Exercice 5

1. Résoudre le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ par la méthode d'élimination de Gauss dans les trois cas suivants :

a-

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

b-

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c-

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dans chaque cas, on écrira les étapes de la méthode sous forme matricielle.

2. *(algo)* Soit $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible et soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur ($\mathbf{b} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Écrire l'algorithme d''élimination de Gauss pour résoudre le système linéaire $\mathbf{Mx} = \mathbf{b}$.

Question 1a.

Étape A : processus d'élimination de Gauss

On transforme le système $\mathbf{A}x = b$ en un système triangulaire supérieur $\mathbf{U}x = \tilde{b}$ où $\mathbf{U}$ est une matrice triangulaire supérieure à diagonale unité en faisant des combinaisons linéaires des équations (ce qui équivaut à faire des combinaisons linéaires des lignes de $\mathbf{A}$).

Étape A1 :

On élimine x_1 dans les équations 2 et 3 (en faisant une combinaison linéaire entre la première et la deuxième équations d'une part, et entre la première et la troisième équations d'autre part) :

$$\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_1. \tag{1}$$

On obtient le système

$$\mathbf{A}_1 x = b_1 \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

En terme matriciel, ceci revient à multiplier les système $\mathbf{A}x = b$ à gauche par par la matrice triangulaire inférieure

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'étape A1 se résume donc à

$$\mathbf{A}x = b \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}_1 x = b_1 \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{L}_1\mathbf{A}, \text{ et } b_1 = \mathbf{L}_1 b. \tag{2}$$

$\mathbf{L}_1$ est une matrice triangulaire inférieure inversible à diagonale unité.

Étape A2 :

On élimine x_2 dans la troisième équation (pour cela, on fait une combinaison linéaire des équations 2 et 3) :

$$\mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_2/5. \tag{3}$$

On obtient le système

$$\mathbf{A}_2 x = b_2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -\frac{18}{5} \end{bmatrix} \tag{4}$$

En terme matriciel, ceci revient à multiplier les système $\mathbf{A}_1 x = b_1$ à gauche par par la matrice triangulaire inférieure

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

L'étape A2 se résume donc à

$$\mathbf{A}_1 x = b_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}_2 x = b_2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_1 \ \text{ et } b_2 = \mathbf{L}_2 b_1. \tag{5}$$

$\mathbf{L}_2$ est une matrice triangulaire inférieure inversible à diagonale unité.

Bilan étape A :

La matrice $\mathbf{U} = \mathbf{A}_2$ est une matrice triangulaire supérieure. Ainsi, le systeme (4) (qui peut être réécrit $\mathbf{U}x = b_2$) est un système triangulaire supérieur qui va être facile à résoudre à l'étape B.

Matriciellement, en combinant (2) et (5) nous pouvons résumer l'étape A comme suit :

$$\mathbf{A}x = b \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{U}x = y \quad \text{avec} \quad \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{A} \ \text{ et } \ y = b_2 = \tilde{\mathbf{L}}b \ \text{ où } \ \tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}_2\mathbf{L}_1. \tag{6}$$

La matrice $\tilde{\mathbf{L}}$ est le produit de deux matrices triangulaires inférieures à diagonales unité. Donc la matrice $\tilde{\mathbf{L}}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible à diagonale unité. Son inverse, notée $\mathbf{L}$, est donc aussi triangulaire inférieure à diagonale unité.

On a donc montré que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbf{U}$ est une matrice triangulaire supérieure. Autrement dit, la première étape de la méthode du pivot revient à faire de manière implicite la décomposition $\mathbf{LU}$ de $\mathbf{A}$ (noter que $\mathbf{L}y = b$, cf. exercice1, question 4).

En pratique, lorsqu'on code l'algorithme d'élimination de Gauss, on ne code pas sa version matricielle mais on transforme progressivement la matrice $\mathbf{A}$ et le second membre b en faisant combinaisons lineaires des équations (des lignes) (cf. (1)-(3)). Autrement dit, on n'a pas besoin de calculer pas explicitement la matrice $\mathbf{L}$.

Etape B : on résout le système triangulaire supérieur $\mathbf{U}x = y$

Ce système est résolu par substitution (cf. exercice 1, question 3). On obtient finalement

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Question 1b.

On procède comme dans la question 1 mais on va voir apparaitre une difficulté supplémentaire due à la présence d'un **pivot nul**. On peut remarquer que

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = 0$$

si bien que le mineur principal de $\mathbf{A}$ d'ordre 2 est nul.

Étape A : processus d'élimination de Gauss

Étape A1

On élimine x_1 dans les équations 2 et 3 :

$$\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_1. \tag{7}$$

On obtient le système

$$\mathbf{A}_1 x = b_1 \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

En terme matriciel, ceci revient à multiplier les système $\mathbf{A}x = b$ à gauche par par la matrice triangulaire inférieure

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'étape A1 se résume donc à

$$\mathbf{A}x = b \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}_1 x = b_1 \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{L}_1\mathbf{A}, \text{ et } b_1 = \mathbf{L}_1 b. \tag{8}$$

$\mathbf{L}_1$ est une matrice triangulaire inférieure inversible à diagonale unité.

