Sup'Galilée
MACS1

Année 2017/2018

Analyse numérique-TD3
Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

1 Normes matricielles et suites de vecteurs

Exercice 1

1. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|_s$ une norme matricielle subordonnée. Montrer que
$$\rho(A) \leq \|\mathbf{A}\|_s.$$
2. On note maintenant $\|\cdot\|$ une norme matricielle **quelconque**. Soit λ une valeur propre de $\mathbf{A}$ et soit u un vecteur propre associé à $\mathbf{A}$.
   (a) Montrer que la matrice $\mathbf{B} = uu^t \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est non nulle.
   (b) Montrer que
   $$\mathbf{A}uu^t = \lambda uu^t.$$
   (c) En déduire que
   $$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|.$$
3. Quel résultat avez vous démontré ?

Exercice 2

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $\lim_{k\to+\infty} \mathbf{A}^k = 0$ alors $\lim_{k\to+\infty} \mathbf{A}^k v = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que si $\lim_{k\to+\infty} \mathbf{A}^k v = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ alors
$$\rho(\mathbf{A}) < 1.$$
3. Montrer que si $\rho(\mathbf{A}) < 1$, alors il existe au moins une norme matricielle subordonnée (notée $\|\cdot\|_s$) telle que
$$\|\mathbf{A}\|_s < 1.$$
4. Supposons qu'il existe une norme matricielle subordonnée (notée $\|\cdot\|_s$) telle que
$$\|\mathbf{A}\|_s < 1.$$
Montrer que $\lim_{k\to+\infty} \mathbf{A}^k = 0$.
5. Conclure.

Exercice 3 (Série de Neumann)

Soient $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle.

1. Montrer que si $\rho(\mathbf{A}) < 1$, les matrices $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ et $\mathbf{I}_n + \mathbf{A}$ sont inversibles.

2. Montre que la série de terme général $\mathbf{A}^k$ converge vers $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}$ si et seulement si $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

2 Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Exercice 4 (généralités)

Soient $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ une matrice inversible, et deux matrices $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{N} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$. Soient $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{C}^n$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. On considère l'algorithme

$$\mathbf{M}\,\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{N}\,\mathbf{u}_k + \mathbf{b}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

1. A quelle condition l'algorithme (1) est-il bien défini ?

On pose $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$.

2. Montrer que si la suite $(\mathbf{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle converge vers la solution $\mathbf{u}$ du système $\mathbf{A}\mathbf{u} = b$.
3. Montrer que la suite $(\mathbf{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour toute donnée initiale $\mathbf{u}_0$ si et seulement si $\rho(\mathbf{B}) < 1$.

Exercice 5 (cas particulier des matrices hermitiennes)

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ où $\mathbf{M}$ est inversible. On note $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$.

1. Montrer que la matrice $\mathbf{M}^* + \mathbf{N}$ est hermitienne.

On suppose maintenant que $\mathbf{M}^* + \mathbf{N}$ est définie positive.

2. Soit x un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ et $y = \mathbf{B}x$.
   1. Montrer que
   $$x - y = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}x$$
   et que
   $$\langle x, \mathbf{A}x\rangle - \langle y, \mathbf{A}y\rangle = \langle x, \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}x\rangle + \langle \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}x, \mathbf{A}x\rangle - \langle \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}x, \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}x\rangle$$
   2. En déduire que
   $$\langle x, \mathbf{A}x\rangle - \langle y, \mathbf{A}y\rangle = \langle x - y, (\mathbf{M}^* + \mathbf{N})(x - y)\rangle.$$
3. Montrer que si $\mathbf{A}$ est définie positive alors $\rho(\mathbf{B}) < 1$.
4. Démontrer par l'absurde que si $\rho(\mathbf{B}) < 1$ alors $\mathbf{A}$ est définie positive.

Exercice 6 (méthode de relaxation)

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$ avec

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathbf{A}$ est inversible.

2. Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que la matrice $\dfrac{1}{\omega}\mathbf{I} - \mathbf{E}$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Pour $0 < \omega < 2$ avec $\omega \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on considère la méthode itérative pour la résolution du système linéaire $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, définie par

$$\left(\frac{1}{\omega}\mathbf{I} - \mathbf{E}\right) x_{k+1} = \left(\mathbf{F} + \frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{I}\right) x_k + \mathbf{b}.$$

On note

$$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{\omega}\mathbf{I} - \mathbf{E}\right)^{-1} \left(\mathbf{F} + \frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{I}\right).$$

2. Calculer les valeurs propres de $\mathcal{L}_\omega$ ainsi que son rayon spectral. Pour quelles valeurs de ω la méthode est-elle convergente. Déterminer ω_0 tel que

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_0}) = \min_{\omega \in]0,2[, \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}} \rho(\mathcal{L}_\omega).$$