposition de type $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$.

Remarque. *En général, si on souhaite résoudre simplement $\mathbf{A}x = b$, on ne calculer pas explicitement $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$ mais on effectue directement le procédé d'élimination de Gauss. Par contre, si on a besoin de résoudre une famille de systèmes $\mathbf{A}x = b_i$ (pour différents second membres b_i), alors il devient utile de calculer les matrices $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$.*