Marches aléatoires dans les groupes de Lie

Nicolas de Saxcé

11 mars 2021

Plan du cours

Plan du cours

- Partie I : groupes compacts

Plan du cours

- Partie I : groupes compacts
  - 1) Équidistribution

Plan du cours

- Partie I : groupes compacts
    - 1) Équidistribution
    - 2) Mesures invariantes

Plan du cours

- Partie I : groupes compacts
  - 1) Équidistribution
  - 2) Mesures invariantes
  - 3) La propriété du trou spectral

Plan du cours

- Partie I : groupes compacts
  - 1) Équidistribution
  - 2) Mesures invariantes
  - 3) La propriété du trou spectral
- Partie II : groupes non compacts

Plan du cours

- Partie I : groupes compacts
  - 1) Équidistribution
  - 2) Mesures invariantes
  - 3) La propriété du trou spectral
- Partie II : groupes non compacts
  - 1) La loi des grands nombres

Plan du cours

- Partie I : groupes compacts
  - 1) Équidistribution
  - 2) Mesures invariantes
  - 3) La propriété du trou spectral
- Partie II : groupes non compacts
  - 1) La loi des grands nombres
  - 2) Le théorème d'Oseledets

Plan du cours

- Partie I : groupes compacts
  - 1) Équidistribution
  - 2) Mesures invariantes
  - 3) La propriété du trou spectral
- Partie II : groupes non compacts
  - 1) La loi des grands nombres
  - 2) Le théorème d'Oseledets
  - 3) Étude des mesures stationnaires

Plan du cours

- Partie I : groupes compacts
  - 1) Équidistribution
  - 2) Mesures invariantes
  - 3) La propriété du trou spectral
- Partie II : groupes non compacts
  - 1) La loi des grands nombres
  - 2) Le théorème d'Oseledets
  - 3) Étude des mesures stationnaires
- Partie III : espaces homogènes

Chapitre 1

Chapitre 1

Équidistribution dans les groupes compacts

I. Construction de la mesure de Haar

I. Construction de la mesure de Haar

Nous construisons ici la mesure de Haar sur un groupe compact, et montrons au passage la convergence en loi des marches aléatoires vers cette mesure.

Marches aléatoires

Marches aléatoires

Soit G un groupe topologique, et μ une probabilité borélienne sur G.

Marches aléatoires

Soit G un groupe topologique, et μ une probabilité borélienne sur G.
On considère une suite de variables aléatoires $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi μ.

Marches aléatoires

Soit G un groupe topologique, et μ une probabilité borélienne sur G.
On considère une suite de variables aléatoires $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi μ.
La marche aléatoire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à μ est définie par

Marches aléatoires

Soit G un groupe topologique, et μ une probabilité borélienne sur G.
On considère une suite de variables aléatoires $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi μ.
La marche aléatoire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à μ est définie par

$$\left\{ \right.$$

Marches aléatoires

Soit G un groupe topologique, et μ une probabilité borélienne sur G.
On considère une suite de variables aléatoires $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi μ.
La marche aléatoire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à μ est définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \end{cases}$$

Marches aléatoires

Soit G un groupe topologique, et μ une probabilité borélienne sur G.
On considère une suite de variables aléatoires $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi μ.
La marche aléatoire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à μ est définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \geq 1, \end{cases}$$

Marches aléatoires

Soit G un groupe topologique, et μ une probabilité borélienne sur G.
On considère une suite de variables aléatoires $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi μ.
La marche aléatoire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à μ est définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ x_n = g_n x_{n-1} \end{cases}$$

Marches aléatoires

Soit G un groupe topologique, et μ une probabilité borélienne sur G.
On considère une suite de variables aléatoires $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi μ.
La marche aléatoire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à μ est définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ x_n = g_n x_{n-1} = g_n g_{n-1} \dots g_1. \end{cases}$$

Marches aléatoires

Soit G un groupe topologique, et μ une probabilité borélienne sur G.
On considère une suite de variables aléatoires $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi μ.
La marche aléatoire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à μ est définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ x_n = g_n x_{n-1} = g_n g_{n-1} \dots g_1. \end{cases}$$

On s'intéresse au comportement asymptotique de (x_n).

Marches aléatoires

Soit G un groupe topologique, et μ une probabilité borélienne sur G.
On considère une suite de variables aléatoires $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi μ.
La marche aléatoire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à μ est définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ x_n = g_n x_{n-1} = g_n g_{n-1} \dots g_1. \end{cases}$$

On s'intéresse au comportement asymptotique de (x_n).
Nous étudierons aujourd'hui le cas où le groupe ambiant G est compact.

Deux hypothèses sur μ

Deux hypothèses sur μ

Soit G un groupe topologique.

Deux hypothèses sur μ

Soit G un groupe topologique.
Une probabilité μ sur G est dite

Deux hypothèses sur μ

Soit G un groupe topologique.
Une probabilité μ sur G est dite

- adaptée

Deux hypothèses sur μ

Soit G un groupe topologique.
Une probabilité μ sur G est dite

- adaptée lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ engendre un sous-groupe dense dans G ;

Deux hypothèses sur μ

Soit G un groupe topologique.
Une probabilité μ sur G est dite

- adaptée lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ engendre un sous-groupe dense dans G ;
- apériodique

Deux hypothèses sur μ

Soit G un groupe topologique.
Une probabilité μ sur G est dite

- adaptée lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ engendre un sous-groupe dense dans G ;
- apériodique lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ n'est pas contenu dans une classe à gauche d'un sous-groupe strict fermé et distingué.

Deux hypothèses sur μ

Soit G un groupe topologique.
Une probabilité μ sur G est dite

- adaptée lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ engendre un sous-groupe dense dans G ;
- apériodique lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ n'est pas contenu dans une classe à gauche d'un sous-groupe strict fermé et distingué.
- symétrique si elle est invariante par l'application $g \mapsto g^{-1}$.

Deux hypothèses sur μ

Soit G un groupe topologique.
Une probabilité μ sur G est dite

- adaptée lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ engendre un sous-groupe dense dans G ;
- apériodique lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ n'est pas contenu dans une classe à gauche d'un sous-groupe strict fermé et distingué.
- symétrique si elle est invariante par l'application $g \mapsto g^{-1}$.

Exercice

Deux hypothèses sur μ

Soit G un groupe topologique.
Une probabilité μ sur G est dite

- adaptée lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ engendre un sous-groupe dense dans G ;
- apériodique lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ n'est pas contenu dans une classe à gauche d'un sous-groupe strict fermé et distingué.
- symétrique si elle est invariante par l'application $g \mapsto g^{-1}$.

Exercice

1. *Donner un exemple de mesure apériodique non adaptée.*

Deux hypothèses sur μ

Soit G un groupe topologique.
Une probabilité μ sur G est dite

- adaptée lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ engendre un sous-groupe dense dans G ;
- apériodique lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ n'est pas contenu dans une classe à gauche d'un sous-groupe strict fermé et distingué.
- symétrique si elle est invariante par l'application $g \mapsto g^{-1}$.

Exercice

1. *Donner un exemple de mesure apériodique non adaptée.*
2. *Donner un exemple de mesure adaptée mais non apériodique.*

Deux hypothèses sur μ

Soit G un groupe topologique.
Une probabilité μ sur G est dite

- adaptée lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ engendre un sous-groupe dense dans G ;
- apériodique lorsque $\operatorname{Supp}\mu$ n'est pas contenu dans une classe à gauche d'un sous-groupe strict fermé et distingué.
- symétrique si elle est invariante par l'application $g \mapsto g^{-1}$.

Exercice

1. *Donner un exemple de mesure apériodique non adaptée.*
2. *Donner un exemple de mesure adaptée mais non apériodique.*
3. *Montrer que toute mesure symétrique adaptée est apériodique.*

Exercice

1. *Donner un exemple de mesure apériodique non adaptée.*
2. *Donner un exemple de mesure adaptée mais non apériodique.*
3. *Montrer que toute mesure symétrique adaptée est apériodique.*

Exercice

1. *Donner un exemple de mesure apériodique non adaptée.*
2. *Donner un exemple de mesure adaptée mais non apériodique.*
3. *Montrer que toute mesure symétrique adaptée est apériodique.*

1.

Exercice

1. *Donner un exemple de mesure apériodique non adaptée.*
2. *Donner un exemple de mesure adaptée mais non apériodique.*
3. *Montrer que toute mesure symétrique adaptée est apériodique.*

1.
2.

Exercice

1. *Donner un exemple de mesure apériodique non adaptée.*
2. *Donner un exemple de mesure adaptée mais non apériodique.*
3. *Montrer que toute mesure symétrique adaptée est apériodique.*

1.
2.
3.

Existence et unicité de la mesure de Haar

Existence et unicité de la mesure de Haar

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Existence et unicité de la mesure de Haar

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème (Existence et unicité de la mesure de Haar)

Existence et unicité de la mesure de Haar

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème (Existence et unicité de la mesure de Haar)

Soit G un groupe compact.

Existence et unicité de la mesure de Haar

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème (Existence et unicité de la mesure de Haar)

Soit G un groupe compact.
Il existe une unique probabilité m sur G telle que

Existence et unicité de la mesure de Haar

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème (Existence et unicité de la mesure de Haar)

Soit G un groupe compact.
Il existe une unique probabilité m sur G telle que pour toute probabilité μ adaptée et apériodique sur G,

Existence et unicité de la mesure de Haar

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème (Existence et unicité de la mesure de Haar)

Soit G un groupe compact.
Il existe une unique probabilité m sur G telle que pour toute probabilité μ adaptée et apériodique sur G, la marche aléatoire (x_n) associée converge en loi vers m.

Existence et unicité de la mesure de Haar

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème (Existence et unicité de la mesure de Haar)

Soit G un groupe compact.
Il existe une unique probabilité m sur G telle que pour toute probabilité μ adaptée et apériodique sur G, la marche aléatoire (x_n) associée converge en loi vers m. Cette mesure m est invariante à gauche et à droite par G.

Existence et unicité de la mesure de Haar

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème (Existence et unicité de la mesure de Haar)

Soit G un groupe compact.
Il existe une unique probabilité m sur G telle que pour toute probabilité μ adaptée et apériodique sur G, la marche aléatoire (x_n) associée converge en loi vers m. Cette mesure m est invariante à gauche et à droite par G.

Remarque

Plus généralement, si G est un groupe localement compact, il existe, à un scalaire près, une unique mesure de Radon invariante à gauche sur G, que l'on appelle la mesure de Haar.

Existence et unicité de la mesure de Haar

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème (Existence et unicité de la mesure de Haar)

Soit G un groupe compact.
Il existe une unique probabilité m sur G telle que pour toute probabilité μ adaptée et apériodique sur G, la marche aléatoire (x_n) associée converge en loi vers m. Cette mesure m est invariante à gauche et à droite par G.

Remarque

Plus généralement, si G est un groupe localement compact, il existe, à un scalaire près, une unique mesure de Radon invariante à gauche sur G, que l'on appelle la mesure de Haar.

Exercice

Si G est un groupe compact, montrer que m est l'unique probabilité borélienne sur G invariante à gauche.

Exercice

Si G est un groupe compact, montrer que m est l'unique probabilité borélienne sur G invariante à gauche.

Un énoncé topologique

Étant données deux parties A et B d'un groupe G, nous noterons

Un énoncé topologique

Étant données deux parties A et B d'un groupe G, nous noterons

$$AB =$$

Un énoncé topologique

Étant données deux parties A et B d'un groupe G, nous noterons

$$AB = \{x = ab \;;\; a \in A,\, b \in B\}.$$

Un énoncé topologique

Étant données deux parties A et B d'un groupe G, nous noterons

$$AB = \{x = ab \ ; \ a \in A, \ b \in B\}.$$

De même, si S est une partie de G et $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons S^n l'ensemble des éléments de G qui peuvent s'écrire comme produit de n éléments de S :

Un énoncé topologique

Étant données deux parties A et B d'un groupe G, nous noterons

$$AB = \{x = ab \ ; \ a \in A, \ b \in B\}.$$

De même, si S est une partie de G et $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons S^n l'ensemble des éléments de G qui peuvent s'écrire comme produit de n éléments de S :

$$S^n = \{x = s_1 s_2 \dots s_n \ ; \ s_i \in S\}.$$

Un énoncé topologique

Étant données deux parties A et B d'un groupe G, nous noterons

$$AB = \{x = ab \; ; \; a \in A, \, b \in B\}.$$

De même, si S est une partie de G et $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons S^n l'ensemble des éléments de G qui peuvent s'écrire comme produit de n éléments de S :

$$S^n = \{x = s_1 s_2 \dots s_n \; ; \; s_i \in S\}.$$

Une partie S d'un groupe topologique est dite topologiquement génératrice si le sous-groupe engendré par S est dense dans G.

Un énoncé topologique

Étant données deux parties A et B d'un groupe G, nous noterons

$$AB = \{x = ab\ ;\ a \in A,\ b \in B\}.$$

De même, si S est une partie de G et $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons S^n l'ensemble des éléments de G qui peuvent s'écrire comme produit de n éléments de S :

$$S^n = \{x = s_1 s_2 \dots s_n\ ;\ s_i \in S\}.$$

Une partie S d'un groupe topologique est dite topologiquement génératrice si le sous-groupe engendré par S est dense dans G.

Proposition

Soit G un groupe topologique compact, et S une partie topologiquement génératrice de G qui n'est pas incluse dans une classe à gauche d'un sous-groupe strict fermé distingué. Pour tout ouvert non vide $U \subset G$, il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad S^n U = G.$$

Démonstration.

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$.

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

et montrons que $H = G$.

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

et montrons que $H = G$.

Si $x, y \in H$, on veut voir que $xy \in H$, i.e. que pour tout voisinage U de l'identité dans G, xyU rencontre $s^{-n}S^n$ pour un certain n.

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

et montrons que $H = G$.
Si $x, y \in H$, on veut voir que $xy \in H$, i.e. que pour tout voisinage U de l'identité dans G, xyU rencontre $s^{-n}S^n$ pour un certain n. Pour cela, on choisit un voisinage distingué symétrique V de l'identité tel que $V^6 \subset U$.

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

et montrons que $H = G$.
Si $x, y \in H$, on veut voir que $xy \in H$, i.e. que pour tout voisinage U de l'identité dans G, xyU rencontre $s^{-n}S^n$ pour un certain n. Pour cela, on choisit un voisinage distingué symétrique V de l'identité tel que $V^6 \subset U$. Comme $x, y \in H$, pour tout n assez grand, $x, y \in s^{-n}S^nV$.

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

et montrons que $H = G$.
Si $x, y \in H$, on veut voir que $xy \in H$, i.e. que pour tout voisinage U de l'identité dans G, xyU rencontre $s^{-n}S^n$ pour un certain n. Pour cela, on choisit un voisinage distingué symétrique V de l'identité tel que $V^6 \subset U$. Comme $x, y \in H$, pour tout n assez grand, $x, y \in s^{-n}S^nV$. On peut alors choisir n de sorte que $s^{-n} \in V$, ce qui donne $x, y \in VS^nV = S^nV^2$, et par suite,

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

et montrons que $H = G$.

Si $x, y \in H$, on veut voir que $xy \in H$, i.e. que pour tout voisinage U de l'identité dans G, xyU rencontre $s^{-n}S^n$ pour un certain n. Pour cela, on choisit un voisinage distingué symétrique V de l'identité tel que $V^6 \subset U$. Comme $x, y \in H$, pour tout n assez grand, $x, y \in s^{-n}S^nV$. On peut alors choisir n de sorte que $s^{-n} \in V$, ce qui donne $x, y \in VS^nV = S^nV^2$, et par suite,

$$xy \in S^nV^2S^nV^2$$

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

et montrons que $H = G$.