Étape A2 : permutation des lignes 2 et 3

Comme le pivot $A_1(2,2) = 0$, on ne peut pas poursuivre directement le processus d'élimination. En particulier, on ne peut pas éliminer x_2 dans l'équation 3 en faisant une combinaison entre la deuxième et la troisième ligne. Cependant, comme $A_1(3,2) \neq 0$, nous allons échanger les lignes 2 et 3.

$$\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_3 \quad \mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_2.$$

On obtient alors

$$\mathbf{A}_2 x = b_2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

En terme matriciel, cela revient à multiplier le système $\mathbf{A}_1 x = b_1$ par la matrice de permutation $\mathbf{P}_{23}$ donnée par

$$\mathbf{P}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette étape A2 se résume donc à

$$\mathbf{A}_1 x = b_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}_2 x = b_2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{P}_{23}\mathbf{A}_1 \text{ et } b_2 = \mathbf{P}_{23} b_1. \tag{9}$$

Remarque. *Comme la matrice $\mathbf{A}_2$ est de dimension 3×3, il n y a pas besoin de continuer le processus d'élimination (puisque $(\mathbf{A}_2)_{3,2} = 0$). Bien sûr, il faudrait la réaliser dans le cas d'une matrice plus grande. Cela reviendrait alors à multiplier le système $\mathbf{A}_2 x = b_2$ par une matrice triangulaire inférieure.*

Bilan étape A

Matriciellement, en combinant (8)-(9), nous pouvons résumer l'étape A comme suit :

$$\mathbf{A}x = b \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{U}x = y \quad \text{avec} \quad \mathbf{U} = \mathbf{M}\mathbf{A} \text{ et } y = \mathbf{M}b \text{ où } \mathbf{M} = \mathbf{P}_{2,3}\mathbf{L}_1. \tag{10}$$

On remarque que $\mathbf{M} = \mathbf{P}_{2,3}\mathbf{L}_1 = \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{P}_{2,3}$, avec

$$\tilde{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{\mathbf{L}}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible à diagonale unité. Son inverse, notée $\mathbf{L}$, est donc aussi triangulaire inférieure à diagonale unité.

On a donc montré que $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{P}_{2,3}\mathbf{A}$, c'est à dire que que $\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{P}_{2,3}\mathbf{A}$, où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, $\mathbf{U}$ est une matrice triangulaire supérieure et $\mathbf{P}_{2,3}$ est une matrice de permutation. Autrement dit, la première étape de la méthode du pivot revient à faire de manière implicite la décomposition $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$.

Etape B : on résout le système triangulaire supérieur $\mathbf{U}x = y$

Ce système est résolu par substitution (cf. exercice 1, question 3). On obtient finalement

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Question 1c.

En reproduisant la technique mise en place dans les questions 1a, 1b, on voit que le système $\mathbf{A}x = b$ est équivalent au système suivant :

$$\mathbf{A}_1 x = b_1$$

avec

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Bien sûr, la matrice $\mathbf{A}_1$ n'est pas inversible (ce qui signifie d'ailleurs aussi que la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas inversible) . La deuxième et la troisième lignes sont liées. Dans le premier cas ($b_1 = (12, 7, 5)^T$), le second membre est compatible (i.e b_1 est orthogonal à Ker($\mathbf{A}_1^T$)). Il y a donc une infinité de solutions données par

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On remarquera que Ker($\mathbf{A}_1$) = Ker($\mathbf{A}$) = span$(-2, 1, 0)^T$.

Dans le second cas, ($b_1 = (2, 4, 5)^T$), le second membre n'est pas compatible (i.e b_1 n'est pas orthogonal à Ker($\mathbf{A}_1^T$)), il n'y a pas de solution.

Question 2.

Fonction Elimination(A,b) : U**,** c

[A est une matrice carrée (inversible), b et x sont des vecteurs colonne,
U est un matrice carrée triangulaire supérieure, c est un vecteur colonne.

Ce programme transforme un système $Ax = b$ en un système équivalent $Ux = c$]

[Quelques initialisations]
$\varepsilon \leftarrow 10^{-7}$ *[choix de la precision ε pour le pivot]*
$n \leftarrow$ length(b)
$U \leftarrow A$; *[On initialise la matrice U par la matrice A]*
$c \leftarrow b$; *[On initialise le vecteur c]*

[On vérifie la compatibilité des dimensions de A et b :]
Si (size(A,1) $\neq n$ ou size(A,2) $\neq n$) **Alors**
  Afficher : 'problème dans les tailles des matrices A ou b'
  Retourner U, c ;
Fin Si
[Processus d'élimination de Gauss]
Pour i **de** 1 **à** $n - 1$ **faire**

  [1- On cherche un pivot non nul]
  $k = i$;
  Tant que ($|U(k, k)| < \varepsilon$ **ET** $k \leq n$) **faire**
    $k = k + 1$
  Fait
  $indice = k$;

  ***[2- On échange la ligne** i **et la ligne** $indice$*]*
  [Échange la ligne i et la ligne indice dans la matrice (nécessité d introduire une variable temporaire)]
  $tempU = U(i, :)$; $U(i, :) = U(indice, :)$; $U(indice, :) = tempU$;

  [Échange la ligne i et la ligne indice dans le second membre]
  $tempc = c(i)$; $c(i) = c(indice)$; $c(indice) = tempc$;

  [3- On élimine l'inconnue i des equations i+1 à n]
  $pivot = U(i, i)$;
  [Test si le pivot est trop petit (matrice possiblement non inversible)]
  Si ($|pivot| < \varepsilon$) **Alors**
    disp('attention pivot très petit : la matrice est elle inversible ?')
  Fin Si

  Pour m **de** i+1 **à** n **faire**
    $coef = U(m, i)/pivot$;
    [Modification de la matrice]
    $U(m, 1 : i) = 0$; $U(m, i + 1 : n) = U(m, i + 1 : n) - coef \times U(i, i + 1 : n)$;

    [Modification du second membre]
    $c(m) = c(m) - coef \times c(i)$;
  Fin Pour
Fin Pour
Retourner c,U ;
Fin

Algorithme 1: Algorithme d'élimination de Gauss