Si $x, y \in H$, on veut voir que $xy \in H$, i.e. que pour tout voisinage U de l'identité dans G, xyU rencontre $s^{-n}S^n$ pour un certain n. Pour cela, on choisit un voisinage distingué symétrique V de l'identité tel que $V^6 \subset U$. Comme $x, y \in H$, pour tout n assez grand, $x, y \in s^{-n}S^nV$. On peut alors choisir n de sorte que $s^{-n} \in V$, ce qui donne $x, y \in VS^nV = S^nV^2$, et par suite,

$$xy \in S^nV^2S^nV^2 = S^{2n}V^4$$

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

et montrons que $H = G$.

Si $x, y \in H$, on veut voir que $xy \in H$, i.e. que pour tout voisinage U de l'identité dans G, xyU rencontre $s^{-n}S^n$ pour un certain n. Pour cela, on choisit un voisinage distingué symétrique V de l'identité tel que $V^6 \subset U$. Comme $x, y \in H$, pour tout n assez grand, $x, y \in s^{-n}S^nV$. On peut alors choisir n de sorte que $s^{-n} \in V$, ce qui donne $x, y \in VS^nV = S^nV^2$, et par suite,

$$xy \in S^nV^2S^nV^2 = S^{2n}V^4 \subset s^{-2n}S^{2n}V^6$$

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

et montrons que $H = G$.
Si $x, y \in H$, on veut voir que $xy \in H$, i.e. que pour tout voisinage U de l'identité dans G, xyU rencontre $s^{-n}S^n$ pour un certain n. Pour cela, on choisit un voisinage distingué symétrique V de l'identité tel que $V^6 \subset U$. Comme $x, y \in H$, pour tout n assez grand, $x, y \in s^{-n}S^nV$. On peut alors choisir n de sorte que $s^{-n} \in V$, ce qui donne $x, y \in VS^nV = S^nV^2$, et par suite,

$$xy \in S^nV^2S^nV^2 = S^{2n}V^4 \subset s^{-2n}S^{2n}V^6 \subset s^{-2n}S^{2n}U.$$

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

et montrons que $H = G$.

Si $x, y \in H$, on veut voir que $xy \in H$, i.e. que pour tout voisinage U de l'identité dans G, xyU rencontre $s^{-n}S^n$ pour un certain n. Pour cela, on choisit un voisinage distingué symétrique V de l'identité tel que $V^6 \subset U$. Comme $x, y \in H$, pour tout n assez grand, $x, y \in s^{-n}S^nV$. On peut alors choisir n de sorte que $s^{-n} \in V$, ce qui donne $x, y \in VS^nV = S^nV^2$, et par suite,

$$xy \in S^nV^2S^nV^2 = S^{2n}V^4 \subset s^{-2n}S^{2n}V^6 \subset s^{-2n}S^{2n}U.$$

Ainsi, H est un sous-semi-groupe compact de G, et donc un sous-groupe.

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

et montrons que $H = G$.
Si $x, y \in H$, on veut voir que $xy \in H$, i.e. que pour tout voisinage U de l'identité dans G, xyU rencontre $s^{-n}S^n$ pour un certain n. Pour cela, on choisit un voisinage distingué symétrique V de l'identité tel que $V^6 \subset U$. Comme $x, y \in H$, pour tout n assez grand, $x, y \in s^{-n}S^nV$. On peut alors choisir n de sorte que $s^{-n} \in V$, ce qui donne $x, y \in VS^nV = S^nV^2$, et par suite,

$$xy \in S^nV^2S^nV^2 = S^{2n}V^4 \subset s^{-2n}S^{2n}V^6 \subset s^{-2n}S^{2n}U.$$

Ainsi, H est un sous-semi-groupe compact de G, et donc un sous-groupe. De plus, H est normalisé par s, et donc par sH.

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

et montrons que $H = G$.
Si $x, y \in H$, on veut voir que $xy \in H$, i.e. que pour tout voisinage U de l'identité dans G, xyU rencontre $s^{-n}S^n$ pour un certain n. Pour cela, on choisit un voisinage distingué symétrique V de l'identité tel que $V^6 \subset U$. Comme $x, y \in H$, pour tout n assez grand, $x, y \in s^{-n}S^nV$. On peut alors choisir n de sorte que $s^{-n} \in V$, ce qui donne $x, y \in VS^nV = S^nV^2$, et par suite,

$$xy \in S^nV^2S^nV^2 = S^{2n}V^4 \subset s^{-2n}S^{2n}V^6 \subset s^{-2n}S^{2n}U.$$

Ainsi, H est un sous-semi-groupe compact de G, et donc un sous-groupe. De plus, H est normalisé par s, et donc par sH. Mais $S \subset sH$, donc le groupe H est normalisé par S, et comme S engendre un sous-groupe dense de G, H est distingué dans G.

Démonstration. Fixons un élément $s \in S$. La suite de parties $(s^{-n}S^n)_{n\geq 1}$ est croissante. Notons

$$H = \overline{\bigcup_{n\geq 1} s^{-n}S^n}$$

et montrons que $H = G$.
Si $x, y \in H$, on veut voir que $xy \in H$, i.e. que pour tout voisinage U de l'identité dans G, xyU rencontre $s^{-n}S^n$ pour un certain n. Pour cela, on choisit un voisinage distingué symétrique V de l'identité tel que $V^6 \subset U$. Comme $x, y \in H$, pour tout n assez grand, $x, y \in s^{-n}S^nV$. On peut alors choisir n de sorte que $s^{-n} \in V$, ce qui donne $x, y \in VS^nV = S^nV^2$, et par suite,

$$xy \in S^nV^2S^nV^2 = S^{2n}V^4 \subset s^{-2n}S^{2n}V^6 \subset s^{-2n}S^{2n}U.$$

Ainsi, H est un sous-semi-groupe compact de G, et donc un sous-groupe. De plus, H est normalisé par s, et donc par sH. Mais $S \subset sH$, donc le groupe H est normalisé par S, et comme S engendre un sous-groupe dense de G, H est distingué dans G. Comme $S \subset sH$, notre hypothèse sur S implique $H = G$.

Par conséquent, si U est un ouvert non vide,

Par conséquent, si U est un ouvert non vide,

$$G = \bigcup_{n \geq 1} s^{-n} S^n U,$$

Par conséquent, si U est un ouvert non vide,

$$G = \bigcup_{n \geq 1} s^{-n} S^n U,$$

et par compacité de G, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $G = s^{-n} S^n U$, ce qui implique $G = S^n U$,

Par conséquent, si U est un ouvert non vide,

$$G = \bigcup_{n \geq 1} s^{-n} S^n U,$$

et par compacité de G, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $G = s^{-n} S^n U$, ce qui implique $G = S^n U$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice

Soit G un groupe compact, et U un voisinage de l'identité dans G. Vérifier les points suivants, utilisés dans la démonstration ci-dessus.

Exercice

Soit G un groupe compact, et U un voisinage de l'identité dans G. Vérifier les points suivants, utilisés dans la démonstration ci-dessus.

1. *Il existe un voisinage de l'identité distingué V inclus dans U.*

Exercice

Soit G un groupe compact, et U un voisinage de l'identité dans G. Vérifier les points suivants, utilisés dans la démonstration ci-dessus.

1. *Il existe un voisinage de l'identité distingué V inclus dans U.*
2. *Si $s \in G$, il existe n arbitrairement grand tel que $s^n \in U$.*

Exercice

Soit G un groupe compact, et U un voisinage de l'identité dans G. Vérifier les points suivants, utilisés dans la démonstration ci-dessus.

1. *Il existe un voisinage de l'identité distingué V inclus dans U.*
2. *Si $s \in G$, il existe n arbitrairement grand tel que $s^n \in U$.*
3. *Un semi-groupe compact est un groupe.*

Exercice

Soit G un groupe compact, et U un voisinage de l'identité dans G. Vérifier les points suivants, utilisés dans la démonstration ci-dessus.

1. *Il existe un voisinage de l'identité distingué V inclus dans U.*
2. *Si $s \in G$, il existe n arbitrairement grand tel que $s^n \in U$.*
3. *Un semi-groupe compact est un groupe.*

1.

Exercice

Soit G un groupe compact, et U un voisinage de l'identité dans G. Vérifier les points suivants, utilisés dans la démonstration ci-dessus.

1. *Il existe un voisinage de l'identité distingué V inclus dans U.*
2. *Si $s \in G$, il existe n arbitrairement grand tel que $s^n \in U$.*
3. *Un semi-groupe compact est un groupe.*

1.
2.

Exercice

Soit G un groupe compact, et U un voisinage de l'identité dans G. Vérifier les points suivants, utilisés dans la démonstration ci-dessus.

1. *Il existe un voisinage de l'identité distingué V inclus dans U.*
2. *Si $s \in G$, il existe n arbitrairement grand tel que $s^n \in U$.*
3. *Un semi-groupe compact est un groupe.*

1.
2.
3.

Produit de convolution 1

Produit de convolution 1

Définition

Si μ et ν sont deux mesures boréliennes sur G, leur produit de convolution $\mu * \nu$ est l'image de la mesure produit $\mu \otimes \nu$ sur $G \times G$ par l'application $(x, y) \mapsto xy$.

Produit de convolution 1

Définition

Si μ et ν sont deux mesures boréliennes sur G, leur produit de convolution $\mu * \nu$ est l'image de la mesure produit $\mu \otimes \nu$ sur $G \times G$ par l'application $(x, y) \mapsto xy$. En d'autres termes, pour toute fonction $\phi \in C(G)$,

Produit de convolution 1

Définition

Si μ et ν sont deux mesures boréliennes sur G, leur produit de convolution $\mu * \nu$ est l'image de la mesure produit $\mu \otimes \nu$ sur $G \times G$ par l'application $(x, y) \mapsto xy$. En d'autres termes, pour toute fonction $\phi \in C(G)$,

$$\int_G \phi(z)(\mu * \nu)(\mathrm{d}z) = \iint_{G \times G} \phi(xy)\mu(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}y).$$

Produit de convolution 1

Définition

Si μ et ν sont deux mesures boréliennes sur G, leur produit de convolution $\mu * \nu$ est l'image de la mesure produit $\mu \otimes \nu$ sur $G \times G$ par l'application $(x, y) \mapsto xy$. En d'autres termes, pour toute fonction $\phi \in C(G)$,

$$\int_G \phi(z)(\mu * \nu)(\mathrm{d}z) = \iint_{G \times G} \phi(xy)\mu(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}y).$$

Exemple

La loi au temps n de la marche aléatoire (x_n) associée à μ est égale à la puissance de convolution $\mu^{*n} = \overbrace{\mu * \cdots * \mu}^{n \text{ fois}}$.

Produit de convolution 1

Définition

Si μ et ν sont deux mesures boréliennes sur G, leur produit de convolution $\mu * \nu$ est l'image de la mesure produit $\mu \otimes \nu$ sur $G \times G$ par l'application $(x, y) \mapsto xy$. En d'autres termes, pour toute fonction $\phi \in C(G)$,

$$\int_G \phi(z)(\mu * \nu)(\mathrm{d}z) = \iint_{G \times G} \phi(xy)\mu(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}y).$$

Exemple

La loi au temps n de la marche aléatoire (x_n) associée à μ est égale à la puissance de convolution $\mu^{*n} = \overbrace{\mu * \cdots * \mu}^{n \text{ fois}}$. Le théorème que nous voulons démontrer est donc équivalent à la convergence $\mu^{*n} \rightharpoonup m$.

Produit de convolution 2

Produit de convolution 2

Si μ est une mesure borélienne sur G et $f \in C(G)$, nous noterons $\mu * f$ et $f * \mu$ les convolutions de f par μ à gauche et à droite, respectivement, définies par

Produit de convolution 2

Si μ est une mesure borélienne sur G et $f \in C(G)$, nous noterons $\mu * f$ et $f * \mu$ les convolutions de f par μ à gauche et à droite, respectivement, définies par

$$\mu * f(x) = \int_G f(g^{-1}x)\mu(\mathrm{d}g)$$

Produit de convolution 2

Si μ est une mesure borélienne sur G et $f \in C(G)$, nous noterons $\mu * f$ et $f * \mu$ les convolutions de f par μ à gauche et à droite, respectivement, définies par

$$\mu * f(x) = \int_G f(g^{-1}x)\mu(\mathrm{d}g) \quad \text{et}$$

Produit de convolution 2

Si μ est une mesure borélienne sur G et $f \in C(G)$, nous noterons $\mu * f$ et $f * \mu$ les convolutions de f par μ à gauche et à droite, respectivement, définies par

$$\mu * f(x) = \int_G f(g^{-1}x)\mu(\mathrm{d}g) \quad \text{et} \quad f * \mu(x) = \int_G f(xg)\mu(\mathrm{d}g).$$

Construction de la mesure de Haar

Construction de la mesure de Haar

Soit μ une probabilité adaptée et apériodique μ sur G et

Construction de la mesure de Haar

Soit μ une probabilité adaptée et apériodique μ sur G et

$$T_\mu : \quad C(G) \quad \to \quad C(G)$$

Construction de la mesure de Haar

Soit μ une probabilité adaptée et apériodique μ sur G et

$$\begin{array}{rccc} T_\mu : & C(G) & \to & C(G) \\ & f & \mapsto & \mu * f \end{array}$$

Construction de la mesure de Haar

Soit μ une probabilité adaptée et apériodique μ sur G et

$$\begin{array}{rccc} T_\mu : & C(G) & \to & C(G) \\ & f & \mapsto & \mu * f \end{array}$$

l'opérateur de convolution à gauche associé.

Construction de la mesure de Haar

Soit μ une probabilité adaptée et apériodique μ sur G et

$$\begin{array}{rccc} T_\mu : & C(G) & \to & C(G) \\ & f & \mapsto & \mu * f \end{array}$$

l'opérateur de convolution à gauche associé.
Fixons aussi un élément f quelconque dans $C(G)$.

Observation 1 :

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$.

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$. Comme la suite $(\sup T_\mu^n f)$ est décroissante, elle converge, et

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$. Comme la suite $(\sup T_\mu^n f)$ est décroissante, elle converge, et

$$\sup \varphi = \inf_{n \geq 0} \sup T_\mu^n f.$$

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$. Comme la suite $(\sup T_\mu^n f)$ est décroissante, elle converge, et

$$\sup \varphi = \inf_{n \geq 0} \sup T_\mu^n f.$$

Par conséquent, pour tout $r \geq 1$,

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$. Comme la suite $(\sup T_\mu^n f)$ est décroissante, elle converge, et

$$\sup \varphi = \inf_{n \geq 0} \sup T_\mu^n f.$$

Par conséquent, pour tout $r \geq 1$,

$$\sup T_\mu^r \varphi$$

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$. Comme la suite $(\sup T_\mu^n f)$ est décroissante, elle converge, et

$$\sup \varphi = \inf_{n \geq 0} \sup T_\mu^n f.$$

Par conséquent, pour tout $r \geq 1$,

$$\sup T_\mu^r \varphi = \lim_{k \to \infty} \sup T_\mu^{n_k + r} f$$

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$. Comme la suite $(\sup T_\mu^n f)$ est décroissante, elle converge, et

$$\sup \varphi = \inf_{n \geq 0} \sup T_\mu^n f.$$

Par conséquent, pour tout $r \geq 1$,

$$\sup T_\mu^r \varphi = \lim_{k \to \infty} \sup T_\mu^{n_k + r} f \geq \sup \varphi$$

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$. Comme la suite $(\sup T_\mu^n f)$ est décroissante, elle converge, et

$$\sup \varphi = \inf_{n \geq 0} \sup T_\mu^n f.$$

Par conséquent, pour tout $r \geq 1$,

$$\sup T_\mu^r \varphi = \lim_{k \to \infty} \sup T_\mu^{n_k + r} f \geq \sup \varphi$$

et donc $\sup T_\mu^r \varphi = \sup \varphi$.

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$. Comme la suite $(\sup T_\mu^n f)$ est décroissante, elle converge, et

$$\sup \varphi = \inf_{n \geq 0} \sup T_\mu^n f.$$

Par conséquent, pour tout $r \geq 1$,

$$\sup T_\mu^r \varphi = \lim_{k \to \infty} \sup T_\mu^{n_k + r} f \geq \sup \varphi$$

et donc $\sup T_\mu^r \varphi = \sup \varphi$.
Soit maintenant x_0 tel que

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$. Comme la suite $(\sup T_\mu^n f)$ est décroissante, elle converge, et

$$\sup \varphi = \inf_{n \geq 0} \sup T_\mu^n f.$$

Par conséquent, pour tout $r \geq 1$,

$$\sup T_\mu^r \varphi = \lim_{k \to \infty} \sup T_\mu^{n_k + r} f \geq \sup \varphi$$

et donc $\sup T_\mu^r \varphi = \sup \varphi$.
Soit maintenant x_0 tel que

$$\sup T_\mu^r \varphi = T_\mu^r \varphi(x_0)$$

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$. Comme la suite $(\sup T_\mu^n f)$ est décroissante, elle converge, et

$$\sup \varphi = \inf_{n \geq 0} \sup T_\mu^n f.$$

Par conséquent, pour tout $r \geq 1$,

$$\sup T_\mu^r \varphi = \lim_{k \to \infty} \sup T_\mu^{n_k + r} f \geq \sup \varphi$$

et donc $\sup T_\mu^r \varphi = \sup \varphi$.
Soit maintenant x_0 tel que

$$\sup T_\mu^r \varphi = T_\mu^r \varphi(x_0) = \int_G \varphi(g^{-1} x_0) \mu^{*r}(\mathrm{d}g).$$

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$. Comme la suite $(\sup T_\mu^n f)$ est décroissante, elle converge, et

$$\sup \varphi = \inf_{n \geq 0} \sup T_\mu^n f.$$

Par conséquent, pour tout $r \geq 1$,

$$\sup T_\mu^r \varphi = \lim_{k \to \infty} \sup T_\mu^{n_k + r} f \geq \sup \varphi$$

et donc $\sup T_\mu^r \varphi = \sup \varphi$.
Soit maintenant x_0 tel que

$$\sup T_\mu^r \varphi = T_\mu^r \varphi(x_0) = \int_G \varphi(g^{-1} x_0) \mu^{*r}(\mathrm{d}g).$$

Comme $\sup T_\mu^r \varphi = \sup \varphi$, cette égalité implique que

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$. Comme la suite $(\sup T_\mu^n f)$ est décroissante, elle converge, et

$$\sup \varphi = \inf_{n \geq 0} \sup T_\mu^n f.$$

Par conséquent, pour tout $r \geq 1$,

$$\sup T_\mu^r \varphi = \lim_{k \to \infty} \sup T_\mu^{n_k + r} f \geq \sup \varphi$$

et donc $\sup T_\mu^r \varphi = \sup \varphi$.
Soit maintenant x_0 tel que

$$\sup T_\mu^r \varphi = T_\mu^r \varphi(x_0) = \int_G \varphi(g^{-1} x_0) \mu^{*r}(\mathrm{d}g).$$

Comme $\sup T_\mu^r \varphi = \sup \varphi$, cette égalité implique que pour presque tout g au sens de la mesure μ^{*r},

Observation 1 : Toute valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ est constante.

Supposons qu'une sous-suite $(T_\mu^{n_k} f)$ converge uniformément vers $\varphi \in C(G)$. Comme la suite $(\sup T_\mu^n f)$ est décroissante, elle converge, et

$$\sup \varphi = \inf_{n \geq 0} \sup T_\mu^n f.$$

Par conséquent, pour tout $r \geq 1$,

$$\sup T_\mu^r \varphi = \lim_{k \to \infty} \sup T_\mu^{n_k + r} f \geq \sup \varphi$$

et donc $\sup T_\mu^r \varphi = \sup \varphi$.
Soit maintenant x_0 tel que

$$\sup T_\mu^r \varphi = T_\mu^r \varphi(x_0) = \int_G \varphi(g^{-1} x_0) \mu^{*r}(\mathrm{d}g).$$

Comme $\sup T_\mu^r \varphi = \sup \varphi$, cette égalité implique que pour presque tout g au sens de la mesure μ^{*r},

$$\varphi(g^{-1} x_0) = \sup \varphi.$$

Par continuité de φ, on a encore, pour tout g dans le support de μ^{*r},

Par continuité de φ, on a encore, pour tout g dans le support de μ^{*r},

$$\varphi(g^{-1}x_0) = \sup \varphi.$$

Par continuité de φ, on a encore, pour tout g dans le support de μ^{*r},

$$\varphi(g^{-1}x_0) = \sup \varphi.$$

Mais d'après l'énoncé topologique démontré précédemment,

Par continuité de φ, on a encore, pour tout g dans le support de μ^{*r},

$$\varphi(g^{-1}x_0) = \sup \varphi.$$

Mais d'après l'énoncé topologique démontré précédemment, le support de μ^{*r} converge vers G lorsque r tend vers l'infini,

Par continuité de φ, on a encore, pour tout g dans le support de μ^{*r},

$$\varphi(g^{-1}x_0) = \sup \varphi.$$

Mais d'après l'énoncé topologique démontré précédemment, le support de μ^{*r} converge vers G lorsque r tend vers l'infini, et par continuité, φ est donc constante.

Observation 2 : La suite $(T_\mu^n f)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

Observation 2 : La suite $(T_\mu^n f)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

L'astuce consiste à étudier aussi un opérateur de convolution à droite.

Observation 2 : La suite $(T_\mu^n f)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

L'astuce consiste à étudier aussi un opérateur de convolution à droite.
Soit ν une autre probabilité borélienne adaptée apériodique sur G, et

Observation 2 : La suite $(T_\mu^n f)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

L'astuce consiste à étudier aussi un opérateur de convolution à droite. Soit ν une autre probabilité borélienne adaptée apériodique sur G, et

$$\check{T}_\nu : f \mapsto f * \nu$$

Observation 2 : La suite $(T_\mu^n f)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

L'astuce consiste à étudier aussi un opérateur de convolution à droite. Soit ν une autre probabilité borélienne adaptée apériodique sur G, et

$$\check{T}_\nu : f \mapsto f * \nu$$

l'opérateur de convolution *à droite* par ν.

Observation 2 : La suite $(T_\mu^n f)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

L'astuce consiste à étudier aussi un opérateur de convolution à droite. Soit ν une autre probabilité borélienne adaptée apériodique sur G, et

$$\check{T}_\nu : f \mapsto f * \nu$$

l'opérateur de convolution *à droite* par ν.
Si c et c' sont des valeurs d'adhérence (constantes) des suites $(T_\mu^n f)$ et $(\check{T}_\nu^n f)$, respectivement, alors $c = c'$.

Observation 2 : La suite $(T_\mu^n f)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

L'astuce consiste à étudier aussi un opérateur de convolution à droite.
Soit ν une autre probabilité borélienne adaptée apériodique sur G, et

$$\check{T}_\nu : f \mapsto f * \nu$$

l'opérateur de convolution *à droite* par ν.
Si c et c' sont des valeurs d'adhérence (constantes) des suites $(T_\mu^n f)$ et $(\check{T}_\nu^n f)$, respectivement, alors $c = c'$.
En effet, comme les opérateurs T_μ et $\check{T}_\nu$ sont de norme 1, commutent, et préservent les constantes, donc

Observation 2 : La suite $(T_\mu^n f)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

L'astuce consiste à étudier aussi un opérateur de convolution à droite. Soit ν une autre probabilité borélienne adaptée apériodique sur G, et

$$\check{T}_\nu : f \mapsto f * \nu$$

l'opérateur de convolution *à droite* par ν.
Si c et c' sont des valeurs d'adhérence (constantes) des suites $(T_\mu^n f)$ et $(\check{T}_\nu^n f)$, respectivement, alors $c = c'$.
En effet, comme les opérateurs T_μ et $\check{T}_\nu$ sont de norme 1, commutent, et préservent les constantes, donc

$$c \leftarrow \check{T}_\nu^{n_k} T_\mu^{m_k} f$$

Observation 2 : La suite $(T_\mu^n f)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

L'astuce consiste à étudier aussi un opérateur de convolution à droite.
Soit ν une autre probabilité borélienne adaptée apériodique sur G, et

$$\check{T}_\nu : f \mapsto f * \nu$$

l'opérateur de convolution *à droite* par ν.
Si c et c' sont des valeurs d'adhérence (constantes) des suites $(T_\mu^n f)$ et $(\check{T}_\nu^n f)$, respectivement, alors $c = c'$.
En effet, comme les opérateurs T_μ et $\check{T}_\nu$ sont de norme 1, commutent, et préservent les constantes, donc

$$c \leftarrow \check{T}_\nu^{n_k} T_\mu^{m_k} f = T_\mu^{m_k} \check{T}_\nu^{n_k} f$$

Observation 2 : La suite $(T_\mu^n f)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

L'astuce consiste à étudier aussi un opérateur de convolution à droite.
Soit ν une autre probabilité borélienne adaptée apériodique sur G, et

$$\check{T}_\nu : f \mapsto f * \nu$$

l'opérateur de convolution *à droite* par ν.
Si c et c' sont des valeurs d'adhérence (constantes) des suites $(T_\mu^n f)$ et $(\check{T}_\nu^n f)$, respectivement, alors $c = c'$.
En effet, comme les opérateurs T_μ et $\check{T}_\nu$ sont de norme 1, commutent, et préservent les constantes, donc

$$c \leftarrow \check{T}_\nu^{n_k} T_\mu^{m_k} f = T_\mu^{m_k} \check{T}_\nu^{n_k} f \to c'.$$

Observation 2 : La suite $(T_\mu^n f)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

L'astuce consiste à étudier aussi un opérateur de convolution à droite.
Soit ν une autre probabilité borélienne adaptée apériodique sur G, et

$$\check{T}_\nu : f \mapsto f * \nu$$

l'opérateur de convolution *à droite* par ν.
Si c et c' sont des valeurs d'adhérence (constantes) des suites $(T_\mu^n f)$ et $(\check{T}_\nu^n f)$, respectivement, alors $c = c'$.
En effet, comme les opérateurs T_μ et $\check{T}_\nu$ sont de norme 1, commutent, et préservent les constantes, donc

$$c \leftarrow \check{T}_\nu^{n_k} T_\mu^{m_k} f = T_\mu^{m_k} \check{T}_\nu^{n_k} f \to c'.$$

Cet argument montre en outre que l'unique valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ ne dépend pas de la probabilité adaptée et apériodique μ.

Observation 2 : La suite $(T_\mu^n f)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

L'astuce consiste à étudier aussi un opérateur de convolution à droite.
Soit ν une autre probabilité borélienne adaptée apériodique sur G, et

$$\check{T}_\nu : f \mapsto f * \nu$$

l'opérateur de convolution *à droite* par ν.
Si c et c' sont des valeurs d'adhérence (constantes) des suites $(T_\mu^n f)$ et $(\check{T}_\nu^n f)$, respectivement, alors $c = c'$.
En effet, comme les opérateurs T_μ et $\check{T}_\nu$ sont de norme 1, commutent, et préservent les constantes, donc

$$c \leftarrow \check{T}_\nu^{n_k} T_\mu^{m_k} f = T_\mu^{m_k} \check{T}_\nu^{n_k} f \rightarrow c'.$$

Cet argument montre en outre que l'unique valeur d'adhérence de $(T_\mu^n f)$ ne dépend pas de la probabilité adaptée et apériodique μ.
On la note $m(f)$.

Fin de la démonstration

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

La forme linéaire $f \mapsto m(f)$ sur $C(G)$ est positive.

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

La forme linéaire $f \mapsto m(f)$ sur $C(G)$ est positive.
D'après le théorème de Riesz, elle correspond à une unique mesure finie.

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

La forme linéaire $f \mapsto m(f)$ sur $C(G)$ est positive.
D'après le théorème de Riesz, elle correspond à une unique mesure finie.
Bien sûr, $m(G) = \lim T_\mu^n 1 = 1$ donc m est une mesure de probabilité.

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

La forme linéaire $f \mapsto m(f)$ sur $C(G)$ est positive.
D'après le théorème de Riesz, elle correspond à une unique mesure finie.
Bien sûr, $m(G) = \lim T_\mu^n 1 = 1$ donc m est une mesure de probabilité.
Enfin, pour tout $a \in G$, notant $(af)(x) = f(xa)$,

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

La forme linéaire $f \mapsto m(f)$ sur $C(G)$ est positive.
D'après le théorème de Riesz, elle correspond à une unique mesure finie.
Bien sûr, $m(G) = \lim T_\mu^n 1 = 1$ donc m est une mesure de probabilité.
Enfin, pour tout $a \in G$, notant $(af)(x) = f(xa)$,

$$m(af)$$

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

La forme linéaire $f \mapsto m(f)$ sur $C(G)$ est positive.
D'après le théorème de Riesz, elle correspond à une unique mesure finie.
Bien sûr, $m(G) = \lim T_\mu^n 1 = 1$ donc m est une mesure de probabilité.
Enfin, pour tout $a \in G$, notant $(af)(x) = f(xa)$,

$$m(af) = m(\check{T}_{\delta_a} f)$$

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

La forme linéaire $f \mapsto m(f)$ sur $C(G)$ est positive.
D'après le théorème de Riesz, elle correspond à une unique mesure finie.
Bien sûr, $m(G) = \lim T_\mu^n 1 = 1$ donc m est une mesure de probabilité.
Enfin, pour tout $a \in G$, notant $(af)(x) = f(xa)$,

$$m(af) = m(\check{T}_{\delta_a} f) = \lim T_\mu^n f\, \check{T}_{\delta_a} f$$

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

La forme linéaire $f \mapsto m(f)$ sur $C(G)$ est positive.
D'après le théorème de Riesz, elle correspond à une unique mesure finie.
Bien sûr, $m(G) = \lim T_\mu^n 1 = 1$ donc m est une mesure de probabilité.
Enfin, pour tout $a \in G$, notant $(af)(x) = f(xa)$,

$$m(af) = m(\check{T}_{\delta_a} f) = \lim T_\mu^n f\, \check{T}_{\delta_a} f = \lim \check{T}_{\delta_a} T_\mu^n f$$

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

La forme linéaire $f \mapsto m(f)$ sur $C(G)$ est positive.
D'après le théorème de Riesz, elle correspond à une unique mesure finie.
Bien sûr, $m(G) = \lim T_\mu^n 1 = 1$ donc m est une mesure de probabilité.
Enfin, pour tout $a \in G$, notant $(af)(x) = f(xa)$,

$$m(af) = m(\check{T}_{\delta_a} f) = \lim T_\mu^n f\, \check{T}_{\delta_a} f = \lim \check{T}_{\delta_a} T_\mu^n f = \check{T}_{\delta_a} m(f)$$

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

La forme linéaire $f \mapsto m(f)$ sur $C(G)$ est positive.
D'après le théorème de Riesz, elle correspond à une unique mesure finie.
Bien sûr, $m(G) = \lim T_\mu^n 1 = 1$ donc m est une mesure de probabilité.
Enfin, pour tout $a \in G$, notant $(af)(x) = f(xa)$,

$$m(af) = m(\check{T}_{\delta_a} f) = \lim T_\mu^n f\, \check{T}_{\delta_a} f = \lim \check{T}_{\delta_a} T_\mu^n f = \check{T}_{\delta_a} m(f) = m(f).$$

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

La forme linéaire $f \mapsto m(f)$ sur $C(G)$ est positive.
D'après le théorème de Riesz, elle correspond à une unique mesure finie.
Bien sûr, $m(G) = \lim T_\mu^n 1 = 1$ donc m est une mesure de probabilité.
Enfin, pour tout $a \in G$, notant $(af)(x) = f(xa)$,

$$m(af) = m(\check{T}_{\delta_a} f) = \lim T_\mu^n f\, \check{T}_{\delta_a} f = \lim \check{T}_{\delta_a} T_\mu^n f = \check{T}_{\delta_a} m(f) = m(f).$$

De même, en utilisant les opérateurs $\check{T}_\nu^n$,

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

La forme linéaire $f \mapsto m(f)$ sur $C(G)$ est positive.
D'après le théorème de Riesz, elle correspond à une unique mesure finie.
Bien sûr, $m(G) = \lim T_\mu^n 1 = 1$ donc m est une mesure de probabilité.
Enfin, pour tout $a \in G$, notant $(af)(x) = f(xa)$,

$$m(af) = m(\check{T}_{\delta_a} f) = \lim T_\mu^n f \, \check{T}_{\delta_a} f = \lim \check{T}_{\delta_a} T_\mu^n f = \check{T}_{\delta_a} m(f) = m(f).$$

De même, en utilisant les opérateurs $\check{T}_\nu^n$, on montre que pour tout b dans G, $m(fb) = m(f)$, si $(fb)(x) = f(bx)$.

Fin de la démonstration

La suite $(T_\mu^n f)$ est équicontinue et admet $m(f)$ comme unique valeur d'adhérence dans $C(G)$.
D'après le théorème d'Ascoli, elle converge uniformément vers cette valeur d'adhérence :

$$\lim T_\mu^n f = m(f).$$

La forme linéaire $f \mapsto m(f)$ sur $C(G)$ est positive.
D'après le théorème de Riesz, elle correspond à une unique mesure finie.
Bien sûr, $m(G) = \lim T_\mu^n 1 = 1$ donc m est une mesure de probabilité.
Enfin, pour tout $a \in G$, notant $(af)(x) = f(xa)$,

$$m(af) = m(\check{T}_{\delta_a} f) = \lim T_\mu^n f\, \check{T}_{\delta_a} f = \lim \check{T}_{\delta_a} T_\mu^n f = \check{T}_{\delta_a} m(f) = m(f).$$

De même, en utilisant les opérateurs $\check{T}_\nu^n$, on montre que pour tout b dans G, $m(fb) = m(f)$, si $(fb)(x) = f(bx)$.
La mesure m est bien invariante à gauche et à droite par G.

Exercice

Soit G un groupe compact et μ une probabilité adaptée sur G, mais non nécessairement apériodique. À l'aide des méthodes utilisées dans la démonstration ci-dessus, montrer que la suite $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu^{*k})_{n\geq 1}$ converge faiblement vers m.

II. Analyse de Fourier sur les groupes compacts

II. Analyse de Fourier sur les groupes compacts

Nous rappelons dans cette partie les résultats fondamentaux de l'analyse harmonique sur les groupes compacts.

II. Analyse de Fourier sur les groupes compacts

Nous rappelons dans cette partie les résultats fondamentaux de l'analyse harmonique sur les groupes compacts.
Admettant l'existence de la mesure de Haar, cela nous donnera en particulier une deuxième démonstration de la convergence en loi des marches aléatoires sur G.

Rappels d'analyse de Fourier sur le tore

Rappels d'analyse de Fourier sur le tore

On considère ici le cas du groupe $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Rappels d'analyse de Fourier sur le tore

On considère ici le cas du groupe $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

1. Les fonctions $e_k : x \mapsto e^{2i\pi kx}$ forment une famille orthonormée dans $L^2(\mathbb{T})$.

Rappels d'analyse de Fourier sur le tore

On considère ici le cas du groupe $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

1. Les fonctions $e_k : x \mapsto e^{2i\pi kx}$ forment une famille orthonormée dans $L^2(\mathbb{T})$.
2. Le sous-espace qu'elles engendrent est dense dans $L^2(\mathbb{T})$.

Rappels d'analyse de Fourier sur le tore

On considère ici le cas du groupe $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

1. Les fonctions $e_k : x \mapsto e^{2i\pi kx}$ forment une famille orthonormée dans $L^2(\mathbb{T})$.
2. Le sous-espace qu'elles engendrent est dense dans $L^2(\mathbb{T})$. (Weierstrass trigonométrique)

Rappels d'analyse de Fourier sur le tore

On considère ici le cas du groupe $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

1. Les fonctions $e_k : x \mapsto e^{2i\pi kx}$ forment une famille orthonormée dans $L^2(\mathbb{T})$.
2. Le sous-espace qu'elles engendrent est dense dans $L^2(\mathbb{T})$. (Weierstrass trigonométrique)
3. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, notons $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2i\pi kx}\mathrm{d}x$.

Rappels d'analyse de Fourier sur le tore

On considère ici le cas du groupe $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

1. Les fonctions $e_k : x \mapsto e^{2i\pi kx}$ forment une famille orthonormée dans $L^2(\mathbb{T})$.
2. Le sous-espace qu'elles engendrent est dense dans $L^2(\mathbb{T})$. (Weierstrass trigonométrique)
3. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, notons $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2i\pi kx} \mathrm{d}x$.
   L'application $f \mapsto (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ induit une isométrie bijective $L^2(\mathbb{T}) \simeq \ell^2(\mathbb{Z})$.

Rappels d'analyse de Fourier sur le tore

On considère ici le cas du groupe $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

1. Les fonctions $e_k : x \mapsto e^{2i\pi kx}$ forment une famille orthonormée dans $L^2(\mathbb{T})$.
2. Le sous-espace qu'elles engendrent est dense dans $L^2(\mathbb{T})$. (Weierstrass trigonométrique)
3. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, notons $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2i\pi kx}\mathrm{d}x$.
   L'application $f \mapsto (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ induit une isométrie bijective
   $L^2(\mathbb{T}) \simeq \ell^2(\mathbb{Z})$.
   (Formule de Plancherel)

Convergence des marches aléatoires sur le tore

Convergence des marches aléatoires sur le tore

Si μ est une mesure finie sur $\mathbb{T}$, on note

Convergence des marches aléatoires sur le tore

Si μ est une mesure finie sur $\mathbb{T}$, on note

$$\hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-2i\pi kx} \mu(\mathrm{d}x).$$

Convergence des marches aléatoires sur le tore

Si μ est une mesure finie sur $\mathbb{T}$, on note

$$\hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-2i\pi kx} \mu(\mathrm{d}x).$$

Exercice

1. *Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur $\mathbb{T}$.*

Convergence des marches aléatoires sur le tore

Si μ est une mesure finie sur $\mathbb{T}$, on note

$$\hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-2i\pi kx} \mu(\mathrm{d}x).$$

Exercice

1. *Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur $\mathbb{T}$. Montrer que $\mu_n \rightharpoonup m$ si et seulement si pour tout $k \neq 0$, $\widehat{\mu_n}(k) \to 0$.*

Convergence des marches aléatoires sur le tore

Si μ est une mesure finie sur $\mathbb{T}$, on note

$$\hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-2i\pi kx} \mu(\mathrm{d}x).$$

Exercice

1. *Soit* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de probabilités sur* $\mathbb{T}$. *Montrer que* $\mu_n \rightharpoonup m$ *si et seulement si pour tout* $k \neq 0$, $\widehat{\mu_n}(k) \to 0$.
2. *En déduire que si* μ *est apériodique et adaptée sur* $\mathbb{T}$, *alors* $\mu^{*n} \rightharpoonup m$.

Convergence des marches aléatoires sur le tore

Si μ est une mesure finie sur $\mathbb{T}$, on note

$$\hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-2i\pi kx} \mu(\mathrm{d}x).$$

Exercice

1. *Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur $\mathbb{T}$. Montrer que $\mu_n \rightharpoonup m$ si et seulement si pour tout $k \neq 0$, $\widehat{\mu_n}(k) \to 0$.*
2. *En déduire que si μ est apériodique et adaptée sur $\mathbb{T}$, alors $\mu^{*n} \rightharpoonup m$.*

Nous voulons généraliser cette approche à un groupe compact quelconque.

Représentations unitaires

Représentations unitaires

Définition (Représentation unitaire)

Représentations unitaires

Définition (Représentation unitaire)

Une représentation unitaire d'un groupe topologique G est un morphisme continu

Représentations unitaires

Définition (Représentation unitaire)

Une représentation unitaire d'un groupe topologique G est un morphisme continu $\rho : G \to U(V)$,

Représentations unitaires

Définition (Représentation unitaire)

Une représentation unitaire d'un groupe topologique G est un morphisme continu $\rho : G \to U(V)$, où V est un espace de Hilbert,

Représentations unitaires

Définition (Représentation unitaire)

Une représentation unitaire d'un groupe topologique G est un morphisme continu $\rho : G \to U(V)$, où V est un espace de Hilbert, et $U(V)$ l'espace des opérateurs unitaires sur V, muni de la norme d'opérateur.

Représentations unitaires

Définition (Représentation unitaire)

Une représentation unitaire d'un groupe topologique G est un morphisme continu $\rho : G \to U(V)$, où V est un espace de Hilbert, et $U(V)$ l'espace des opérateurs unitaires sur V, muni de la norme d'opérateur.
La représentation ρ est dite irréductible si $\{0\}$ et V sont les seuls sous-espaces fermés invariants de V.

Représentations unitaires

Définition (Représentation unitaire)

Une représentation unitaire d'un groupe topologique G est un morphisme continu $\rho : G \to U(V)$, où V est un espace de Hilbert, et $U(V)$ l'espace des opérateurs unitaires sur V, muni de la norme d'opérateur.
La représentation ρ est dite irréductible si $\{0\}$ et V sont les seuls sous-espaces fermés invariants de V.

Remarque

Pour insister sur le fait qu'on ne considère que les sous-espaces fermés, on parle parfois de représentation topologiquement irréductible.

Représentations unitaires

Définition (Représentation unitaire)

Une représentation unitaire d'un groupe topologique G est un morphisme continu $\rho : G \to U(V)$, où V est un espace de Hilbert, et $U(V)$ l'espace des opérateurs unitaires sur V, muni de la norme d'opérateur.
La représentation ρ est dite irréductible si $\{0\}$ et V sont les seuls sous-espaces fermés invariants de V.

Remarque

Pour insister sur le fait qu'on ne considère que les sous-espaces fermés, on parle parfois de représentation topologiquement irréductible.

Exemple

La représentation quasi-régulière de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ est topologiquement irréductible, mais non algébriquement irréductible, puisque le sous-espace (dense) des fonctions C^∞ est invariant.

Définition (Dual unitaire)

Définition (Dual unitaire)

Si G est un groupe compact, le dual unitaire de G est l'ensemble des représentations irréductibles unitaires de G, à isomorphisme près.

Définition (Dual unitaire)

Si G est un groupe compact, le dual unitaire de G est l'ensemble des représentations irréductibles unitaires de G, à isomorphisme près. Nous le noterons $\hat{G}$.

Définition (Dual unitaire)

Si G est un groupe compact, le dual unitaire de G est l'ensemble des représentations irréductibles unitaires de G, à isomorphisme près.
Nous le noterons $\hat{G}$.

Exercice

Soit $G = \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *le tore de dimension* 1*. Montrer que* $\hat{G}$ *s'identifie à* $\mathbb{Z}$*.*

Le théorème de Péter-Weyl

Le théorème de Péter-Weyl

Définition (Sous-espaces de coefficients)

Le théorème de Péter-Weyl

Définition (Sous-espaces de coefficients)

Pour $\rho \in \hat{G}$, on définit un sous-espace $\mathcal{H}_\rho < L^2(G)$ par

Le théorème de Péter-Weyl

Définition (Sous-espaces de coefficients)

Pour $\rho \in \hat{G}$, on définit un sous-espace $\mathcal{H}_\rho < L^2(G)$ par

$$\mathcal{H}_\rho = \{g \mapsto \langle A, \rho(g) \rangle;\ A \in (\mathrm{End}\, V_\rho)^*\}.$$

Le théorème de Péter-Weyl

Définition (Sous-espaces de coefficients)

Pour $\rho \in \hat{G}$, on définit un sous-espace $\mathcal{H}_\rho < L^2(G)$ par

$$\mathcal{H}_\rho = \{g \mapsto \langle A, \rho(g) \rangle;\ A \in (\mathrm{End}\, V_\rho)^*\}.$$

Proposition

Le sous-espace $\mathcal{H}_\rho$ est stable par l'action régulière de G à gauche et à droite sur $L^2(G)$.

Le théorème de Péter-Weyl

Définition (Sous-espaces de coefficients)

Pour $\rho \in \hat{G}$, on définit un sous-espace $\mathcal{H}_\rho < L^2(G)$ par

$$\mathcal{H}_\rho = \{g \mapsto \langle A, \rho(g) \rangle;\ A \in (\mathrm{End}\, V_\rho)^*\}.$$

Proposition

Le sous-espace $\mathcal{H}_\rho$ est stable par l'action régulière de G à gauche et à droite sur $L^2(G)$.

Démonstration.

Le théorème de Péter-Weyl

Définition (Sous-espaces de coefficients)

Pour $\rho \in \hat{G}$, on définit un sous-espace $\mathcal{H}_\rho < L^2(G)$ par

$$\mathcal{H}_\rho = \{g \mapsto \langle A, \rho(g) \rangle ;\ A \in (\mathrm{End}\ V_\rho)^*\}.$$

Proposition

Le sous-espace $\mathcal{H}_\rho$ est stable par l'action régulière de G à gauche et à droite sur $L^2(G)$.

Démonstration.

En effet, $X \mapsto \langle A, \rho(h_1) X \rho(h_2) \rangle$ est un élément de $(\mathrm{End}\ V_\rho)^*$. □

Le théorème de Péter-Weyl (suite)

Le théorème de Péter-Weyl (suite)

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Weierstrass trigonométrique.

Le théorème de Péter-Weyl (suite)

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Weierstrass trigonométrique.

Théorème (Péter-Weyl)

Le théorème de Péter-Weyl (suite)

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Weierstrass trigonométrique.

Théorème (Péter-Weyl)

Soit G un groupe compact.

Le théorème de Péter-Weyl (suite)

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Weierstrass trigonométrique.

Théorème (Péter-Weyl)

Soit G un groupe compact.
L'espace $L^2(G)$ se décompose en somme directe hilbertienne orthogonale

Le théorème de Péter-Weyl (suite)

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Weierstrass trigonométrique.

Théorème (Péter-Weyl)

Soit G un groupe compact.
L'espace $L^2(G)$ se décompose en somme directe hilbertienne orthogonale

$$L^2(G) =$$

Le théorème de Péter-Weyl (suite)

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Weierstrass trigonométrique.

Théorème (Péter-Weyl)

Soit G un groupe compact.
L'espace $L^2(G)$ se décompose en somme directe hilbertienne orthogonale

$$L^2(G) = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \mathcal{H}_\rho.$$

Le théorème de Péter-Weyl (suite)

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Weierstrass trigonométrique.

Théorème (Péter-Weyl)

Soit G un groupe compact.
L'espace $L^2(G)$ se décompose en somme directe hilbertienne orthogonale

$$L^2(G) = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \mathcal{H}_\rho.$$

C'est à partir de ce résultat que nous montrerons les propriétés importantes de la transformée de Fourier sur les groupes compacts.

Transformée de Fourier

Transformée de Fourier

Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, la représentation duale $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ est définie par

Transformée de Fourier

Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, la représentation duale $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ est définie par

$$\forall f \in V^*, \quad \rho^*(g)f = f \circ \rho(g)^{-1}$$

Transformée de Fourier

Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, la représentation duale $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ est définie par

$$\forall f \in V^*, \quad \rho^*(g)f = f \circ \rho(g)^{-1}$$

de façon équivalente, $\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$.

Transformée de Fourier

Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, la représentation duale $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ est définie par

$$\forall f \in V^*, \quad \rho^*(g)f = f \circ \rho(g)^{-1}$$

de façon équivalente, $\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$.

Définition (Transformée de Fourier)

Transformée de Fourier

Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, la représentation duale $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ est définie par

$$\forall f \in V^*, \quad \rho^*(g)f = f \circ \rho(g)^{-1}$$

de façon équivalente, $\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$.

Définition (Transformée de Fourier)

Pour $f \in L^1(G)$ et $\rho \in \hat{G}$, on note

Transformée de Fourier

Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, la représentation duale $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ est définie par

$$\forall f \in V^*, \quad \rho^*(g)f = f \circ \rho(g)^{-1}$$

de façon équivalente, $\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$.

Définition (Transformée de Fourier)

Pour $f \in L^1(G)$ et $\rho \in \hat{G}$, on note

$$\hat{f}(\rho) =$$

Transformée de Fourier

Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, la représentation duale $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ est définie par

$$\forall f \in V^*, \quad \rho^*(g)f = f \circ \rho(g)^{-1}$$

de façon équivalente, $\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$.

Définition (Transformée de Fourier)

Pour $f \in L^1(G)$ et $\rho \in \hat{G}$, on note

$$\hat{f}(\rho) = \int_G f(g)\rho^*(g)\,\mathrm{d}g.$$

Transformée de Fourier

Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, la représentation duale $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ est définie par

$$\forall f \in V^*, \quad \rho^*(g)f = f \circ \rho(g)^{-1}$$

de façon équivalente, $\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$.

Définition (Transformée de Fourier)

Pour $f \in L^1(G)$ et $\rho \in \hat{G}$, on note

$$\hat{f}(\rho) = \int_G f(g)\rho^*(g)\,\mathrm{d}g.$$

La *transformée de Fourier* sur le groupe compact G est l'application

Transformée de Fourier

Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, la représentation duale $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ est définie par

$$\forall f \in V^*, \quad \rho^*(g)f = f \circ \rho(g)^{-1}$$

de façon équivalente, $\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$.

Définition (Transformée de Fourier)

Pour $f \in L^1(G)$ et $\rho \in \hat{G}$, on note

$$\hat{f}(\rho) = \int_G f(g)\rho^*(g)\,\mathrm{d}g.$$

La *transformée de Fourier* sur le groupe compact G est l'application

$$L^1(G) \quad \to \quad \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \mathrm{End}\, V_\rho$$

Transformée de Fourier

Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, la représentation duale $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ est définie par

$$\forall f \in V^*, \quad \rho^*(g)f = f \circ \rho(g)^{-1}$$

de façon équivalente, $\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$.

Définition (Transformée de Fourier)

Pour $f \in L^1(G)$ et $\rho \in \hat{G}$, on note

$$\hat{f}(\rho) = \int_G f(g)\rho^*(g)\,\mathrm{d}g.$$

La *transformée de Fourier* sur le groupe compact G est l'application

$$\begin{array}{ccc} L^1(G) & \to & \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \mathrm{End}\, V_\rho \\ f & \mapsto & (\hat{f}(\rho))_{\rho \in \hat{G}} \end{array}$$

Transformée de Fourier (suite)

Transformée de Fourier (suite)

Théorème (Isomorphisme de Fourier)

Transformée de Fourier (suite)

Théorème (Isomorphisme de Fourier)

Si chaque $\mathrm{End}\, V_\rho$ *est muni de la norme de Hilbert Schmidt définie par*

Transformée de Fourier (suite)

Théorème (Isomorphisme de Fourier)

Si chaque End V_ρ *est muni de la norme de Hilbert Schmidt définie par* $\|A\|_{HS} = \mathrm{Tr}(A^*A)^{\frac{1}{2}}$,

Transformée de Fourier (suite)

Théorème (Isomorphisme de Fourier)

Si chaque End V_ρ *est muni de la norme de Hilbert Schmidt définie par* $\|A\|_{HS} = \mathrm{Tr}(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, *l'application*

Transformée de Fourier (suite)

Théorème (Isomorphisme de Fourier)

Si chaque End V_ρ *est muni de la norme de Hilbert Schmidt définie par* $\|A\|_{HS} = \mathrm{Tr}(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, *l'application*

$$f \mapsto \left((\dim V_\rho)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\rho)\right)_{\rho \in \hat{G}}$$

Transformée de Fourier (suite)

Théorème (Isomorphisme de Fourier)

Si chaque $\mathrm{End}\, V_\rho$ *est muni de la norme de Hilbert Schmidt définie par* $\|A\|_{HS} = \mathrm{Tr}(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, *l'application*

$$f \mapsto \left((\dim V_\rho)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\rho) \right)_{\rho \in \hat{G}}$$

induit une isométrie

Transformée de Fourier (suite)

Théorème (Isomorphisme de Fourier)

Si chaque End V_ρ *est muni de la norme de Hilbert Schmidt définie par* $\|A\|_{HS} = \mathrm{Tr}(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, *l'application*

$$f \mapsto \left((\dim V_\rho)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\rho) \right)_{\rho \in \hat{G}}$$

induit une isométrie $L^2(G) \simeq \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \mathrm{End}\, V_\rho$.

Une structure d'algèbre

Une structure d'algèbre

Le produit de convolution sur $L^1(G)$,

Une structure d'algèbre

Le produit de convolution sur $L^1(G)$, défini par

$$f_1 * f_2(x) = \int_G f_1(g) f_2(g^{-1}x)\,\mathrm{d}g,$$

Une structure d'algèbre

Le produit de convolution sur $L^1(G)$, défini par

$$f_1 * f_2(x) = \int_G f_1(g) f_2(g^{-1}x)\,\mathrm{d}g,$$

permet de munir les espaces $L^1(G)$, $L^2(G)$ et $C(G)$ de structures d'algèbres.

Une structure d'algèbre

Le produit de convolution sur $L^1(G)$, défini par

$$f_1 * f_2(x) = \int_G f_1(g) f_2(g^{-1}x)\,\mathrm{d}g,$$

permet de munir les espaces $L^1(G)$, $L^2(G)$ et $C(G)$ de structures d'algèbres.
La transformée de Fourier est un morphisme d'algèbres, i.e.

Une structure d'algèbre

Le produit de convolution sur $L^1(G)$, défini par

$$f_1 * f_2(x) = \int_G f_1(g) f_2(g^{-1}x)\,\mathrm{d}g,$$

permet de munir les espaces $L^1(G)$, $L^2(G)$ et $C(G)$ de structures d'algèbres.
La transformée de Fourier est un morphisme d'algèbres, i.e.

$$\forall f_1, f_2,$$

Une structure d'algèbre

Le produit de convolution sur $L^1(G)$, défini par

$$f_1 * f_2(x) = \int_G f_1(g) f_2(g^{-1}x)\, \mathrm{d}g,$$

permet de munir les espaces $L^1(G)$, $L^2(G)$ et $C(G)$ de structures d'algèbres.
La transformée de Fourier est un morphisme d'algèbres, i.e.

$$\forall f_1, f_2, \quad \widehat{f_1 * f_2}(\rho) = \widehat{f_1}(\rho)\widehat{f_2}(\rho).$$

Une structure d'algèbre

Le produit de convolution sur $L^1(G)$, défini par

$$f_1 * f_2(x) = \int_G f_1(g) f_2(g^{-1}x)\,\mathrm{d}g,$$

permet de munir les espaces $L^1(G)$, $L^2(G)$ et $C(G)$ de structures d'algèbres.
La transformée de Fourier est un morphisme d'algèbres, i.e.

$$\forall f_1, f_2, \quad \widehat{f_1 * f_2}(\rho) = \widehat{f_1}(\rho)\widehat{f_2}(\rho).$$

En particulier, $L^2(G)$ est une algèbre semi-simple, et ses idéaux simples sont isomorphes aux algèbres matricielles $\operatorname{End} V_\rho$, $\rho \in \hat{G}$.

Formules classiques

Formules classiques

Comme corollaires du théorème d'isomorphisme de Fourier , on obtient des généralisations des formules bien connues de l'analyse de Fourier sur le cercle.

Formules classiques

Comme corollaires du théorème d'isomorphisme de Fourier , on obtient des généralisations des formules bien connues de l'analyse de Fourier sur le cercle.

Formules classiques

Comme corollaires du théorème d'isomorphisme de Fourier , on obtient des généralisations des formules bien connues de l'analyse de Fourier sur le cercle.

Formule de Parseval

$$\forall f \in L^2(G), \quad \|f\|_2^2 = \sum_{\rho \in \hat{G}} (\dim V_\rho) \|\hat{f}(\rho)\|_{HS}^2$$

Formules classiques

Comme corollaires du théorème d'isomorphisme de Fourier , on obtient des généralisations des formules bien connues de l'analyse de Fourier sur le cercle.

Formule de Parseval

$$\forall f \in L^2(G), \quad \|f\|_2^2 = \sum_{\rho \in \hat{G}} (\dim V_\rho) \|\hat{f}(\rho)\|_{HS}^2$$

Formules classiques

Comme corollaires du théorème d'isomorphisme de Fourier , on obtient des généralisations des formules bien connues de l'analyse de Fourier sur le cercle.

Formule de Parseval

$$\forall f \in L^2(G), \quad \|f\|_2^2 = \sum_{\rho \in \hat{G}} (\dim V_\rho) \|\hat{f}(\rho)\|_{HS}^2$$

Formule de Plancherel

$$\forall f \in C^\infty(G), \forall x \in G, \quad f(x) = \sum_{\rho \in \hat{G}} (\dim V_\rho)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Tr}(\hat{f}(\rho)^* \rho(x))$$

Formules classiques

Comme corollaires du théorème d'isomorphisme de Fourier , on obtient des généralisations des formules bien connues de l'analyse de Fourier sur le cercle.

Formule de Parseval

$$\forall f \in L^2(G), \quad \|f\|_2^2 = \sum_{\rho \in \hat{G}} (\dim V_\rho) \|\hat{f}(\rho)\|_{HS}^2$$

Formule de Plancherel

$$\forall f \in C^\infty(G), \forall x \in G, \quad f(x) = \sum_{\rho \in \hat{G}} (\dim V_\rho)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Tr}(\hat{f}(\rho)^* \rho(x))$$

La suite de cette partie a pour but de démontrer le théorème de Péter-Weyl et l'isomorphisme de Fourier.

Lemme de Schur

Lemme de Schur

Lemme (Lemme de Schur)

Lemme de Schur

Lemme (Lemme de Schur)

Soit G un groupe topologique et V_1, V_2 deux représentations unitaires irréductibles de G.

Lemme de Schur

Lemme (Lemme de Schur)

Soit G un groupe topologique et V_1, V_2 deux représentations unitaires irréductibles de G.
Si $A : V_1 \to V_2$ est un opérateur linéaire tel que pour tout $g \in G$, $\rho_2(g)A = A\rho_1(g)$, alors

Lemme de Schur

Lemme (Lemme de Schur)

Soit G un groupe topologique et V_1, V_2 deux représentations unitaires irréductibles de G.
Si $A : V_1 \to V_2$ est un opérateur linéaire tel que pour tout $g \in G$, $\rho_2(g)A = A\rho_1(g)$, alors

1. *Si $V_1 \not\simeq V_2$ (comme représentations de G), alors $A = 0$.*

Lemme de Schur

Lemme (Lemme de Schur)

Soit G un groupe topologique et V_1, V_2 deux représentations unitaires irréductibles de G.
Si $A : V_1 \to V_2$ est un opérateur linéaire tel que pour tout $g \in G$, $\rho_2(g)A = A\rho_1(g)$, alors

1. *Si $V_1 \not\simeq V_2$ (comme représentations de G), alors $A = 0$.*
2. *Si $V_1 = V_2$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda\,\mathrm{Id}$.*

Lemme de Schur

Lemme (Lemme de Schur)

Soit G un groupe topologique et V_1, V_2 deux représentations unitaires irréductibles de G.
Si $A : V_1 \to V_2$ est un opérateur linéaire tel que pour tout $g \in G$, $\rho_2(g)A = A\rho_1(g)$, alors

1. *Si $V_1 \not\simeq V_2$ (comme représentations de G), alors $A = 0$.*
2. *Si $V_1 = V_2$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda\,\mathrm{Id}$.*

Lemme de Schur, démonstration

Lemme de Schur, démonstration

Démonstration.

Lemme de Schur, démonstration

Démonstration.

Les sous-espaces fermés $\ker A$ et $\overline{\operatorname{im} A}$ sont stables par l'action de G, donc égaux à $\{0\}$ ou à l'espace tout entier, par irréductibilité.

Lemme de Schur, démonstration

Démonstration.

Les sous-espaces fermés $\ker A$ et $\overline{\mathrm{im}\, A}$ sont stables par l'action de G, donc égaux à $\{0\}$ ou à l'espace tout entier, par irréductibilité.
Cela montre la première partie.

Lemme de Schur, démonstration

Démonstration.

Les sous-espaces fermés $\ker A$ et $\overline{\operatorname{im} A}$ sont stables par l'action de G, donc égaux à $\{0\}$ ou à l'espace tout entier, par irréductibilité.
Cela montre la première partie.

Pour la deuxième partie, on remarque que A commute à tous les opérateurs $\rho(g)$, $g \in G$, et comme ρ est unitaire, il en est de même pour l'opérateur adjoint A^*.

Lemme de Schur, démonstration

Démonstration.

Les sous-espaces fermés $\ker A$ et $\overline{\operatorname{im} A}$ sont stables par l'action de G, donc égaux à $\{0\}$ ou à l'espace tout entier, par irréductibilité.
Cela montre la première partie.

Pour la deuxième partie, on remarque que A commute à tous les opérateurs $\rho(g)$, $g \in G$, et comme ρ est unitaire, il en est de même pour l'opérateur adjoint A^*.
Par suite, les opérateurs auto-adjoints $L = \frac{A+A^*}{2}$ et $M = \frac{A-A^*}{2i}$ commutent à l'action de G.

Lemme de Schur, démonstration

Démonstration.

Les sous-espaces fermés $\ker A$ et $\overline{\operatorname{im} A}$ sont stables par l'action de G, donc égaux à $\{0\}$ ou à l'espace tout entier, par irréductibilité.
Cela montre la première partie.

Pour la deuxième partie, on remarque que A commute à tous les opérateurs $\rho(g)$, $g \in G$, et comme ρ est unitaire, il en est de même pour l'opérateur adjoint A^*.
Par suite, les opérateurs auto-adjoints $L = \frac{A+A^*}{2}$ et $M = \frac{A-A^*}{2i}$ commutent à l'action de G.
D'après le théorème spectral, tout projecteur spectral $E : V \to V$ associé à L ou M commute à l'action de G, et son noyau est donc un sous-espace fermé stable par G, égal à $\{0\}$ ou V, par irréductibilité.

Lemme de Schur, démonstration

Démonstration.

Les sous-espaces fermés $\ker A$ et $\overline{\mathrm{im}\, A}$ sont stables par l'action de G, donc égaux à $\{0\}$ ou à l'espace tout entier, par irréductibilité.
Cela montre la première partie.

Pour la deuxième partie, on remarque que A commute à tous les opérateurs $\rho(g)$, $g \in G$, et comme ρ est unitaire, il en est de même pour l'opérateur adjoint A^*.
Par suite, les opérateurs auto-adjoints $L = \frac{A+A^*}{2}$ et $M = \frac{A-A^*}{2i}$ commutent à l'action de G.
D'après le théorème spectral, tout projecteur spectral $E : V \to V$ associé à L ou M commute à l'action de G, et son noyau est donc un sous-espace fermé stable par G, égal à $\{0\}$ ou V, par irréductibilité.
Par conséquent L et M n'ont chacun qu'une unique valeur spectrale :

Lemme de Schur, démonstration

Démonstration.

Les sous-espaces fermés $\ker A$ et $\overline{\operatorname{im} A}$ sont stables par l'action de G, donc égaux à $\{0\}$ ou à l'espace tout entier, par irréductibilité.
Cela montre la première partie.

Pour la deuxième partie, on remarque que A commute à tous les opérateurs $\rho(g)$, $g \in G$, et comme ρ est unitaire, il en est de même pour l'opérateur adjoint A^*.
Par suite, les opérateurs auto-adjoints $L = \frac{A+A^*}{2}$ et $M = \frac{A-A^*}{2i}$ commutent à l'action de G.
D'après le théorème spectral, tout projecteur spectral $E : V \to V$ associé à L ou M commute à l'action de G, et son noyau est donc un sous-espace fermé stable par G, égal à $\{0\}$ ou V, par irréductibilité.
Par conséquent L et M n'ont chacun qu'une unique valeur spectrale : pour certains $x, y \in C$, $L = x$, $M = y$,

Lemme de Schur, démonstration

Démonstration.

Les sous-espaces fermés $\ker A$ et $\overline{\operatorname{im} A}$ sont stables par l'action de G, donc égaux à $\{0\}$ ou à l'espace tout entier, par irréductibilité.
Cela montre la première partie.

Pour la deuxième partie, on remarque que A commute à tous les opérateurs $\rho(g)$, $g \in G$, et comme ρ est unitaire, il en est de même pour l'opérateur adjoint A^*.
Par suite, les opérateurs auto-adjoints $L = \frac{A+A^*}{2}$ et $M = \frac{A-A^*}{2i}$ commutent à l'action de G.
D'après le théorème spectral, tout projecteur spectral $E : V \to V$ associé à L ou M commute à l'action de G, et son noyau est donc un sous-espace fermé stable par G, égal à $\{0\}$ ou V, par irréductibilité.
Par conséquent L et M n'ont chacun qu'une unique valeur spectrale : pour certains $x, y \in C$, $L = x$, $M = y$, et donc $A = \lambda \operatorname{Id}$, avec $\lambda = x + iy$. $\square$

Représentations de dimension finie

Représentations de dimension finie

Proposition

Représentations de dimension finie

Proposition

Soit G un groupe compact.

Représentations de dimension finie

Proposition

Soit G un groupe compact.
Toute représentation irréductible de G est de dimension finie.

Représentations de dimension finie

Proposition

Soit G un groupe compact.
Toute représentation irréductible de G est de dimension finie.

Démonstration.

Représentations de dimension finie

Proposition

Soit G un groupe compact.
Toute représentation irréductible de G est de dimension finie.

Démonstration.

Soit v un vecteur unitaire dans V.

Représentations de dimension finie

Proposition

Soit G un groupe compact.
Toute représentation irréductible de G est de dimension finie.

Démonstration.

Soit v un vecteur unitaire dans V.
L'opérateur

Représentations de dimension finie

Proposition

Soit G un groupe compact.
Toute représentation irréductible de G est de dimension finie.

Démonstration.

Soit v un vecteur unitaire dans V.
L'opérateur

$$A : u \mapsto \int_G (gv, u) gv \, \mathrm{d}g$$

Représentations de dimension finie

Proposition

Soit G un groupe compact.
Toute représentation irréductible de G est de dimension finie.

Démonstration.

Soit v un vecteur unitaire dans V.
L'opérateur

$$A : u \mapsto \int_G (gv, u) gv \,\mathrm{d}g$$

commute à l'action de G

Représentations de dimension finie

Proposition

Soit G un groupe compact.
Toute représentation irréductible de G est de dimension finie.

Démonstration.

Soit v un vecteur unitaire dans V.
L'opérateur

$$A : u \mapsto \int_G (gv, u) gv \, \mathrm{d}g$$

commute à l'action de G donc $A = \lambda \, \mathrm{Id}$ d'après le lemme de Schur.

Représentations de dimension finie

Proposition

Soit G un groupe compact.
Toute représentation irréductible de G est de dimension finie.

Démonstration.

Soit v un vecteur unitaire dans V.
L'opérateur

$$A : u \mapsto \int_G (gv, u) gv \, \mathrm{d}g$$

commute à l'action de G donc $A = \lambda \, \mathrm{Id}$ d'après le lemme de Schur.
De plus, $\lambda = (Av, v) = \int_G |(gv, v)|^2 \, \mathrm{d}g > 0$.

Représentations de dimension finie

Proposition

Soit G un groupe compact.
Toute représentation irréductible de G est de dimension finie.

Démonstration.

Soit v un vecteur unitaire dans V.
L'opérateur

$$A : u \mapsto \int_G (gv, u) gv \, \mathrm{d}g$$

commute à l'action de G donc $A = \lambda \, \mathrm{Id}$ d'après le lemme de Schur.
De plus, $\lambda = (Av, v) = \int_G |(gv, v)|^2 \, \mathrm{d}g > 0$.
Mais comme G est compact, on peut approcher A en norme par des sommes de Riemann, qui sont des opérateurs de rang fini.

Représentations de dimension finie

Proposition

Soit G un groupe compact.
Toute représentation irréductible de G est de dimension finie.

Démonstration.

Soit v un vecteur unitaire dans V.
L'opérateur

$$A : u \mapsto \int_G (gv, u) gv \, \mathrm{d}g$$

commute à l'action de G donc $A = \lambda \, \mathrm{Id}$ d'après le lemme de Schur.
De plus, $\lambda = (Av, v) = \int_G |(gv, v)|^2 \, \mathrm{d}g > 0$.
Mais comme G est compact, on peut approcher A en norme par des sommes de Riemann, qui sont des opérateurs de rang fini.
Donc $A = \lambda \, \mathrm{Id}$ est un opérateur compact,

Représentations de dimension finie

Proposition

Soit G un groupe compact.
Toute représentation irréductible de G est de dimension finie.

Démonstration.

Soit v un vecteur unitaire dans V.
L'opérateur

$$A : u \mapsto \int_G (gv, u) gv \, \mathrm{d}g$$

commute à l'action de G donc $A = \lambda \, \mathrm{Id}$ d'après le lemme de Schur.
De plus, $\lambda = (Av, v) = \int_G |(gv, v)|^2 \, \mathrm{d}g > 0$.
Mais comme G est compact, on peut approcher A en norme par des sommes de Riemann, qui sont des opérateurs de rang fini.
Donc $A = \lambda \, \mathrm{Id}$ est un opérateur compact, et d'après le théorème de Riesz, V est de dimension finie. $\square$

Exercice

Montrer que l'orbite d'un vecteur sous l'action d'un groupe compact peut engendrer un espace de dimension infinie.

Exercice

Montrer que l'orbite d'un vecteur sous l'action d'un groupe compact peut engendrer un espace de dimension infinie.

Orthogonalité des coefficients

Orthogonalité des coefficients

Dans la suite, le groupe compact G est toujours muni de la probabilité de Haar, et l'espace $L^2(G)$ du produit scalaire associé.

Orthogonalité des coefficients

Dans la suite, le groupe compact G est toujours muni de la probabilité de Haar, et l'espace $L^2(G)$ du produit scalaire associé.

Proposition (Orthogonalité des coefficients)

Orthogonalité des coefficients

Dans la suite, le groupe compact G est toujours muni de la probabilité de Haar, et l'espace $L^2(G)$ du produit scalaire associé.

Proposition (Orthogonalité des coefficients)

Soit G un groupe compact, et $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G.

Orthogonalité des coefficients

Dans la suite, le groupe compact G est toujours muni de la probabilité de Haar, et l'espace $L^2(G)$ du produit scalaire associé.

Proposition (Orthogonalité des coefficients)

Soit G un groupe compact, et $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G.
Pour $A_1 \in (\mathrm{End}\ V_1)^*$ et $A_2 \in \mathrm{End}\ V_2$,

Orthogonalité des coefficients

Dans la suite, le groupe compact G est toujours muni de la probabilité de Haar, et l'espace $L^2(G)$ du produit scalaire associé.

Proposition (Orthogonalité des coefficients)

Soit G un groupe compact, et $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G.
Pour $A_1 \in (\mathrm{End}\ V_1)^*$ et $A_2 \in \mathrm{End}\ V_2$,

$$I_{A_1,A_2} = \int_G \langle A_1, \rho_1(g)\rangle \langle \rho_2^*(g), A_2\rangle \mathrm{d}g = \left\{ \right.$$

Orthogonalité des coefficients

Dans la suite, le groupe compact G est toujours muni de la probabilité de Haar, et l'espace $L^2(G)$ du produit scalaire associé.

Proposition (Orthogonalité des coefficients)

Soit G un groupe compact, et $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G.
Pour $A_1 \in (\mathrm{End}\ V_1)^*$ et $A_2 \in \mathrm{End}\ V_2$,

$$I_{A_1,A_2} = \int_G \langle A_1, \rho_1(g)\rangle\langle \rho_2^*(g), A_2\rangle \mathrm{d}g = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \not\sim \rho_2 \\ & \end{cases}$$

Orthogonalité des coefficients

Dans la suite, le groupe compact G est toujours muni de la probabilité de Haar, et l'espace $L^2(G)$ du produit scalaire associé.

Proposition (Orthogonalité des coefficients)

Soit G un groupe compact, et $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G.
Pour $A_1 \in (\mathrm{End}\ V_1)^*$ et $A_2 \in \mathrm{End}\ V_2$,

$$I_{A_1,A_2} = \int_G \langle A_1, \rho_1(g)\rangle\langle \rho_2^*(g), A_2\rangle \mathrm{d}g = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \not\sim \rho_2 \\ \frac{\langle A_1, A_2\rangle}{\dim V_1} & \text{si } \rho_1 = \rho_2. \end{cases}$$

Orthogonalité des coefficients, démonstration

Orthogonalité des coefficients, démonstration

Comme $(\operatorname{End} V_1)^* \simeq V_1^* \otimes V_1$ et $\operatorname{End} V_2 \simeq V_2 \otimes V_2^*$,

Orthogonalité des coefficients, démonstration

Comme $(\mathrm{End}\, V_1)^* \simeq V_1^* \otimes V_1$ et $\mathrm{End}\, V_2 \simeq V_2 \otimes V_2^*$, il suffit de faire le calcul pour $A_1 = f_1 \otimes v_1$ et $A_2 = v_2 \otimes f_2$.

Orthogonalité des coefficients, démonstration

Comme $(\operatorname{End} V_1)^* \simeq V_1^* \otimes V_1$ et $\operatorname{End} V_2 \simeq V_2 \otimes V_2^*$, il suffit de faire le calcul pour $A_1 = f_1 \otimes v_1$ et $A_2 = v_2 \otimes f_2$.
On a alors

Orthogonalité des coefficients, démonstration

Comme $(\mathrm{End}\, V_1)^* \simeq V_1^* \otimes V_1$ et $\mathrm{End}\, V_2 \simeq V_2 \otimes V_2^*$, il suffit de faire le calcul pour $A_1 = f_1 \otimes v_1$ et $A_2 = v_2 \otimes f_2$.

On a alors

$$
\begin{aligned}
I_{A_1,A_2} &= \int_G f_1 \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2^*(g) v_2 \mathrm{d}g \\
&= f_1 \underbrace{\left(\int_G \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2(g)^{-1} \mathrm{d}g \right)}_{A} v_2
\end{aligned}
$$

Orthogonalité des coefficients, démonstration

Comme $(\mathrm{End}\, V_1)^* \simeq V_1^* \otimes V_1$ et $\mathrm{End}\, V_2 \simeq V_2 \otimes V_2^*$, il suffit de faire le calcul pour $A_1 = f_1 \otimes v_1$ et $A_2 = v_2 \otimes f_2$.
On a alors

$$\begin{aligned} I_{A_1,A_2} &= \int_G f_1 \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2^*(g) v_2 \mathrm{d}g \\ &= f_1 \underbrace{\left(\int_G \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2(g)^{-1} \mathrm{d}g \right)}_{A} v_2 \end{aligned}$$

L'opérateur $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ vérifie les hypothèses du lemme de Schur, donc

Orthogonalité des coefficients, démonstration

Comme $(\mathrm{End}\, V_1)^* \simeq V_1^* \otimes V_1$ et $\mathrm{End}\, V_2 \simeq V_2 \otimes V_2^*$, il suffit de faire le calcul pour $A_1 = f_1 \otimes v_1$ et $A_2 = v_2 \otimes f_2$.
On a alors

$$\begin{aligned} I_{A_1,A_2} &= \int_G f_1 \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2^*(g) v_2 \mathrm{d}g \\ &= f_1 \underbrace{\left(\int_G \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2(g)^{-1} \mathrm{d}g \right)}_{A} v_2 \end{aligned}$$

L'opérateur $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ vérifie les hypothèses du lemme de Schur, donc

$$A =$$

Orthogonalité des coefficients, démonstration

Comme $(\mathrm{End}\, V_1)^* \simeq V_1^* \otimes V_1$ et $\mathrm{End}\, V_2 \simeq V_2 \otimes V_2^*$, il suffit de faire le calcul pour $A_1 = f_1 \otimes v_1$ et $A_2 = v_2 \otimes f_2$.
On a alors

$$\begin{aligned} I_{A_1,A_2} &= \int_G f_1 \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2^*(g) v_2 \mathrm{d}g \\ &= f_1 \underbrace{\left(\int_G \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2(g)^{-1} \mathrm{d}g \right)}_{A} v_2 \end{aligned}$$

L'opérateur $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ vérifie les hypothèses du lemme de Schur, donc

$$A = \left\{ \right.$$

Orthogonalité des coefficients, démonstration

Comme $(\mathrm{End}\, V_1)^* \simeq V_1^* \otimes V_1$ et $\mathrm{End}\, V_2 \simeq V_2 \otimes V_2^*$, il suffit de faire le calcul pour $A_1 = f_1 \otimes v_1$ et $A_2 = v_2 \otimes f_2$.
On a alors

$$\begin{aligned} I_{A_1,A_2} &= \int_G f_1 \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2^*(g) v_2 \mathrm{d}g \\ &= f_1 \underbrace{\left(\int_G \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2(g)^{-1} \mathrm{d}g \right)}_{A} v_2 \end{aligned}$$

L'opérateur $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ vérifie les hypothèses du lemme de Schur, donc

$$A = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \not\sim \rho_2 \\ & \end{cases}$$

Orthogonalité des coefficients, démonstration

Comme $(\operatorname{End} V_1)^* \simeq V_1^* \otimes V_1$ et $\operatorname{End} V_2 \simeq V_2 \otimes V_2^*$, il suffit de faire le calcul pour $A_1 = f_1 \otimes v_1$ et $A_2 = v_2 \otimes f_2$.
On a alors

$$\begin{aligned} I_{A_1,A_2} &= \int_G f_1 \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2^*(g) v_2 \mathrm{d}g \\ &= f_1 \underbrace{\left(\int_G \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2(g)^{-1} \mathrm{d}g \right)}_{A} v_2 \end{aligned}$$

L'opérateur $A \in \operatorname{Hom}(V_1, V_2)$ vérifie les hypothèses du lemme de Schur, donc

$$A = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \not\simeq \rho_2 \\ \frac{\operatorname{Tr} A}{\dim V_1} \operatorname{Id} & \text{si } \rho_1 = \rho_2. \end{cases}$$

Orthogonalité des coefficients, démonstration

Comme $(\operatorname{End} V_1)^* \simeq V_1^* \otimes V_1$ et $\operatorname{End} V_2 \simeq V_2 \otimes V_2^*$, il suffit de faire le calcul pour $A_1 = f_1 \otimes v_1$ et $A_2 = v_2 \otimes f_2$.
On a alors

$$\begin{aligned} I_{A_1,A_2} &= \int_G f_1 \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2^*(g) v_2 \mathrm{d}g \\ &= f_1 \underbrace{\left(\int_G \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2(g)^{-1} \mathrm{d}g \right)}_{A} v_2 \end{aligned}$$

L'opérateur $A \in \operatorname{Hom}(V_1, V_2)$ vérifie les hypothèses du lemme de Schur, donc

$$A = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \not\simeq \rho_2 \\ \frac{\operatorname{Tr} A}{\dim V_1} \operatorname{Id} & \text{si } \rho_1 = \rho_2. \end{cases}$$

Ainsi,

Orthogonalité des coefficients, démonstration

Comme $(\operatorname{End} V_1)^* \simeq V_1^* \otimes V_1$ et $\operatorname{End} V_2 \simeq V_2 \otimes V_2^*$, il suffit de faire le calcul pour $A_1 = f_1 \otimes v_1$ et $A_2 = v_2 \otimes f_2$.
On a alors

$$\begin{aligned} I_{A_1,A_2} &= \int_G f_1 \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2^*(g) v_2 \mathrm{d}g \\ &= f_1 \underbrace{\left(\int_G \rho_1(g) v_1 f_2 \rho_2(g)^{-1} \mathrm{d}g \right)}_{A} v_2 \end{aligned}$$

L'opérateur $A \in \operatorname{Hom}(V_1, V_2)$ vérifie les hypothèses du lemme de Schur, donc

$$A = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \not\simeq \rho_2 \\ \frac{\operatorname{Tr} A}{\dim V_1} \operatorname{Id} & \text{si } \rho_1 = \rho_2. \end{cases}$$

Ainsi,

$$I_{A_1,A_2} = \frac{f_2(v_1) f_1(v_2)}{\dim V_1} = \frac{\langle A_1, A_2 \rangle}{\dim V_1} = \frac{\operatorname{Tr}({}^t A_2 A_1)}{\dim V_1}.$$

Démonstration du théorème de Péter-Weyl

Démonstration du théorème de Péter-Weyl

D'après la proposition précédente, et avec le fait que l'on peut écrire, pour un certain $A_2' \in \operatorname{End} V_2$,

Démonstration du théorème de Péter-Weyl

D'après la proposition précédente, et avec le fait que l'on peut écrire, pour un certain $A_2' \in \operatorname{End} V_2$,

$$\overline{\langle A_2, \rho_2(g) \rangle} = \langle \rho_2^*(g), A_2' \rangle,$$

Démonstration du théorème de Péter-Weyl

D'après la proposition précédente, et avec le fait que l'on peut écrire, pour un certain $A_2' \in \mathrm{End}\, V_2$,

$$\overline{\langle A_2, \rho_2(g)\rangle} = \langle \rho_2^*(g), A_2'\rangle,$$

les $\mathcal{H}_\rho$ sont bien deux à deux orthogonaux.

Démonstration du théorème de Péter-Weyl

D'après la proposition précédente, et avec le fait que l'on peut écrire, pour un certain $A_2' \in \operatorname{End} V_2$,

$$\overline{\langle A_2, \rho_2(g) \rangle} = \langle \rho_2^*(g), A_2' \rangle,$$

les $\mathcal{H}_\rho$ sont bien deux à deux orthogonaux.
Reste à voir qu'ils engendrent un sous-espace dense.

Démonstration du théorème de Péter-Weyl

D'après la proposition précédente, et avec le fait que l'on peut écrire, pour un certain $A_2' \in \operatorname{End} V_2$,

$$\overline{\langle A_2, \rho_2(g)\rangle} = \langle \rho_2^*(g), A_2' \rangle,$$

les $\mathcal{H}_\rho$ sont bien deux à deux orthogonaux.
Reste à voir qu'ils engendrent un sous-espace dense.
Pour cela, on remarque que $\mathcal{H} = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \mathcal{H}_\rho$ est une algèbre.

Démonstration du théorème de Péter-Weyl

D'après la proposition précédente, et avec le fait que l'on peut écrire, pour un certain $A_2' \in \operatorname{End} V_2$,

$$\overline{\langle A_2, \rho_2(g)\rangle} = \langle \rho_2^*(g), A_2'\rangle,$$

les $\mathcal{H}_\rho$ sont bien deux à deux orthogonaux.
Reste à voir qu'ils engendrent un sous-espace dense.
Pour cela, on remarque que $\mathcal{H} = \oplus_{\rho\in\hat{G}}\mathcal{H}_\rho$ est une algèbre.
Cela découle de la formule $\langle A_1, \rho_1(g)\rangle\langle A_2, \rho_2(g)\rangle = \langle A_1 \otimes A_2, \rho_1 \otimes \rho_2(g)\rangle$, et du fait que $\rho_1 \otimes \rho_2$ se décompose en somme directe de représentations irréductibles, car G est compact.

Démonstration du théorème de Péter-Weyl

D'après la proposition précédente, et avec le fait que l'on peut écrire, pour un certain $A_2' \in \mathrm{End}\, V_2$,

$$\overline{\langle A_2, \rho_2(g) \rangle} = \langle \rho_2^*(g), A_2' \rangle,$$

les $\mathcal{H}_\rho$ sont bien deux à deux orthogonaux.
Reste à voir qu'ils engendrent un sous-espace dense.
Pour cela, on remarque que $\mathcal{H} = \oplus_{\rho \in \hat{G}} \mathcal{H}_\rho$ est une algèbre.
Cela découle de la formule $\langle A_1, \rho_1(g) \rangle \langle A_2, \rho_2(g) \rangle = \langle A_1 \otimes A_2, \rho_1 \otimes \rho_2(g) \rangle$, et du fait que $\rho_1 \otimes \rho_2$ se décompose en somme directe de représentations irréductibles, car G est compact.
Comme $\mathcal{H}$ est aussi stable par conjugaison complexe (considérer la représentation duale), le théorème de Stone-Weierstrass montre qu'il suffit de voir que $\mathcal{H}$ sépare les points, ce qui revient à dire que si $\rho(g) = 1$ pour tout $\rho \in \hat{G}$, alors $g = 1$.

Démonstration du théorème de Péter-Weyl, suite et fin

Démonstration du théorème de Péter-Weyl, suite et fin

Cela est clair : si $\rho(g) = 1$ pour tout $\rho \in \hat{G}$, alors, comme $L^2(G)$ se décompose en somme d'irréductibles, g agit trivialement sur $L^2(G)$, donc $g = 1$.

Démonstration du théorème de Péter-Weyl, suite et fin

Cela est clair : si $\rho(g) = 1$ pour tout $\rho \in \hat{G}$, alors, comme $L^2(G)$ se décompose en somme d'irréductibles, g agit trivialement sur $L^2(G)$, donc $g = 1$.
(Sinon, $g \cdot \mathbb{1}_U \neq \mathbb{1}_U$ dès que U est un voisinage compact de 1 ne contenant pas g.)

Exercice

On propose une autre démonstration de la densité de $\mathcal{H}$ dans $L^2(G)$, qui n'utilise pas le théorème de Stone-Weierstrass, mais plutôt la convolution par des unités approchées.

1. *Soit $\phi \in L^2(G)$ symétrique. Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto f * \phi$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt symétrique sur $L^2(G)$.*
2. *En déduire que ses espaces propres pour les valeurs propres non nulles sont de dimension finie, et que*
$$L^2(G) = \ker T \oplus \bigoplus_n (\ker T - \lambda_n).$$
3. *En utilisant le fait que T commute à l'action de G régulière à gauche, montrer que les espaces propres sont stables par l'action de G, puis que $\overline{\operatorname{im} T} = \oplus_n (\ker T - \lambda_n)$ est inclus dans $\mathcal{H}$.*
4. *Si f est un élément orthogonal à $\mathcal{H}$, montrer que pour tout ϕ, $f * \phi$ est orthogonal à f, et conclure.*

Démonstration de l'isomorphisme de Fourier

Démonstration de l'isomorphisme de Fourier

Maintenant que nous avons montré le théorème de Péter-Weyl, la formule d'inversion de Fourier découle d'un simple calcul d'intégrale.

Démonstration de l'isomorphisme de Fourier

Maintenant que nous avons montré le théorème de Péter-Weyl, la formule d'inversion de Fourier découle d'un simple calcul d'intégrale.
Fixons $\rho \in \hat{G}$.

Démonstration de l'isomorphisme de Fourier

Maintenant que nous avons montré le théorème de Péter-Weyl, la formule d'inversion de Fourier découle d'un simple calcul d'intégrale.
Fixons $\rho \in \hat{G}$.
Pour $f \in \mathcal{H}_\rho$, choisissons $A \in (\mathrm{End}\, V_\rho)^*$ tel que $f(g) = \langle A, \rho(g) \rangle$.

Démonstration de l'isomorphisme de Fourier

Maintenant que nous avons montré le théorème de Péter-Weyl, la formule d'inversion de Fourier découle d'un simple calcul d'intégrale.
Fixons $\rho \in \hat{G}$.
Pour $f \in \mathcal{H}_\rho$, choisissons $A \in (\operatorname{End} V_\rho)^*$ tel que $f(g) = \langle A, \rho(g) \rangle$.
Par orthogonalité des caractères,

Démonstration de l'isomorphisme de Fourier

Maintenant que nous avons montré le théorème de Péter-Weyl, la formule d'inversion de Fourier découle d'un simple calcul d'intégrale.
Fixons $\rho \in \hat{G}$.
Pour $f \in \mathcal{H}_\rho$, choisissons $A \in (\mathrm{End}\, V_\rho)^*$ tel que $f(g) = \langle A, \rho(g) \rangle$.
Par orthogonalité des caractères,

$$\hat{f}(g) = \int_G \langle A, \rho(g) \rangle \rho^*(g) \, \mathrm{d}g = \frac{A}{\dim V_\rho}$$

Démonstration de l'isomorphisme de Fourier

Maintenant que nous avons montré le théorème de Péter-Weyl, la formule d'inversion de Fourier découle d'un simple calcul d'intégrale.
Fixons $\rho \in \hat{G}$.
Pour $f \in \mathcal{H}_\rho$, choisissons $A \in (\mathrm{End}\, V_\rho)^*$ tel que $f(g) = \langle A, \rho(g) \rangle$.
Par orthogonalité des caractères,

$$\hat{f}(g) = \int_G \langle A, \rho(g) \rangle \rho^*(g)\, \mathrm{d}g = \frac{A}{\dim V_\rho}$$

tandis que

Démonstration de l'isomorphisme de Fourier

Maintenant que nous avons montré le théorème de Péter-Weyl, la formule d'inversion de Fourier découle d'un simple calcul d'intégrale.
Fixons $\rho \in \hat{G}$.
Pour $f \in \mathcal{H}_\rho$, choisissons $A \in (\mathrm{End}\, V_\rho)^*$ tel que $f(g) = \langle A, \rho(g)\rangle$.
Par orthogonalité des caractères,

$$\hat{f}(g) = \int_G \langle A, \rho(g)\rangle \rho^*(g)\,\mathrm{d}g = \frac{A}{\dim V_\rho}$$

tandis que

$$\|f\|^2_{L^2(G)} = \int_G |\langle A, \rho(g)\rangle|^2\,\mathrm{d}g = \frac{\|A\|^2_{HS}}{\dim V_\rho}$$

Démonstration de l'isomorphisme de Fourier

Maintenant que nous avons montré le théorème de Péter-Weyl, la formule d'inversion de Fourier découle d'un simple calcul d'intégrale.
Fixons $\rho \in \hat{G}$.
Pour $f \in \mathcal{H}_\rho$, choisissons $A \in (\operatorname{End} V_\rho)^*$ tel que $f(g) = \langle A, \rho(g) \rangle$.
Par orthogonalité des caractères,

$$\hat{f}(g) = \int_G \langle A, \rho(g) \rangle \rho^*(g) \, \mathrm{d}g = \frac{A}{\dim V_\rho}$$

tandis que

$$\|f\|^2_{L^2(G)} = \int_G |\langle A, \rho(g) \rangle|^2 \, \mathrm{d}g = \frac{\|A\|^2_{HS}}{\dim V_\rho}$$

et donc $f \mapsto (\dim V_\rho)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\rho)$ est une isométrie bijective de $\mathcal{H}_\rho$ sur $(\operatorname{End} V_\rho)^*$.

Démonstration de l'isomorphisme de Fourier

Maintenant que nous avons montré le théorème de Péter-Weyl, la formule d'inversion de Fourier découle d'un simple calcul d'intégrale.
Fixons $\rho \in \hat{G}$.
Pour $f \in \mathcal{H}_\rho$, choisissons $A \in (\operatorname{End} V_\rho)^*$ tel que $f(g) = \langle A, \rho(g) \rangle$.
Par orthogonalité des caractères,

$$\hat{f}(g) = \int_G \langle A, \rho(g) \rangle \rho^*(g) \, \mathrm{d}g = \frac{A}{\dim V_\rho}$$

tandis que

$$\|f\|^2_{L^2(G)} = \int_G |\langle A, \rho(g) \rangle|^2 \, \mathrm{d}g = \frac{\|A\|^2_{HS}}{\dim V_\rho}$$

et donc $f \mapsto (\dim V_\rho)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\rho)$ est une isométrie bijective de $\mathcal{H}_\rho$ sur $(\operatorname{End} V_\rho)^*$. Comme $L^2(G)$ est égal à la somme hilbertienne des $\mathcal{H}_\rho$, cela démontre l'isomorphisme annoncé.

Exercice

On considère l'action de $G \times G$ sur l'espace $L^2(G)$ donnée par

$$[(g,h)\cdot f](x) = f(g^{-1}xh).$$

Exercice

On considère l'action de $G \times G$ sur l'espace $L^2(G)$ donnée par

$$[(g,h) \cdot f](x) = f(g^{-1}xh).$$

Montrer que les composantes irréductibles de cette représentation sont les sous-espaces $\mathcal{H}_\rho$ du théorème de Péter-Weyl.

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration

Admettant l'existence de la mesure de Haar, l'analyse harmonique permet aussi de montrer la convergence des marches aléatoires apériodiques adaptées.

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration

Admettant l'existence de la mesure de Haar, l'analyse harmonique permet aussi de montrer la convergence des marches aléatoires apériodiques adaptées.

Soit μ une probabilité adaptée apériodique sur G.

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration

Admettant l'existence de la mesure de Haar, l'analyse harmonique permet aussi de montrer la convergence des marches aléatoires apériodiques adaptées.

Soit μ une probabilité adaptée apériodique sur G.

On veut voir que μ^{*n} converge faiblement vers la mesure de Haar sur G.

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration

Admettant l'existence de la mesure de Haar, l'analyse harmonique permet aussi de montrer la convergence des marches aléatoires apériodiques adaptées.

Soit μ une probabilité adaptée apériodique sur G.

On veut voir que μ^{*n} converge faiblement vers la mesure de Haar sur G.

Rappelons que l'opérateur de convolution à droite $\check{T}_\mu$ associé à μ est défini par

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration

Admettant l'existence de la mesure de Haar, l'analyse harmonique permet aussi de montrer la convergence des marches aléatoires apériodiques adaptées.
Soit μ une probabilité adaptée apériodique sur G.
On veut voir que μ^{*n} converge faiblement vers la mesure de Haar sur G.
Rappelons que l'opérateur de convolution à droite $\check{T}_\mu$ associé à μ est défini par

$$\check{T}_\mu f = f * \mu.$$

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration

Admettant l'existence de la mesure de Haar, l'analyse harmonique permet aussi de montrer la convergence des marches aléatoires apériodiques adaptées.
Soit μ une probabilité adaptée apériodique sur G.
On veut voir que μ^{*n} converge faiblement vers la mesure de Haar sur G.
Rappelons que l'opérateur de convolution à droite $\check{T}_\mu$ associé à μ est défini par

$$\check{T}_\mu f = f * \mu.$$

Montrons tout d'abord que les opérateurs $\check{T}_{\mu^{*n}} = \check{T}_\mu^n$ convergent simplement vers 0 sur $L^2_0(G)$.

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration

Admettant l'existence de la mesure de Haar, l'analyse harmonique permet aussi de montrer la convergence des marches aléatoires apériodiques adaptées.
Soit μ une probabilité adaptée apériodique sur G.
On veut voir que μ^{*n} converge faiblement vers la mesure de Haar sur G.
Rappelons que l'opérateur de convolution à droite $\check{T}_\mu$ associé à μ est défini par

$$\check{T}_\mu f = f * \mu.$$

Montrons tout d'abord que les opérateurs $\check{T}_{\mu^{*n}} = \check{T}_\mu^n$ convergent simplement vers 0 sur $L^2_0(G)$.
Pour cela, notons, pour $\rho \in \hat{G}$,

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration

Admettant l'existence de la mesure de Haar, l'analyse harmonique permet aussi de montrer la convergence des marches aléatoires apériodiques adaptées.

Soit μ une probabilité adaptée apériodique sur G.

On veut voir que μ^{*n} converge faiblement vers la mesure de Haar sur G.

Rappelons que l'opérateur de convolution à droite $\check{T}_\mu$ associé à μ est défini par

$$\check{T}_\mu f = f * \mu.$$

Montrons tout d'abord que les opérateurs $\check{T}_{\mu^{*n}} = \check{T}_\mu^n$ convergent simplement vers 0 sur $L^2_0(G)$.

Pour cela, notons, pour $\rho \in \hat{G}$,

$$\hat{\mu}(\rho) = \int_G \rho^*(g)\mu(\mathrm{d}g).$$

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration

Admettant l'existence de la mesure de Haar, l'analyse harmonique permet aussi de montrer la convergence des marches aléatoires apériodiques adaptées.

Soit μ une probabilité adaptée apériodique sur G.

On veut voir que μ^{*n} converge faiblement vers la mesure de Haar sur G.

Rappelons que l'opérateur de convolution à droite $\check{T}_\mu$ associé à μ est défini par

$$\check{T}_\mu f = f * \mu.$$

Montrons tout d'abord que les opérateurs $\check{T}_{\mu^{*n}} = \check{T}_\mu^n$ convergent simplement vers 0 sur $L_0^2(G)$.

Pour cela, notons, pour $\rho \in \hat{G}$,

$$\hat{\mu}(\rho) = \int_G \rho^*(g)\mu(\mathrm{d}g).$$

L'espace $L_0^2(G)$ se décompose en somme de représentations irréductibles non triviales, chacune de dimension finie et stable par $\check{T}_\mu$.

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration, suite

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration, suite

Comme $\|\check{T}_\mu\|_{op} \leq 1$ il suffit de vérifier que $\check{T}_\mu$ n'a pas de valeur propre de module 1.

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration, suite

Comme $\|\check{T}_\mu\|_{op} \leq 1$ il suffit de vérifier que $\check{T}_\mu$ n'a pas de valeur propre de module 1.
On raisonne par contraposée en supposant que $\check{T}_\mu f = \lambda f$ avec $|\lambda| = 1$.

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration, suite

Comme $\|\check{T}_\mu\|_{op} \leq 1$ il suffit de vérifier que $\check{T}_\mu$ n'a pas de valeur propre de module 1.
On raisonne par contraposée en supposant que $\check{T}_\mu f = \lambda f$ avec $|\lambda| = 1$.
Cela implique $\check{\mu} * \mu * f = f$ et, par stricte convexité de $L^2(G)$, f est invariante par $S^{-1}S$, où $S = \operatorname{Supp} \mu$.

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration, suite

Comme $\|\check{T}_\mu\|_{op} \leq 1$ il suffit de vérifier que $\check{T}_\mu$ n'a pas de valeur propre de module 1.
On raisonne par contraposée en supposant que $\check{T}_\mu f = \lambda f$ avec $|\lambda| = 1$.
Cela implique $\check{\mu} * \mu * f = f$ et, par stricte convexité de $L^2(G)$, f est invariante par $S^{-1}S$, où $S = \operatorname{Supp} \mu$.
Mais alors $S^{-1}S$ est inclus dans le sous-groupe fermé $\operatorname{Stab}_G f$, et μ n'est pas adaptée apériodique.

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration, suite

Comme $\|\check{T}_\mu\|_{op} \leq 1$ il suffit de vérifier que $\check{T}_\mu$ n'a pas de valeur propre de module 1.
On raisonne par contraposée en supposant que $\check{T}_\mu f = \lambda f$ avec $|\lambda| = 1$.
Cela implique $\check{\mu} * \mu * f = f$ et, par stricte convexité de $L^2(G)$, f est invariante par $S^{-1}S$, où $S = \operatorname{Supp} \mu$.
Mais alors $S^{-1}S$ est inclus dans le sous-groupe fermé $\operatorname{Stab}_G f$, et μ n'est pas adaptée apériodique.
Soit maintenant $f \in C(G)$.

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration, suite

Comme $\|\check{T}_\mu\|_{op} \leq 1$ il suffit de vérifier que $\check{T}_\mu$ n'a pas de valeur propre de module 1.
On raisonne par contraposée en supposant que $\check{T}_\mu f = \lambda f$ avec $|\lambda| = 1$.
Cela implique $\check{\mu} * \mu * f = f$ et, par stricte convexité de $L^2(G)$, f est invariante par $S^{-1}S$, où $S = \operatorname{Supp} \mu$.
Mais alors $S^{-1}S$ est inclus dans le sous-groupe fermé $\mathrm{Stab}_G f$, et μ n'est pas adaptée apériodique.
Soit maintenant $f \in C(G)$.
La suite de fonctions $(\check{T}_\mu^n f)_{n\geq 1}$ est équicontinue et converge vers $\int_G f$ dans $L^2(G)$, donc elle converge vers $\int_G f$ dans $C(G)$.

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration, suite

Comme $\|\check{T}_\mu\|_{op} \leq 1$ il suffit de vérifier que $\check{T}_\mu$ n'a pas de valeur propre de module 1.
On raisonne par contraposée en supposant que $\check{T}_\mu f = \lambda f$ avec $|\lambda| = 1$.
Cela implique $\check{\mu} * \mu * f = f$ et, par stricte convexité de $L^2(G)$, f est invariante par $S^{-1}S$, où $S = \operatorname{Supp}\mu$.
Mais alors $S^{-1}S$ est inclus dans le sous-groupe fermé $\operatorname{Stab}_G f$, et μ n'est pas adaptée apériodique.
Soit maintenant $f \in C(G)$.
La suite de fonctions $(\check{T}_\mu^n f)_{n\geq 1}$ est équicontinue et converge vers $\int_G f$ dans $L^2(G)$, donc elle converge vers $\int_G f$ dans $C(G)$.
En particulier,

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration, suite

Comme $\|\check{T}_\mu\|_{op} \leq 1$ il suffit de vérifier que $\check{T}_\mu$ n'a pas de valeur propre de module 1.

On raisonne par contraposée en supposant que $\check{T}_\mu f = \lambda f$ avec $|\lambda| = 1$.

Cela implique $\check{\mu} * \mu * f = f$ et, par stricte convexité de $L^2(G)$, f est invariante par $S^{-1}S$, où $S = \operatorname{Supp} \mu$.

Mais alors $S^{-1}S$ est inclus dans le sous-groupe fermé $\operatorname{Stab}_G f$, et μ n'est pas adaptée apériodique.

Soit maintenant $f \in C(G)$.

La suite de fonctions $(\check{T}_\mu^n f)_{n\geq 1}$ est équicontinue et converge vers $\int_G f$ dans $L^2(G)$, donc elle converge vers $\int_G f$ dans $C(G)$.

En particulier,

$$(\check{T}_\mu^n f)(1) = \int_G f(g)\mu^{*n}(\mathrm{d}g) \to_{n\to\infty} \int_G f,$$

Convergence des marches aléatoires, 2ème démonstration, suite

Comme $\|\check{T}_\mu\|_{op} \leq 1$ il suffit de vérifier que $\check{T}_\mu$ n'a pas de valeur propre de module 1.
On raisonne par contraposée en supposant que $\check{T}_\mu f = \lambda f$ avec $|\lambda| = 1$.
Cela implique $\check{\mu} * \mu * f = f$ et, par stricte convexité de $L^2(G)$, f est invariante par $S^{-1}S$, où $S = \operatorname{Supp} \mu$.
Mais alors $S^{-1}S$ est inclus dans le sous-groupe fermé $\operatorname{Stab}_G f$, et μ n'est pas adaptée apériodique.
Soit maintenant $f \in C(G)$.
La suite de fonctions $(\check{T}_\mu^n f)_{n\geq 1}$ est équicontinue et converge vers $\int_G f$ dans $L^2(G)$, donc elle converge vers $\int_G f$ dans $C(G)$.
En particulier,

$$(\check{T}_\mu^n f)(1) = \int_G f(g)\mu^{*n}(\mathrm{d}g) \to_{n\to\infty} \int_G f,$$

et (μ^{*n}) converge faiblement vers la probabilité de Haar sur G.

III. La propriété du trou spectral

III. La propriété du trou spectral

Nous voulons maintenant étudier la vitesse de convergence de la suite $(\mu^{*n})_{n\geq 1}$ vers la mesure de Haar.

III. La propriété du trou spectral

Nous voulons maintenant étudier la vitesse de convergence de la suite $(\mu^{*n})_{n\geq 1}$ vers la mesure de Haar.

Cela se fera par l'étude de la suite $(T_\mu^n)_{n\geq 1}$, où $T_\mu : f \mapsto \mu * f$ est l'opérateur de convolution associé à μ, et nous mènera à définir la propriété du trou spectral pour une probabilité μ sur un groupe compact.

Propriété du trou spectral

Propriété du trou spectral

Notons que l'analyse des marches aléatoires à l'aide de la théorie de Fourier nous a permis de montrer la proposition suivante.

Propriété du trou spectral

Notons que l'analyse des marches aléatoires à l'aide de la théorie de Fourier nous a permis de montrer la proposition suivante.

Proposition

Propriété du trou spectral

Notons que l'analyse des marches aléatoires à l'aide de la théorie de Fourier nous a permis de montrer la proposition suivante.

Proposition

Soit G un groupe compact et μ une probabilité adaptée et apériodique sur G.

Propriété du trou spectral

Notons que l'analyse des marches aléatoires à l'aide de la théorie de Fourier nous a permis de montrer la proposition suivante.

Proposition

Soit G un groupe compact et μ une probabilité adaptée et apériodique sur G. La suite d'opérateurs $(T_\mu^n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0 sur l'espace $L_0^2(G) = \{f \in L^2(G) \mid \int_G f \,\mathrm{d}m = 0\}$.

Propriété du trou spectral

Notons que l'analyse des marches aléatoires à l'aide de la théorie de Fourier nous a permis de montrer la proposition suivante.

Proposition

Soit G un groupe compact et μ une probabilité adaptée et apériodique sur G. La suite d'opérateurs $(T_\mu^n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0 sur l'espace $L_0^2(G) = \{f \in L^2(G) \mid \int_G f \,\mathrm{d}m = 0\}$.

Exercice

Démontrer cette proposition directement à partir de la convergence faible des marches aléatoires.

Propriété du trou spectral

Notons que l'analyse des marches aléatoires à l'aide de la théorie de Fourier nous a permis de montrer la proposition suivante.

Proposition

Soit G un groupe compact et μ une probabilité adaptée et apériodique sur G. La suite d'opérateurs $(T_\mu^n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0 sur l'espace $L_0^2(G) = \{f \in L^2(G) \mid \int_G f \,\mathrm{d}m = 0\}$.

Exercice

Démontrer cette proposition directement à partir de la convergence faible des marches aléatoires.

Définition (Propriété du trou spectral)

Propriété du trou spectral

Notons que l'analyse des marches aléatoires à l'aide de la théorie de Fourier nous a permis de montrer la proposition suivante.

Proposition

Soit G un groupe compact et μ une probabilité adaptée et apériodique sur G. La suite d'opérateurs $(T_\mu^n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0 sur l'espace $L_0^2(G) = \{f \in L^2(G) \mid \int_G f \,\mathrm{d}m = 0\}$.

Exercice

Démontrer cette proposition directement à partir de la convergence faible des marches aléatoires.

Définition (Propriété du trou spectral)

Nous dirons que la mesure de probabilité μ sur G admet un trou spectral en 1 dans $L^2(G)$ si la suite $(T_\mu^n)_{n\geq 1}$ converge

Propriété du trou spectral

Notons que l'analyse des marches aléatoires à l'aide de la théorie de Fourier nous a permis de montrer la proposition suivante.

Proposition

Soit G un groupe compact et μ une probabilité adaptée et apériodique sur G. La suite d'opérateurs $(T_\mu^n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0 sur l'espace $L_0^2(G) = \{f \in L^2(G) \mid \int_G f \,\mathrm{d}m = 0\}$.

Exercice

Démontrer cette proposition directement à partir de la convergence faible des marches aléatoires.

Définition (Propriété du trou spectral)

Nous dirons que la mesure de probabilité μ sur G admet un trou spectral en 1 dans $L^2(G)$ si la suite $(T_\mu^n)_{n\geq 1}$ converge *en norme*

Propriété du trou spectral

Notons que l'analyse des marches aléatoires à l'aide de la théorie de Fourier nous a permis de montrer la proposition suivante.

Proposition

Soit G un groupe compact et μ une probabilité adaptée et apériodique sur G. La suite d'opérateurs $(T_\mu^n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0 sur l'espace $L_0^2(G) = \{f \in L^2(G) \mid \int_G f \,\mathrm{d}m = 0\}$.

Exercice

Démontrer cette proposition directement à partir de la convergence faible des marches aléatoires.

Définition (Propriété du trou spectral)

Nous dirons que la mesure de probabilité μ sur G admet un trou spectral en 1 dans $L^2(G)$ si la suite $(T_\mu^n)_{n\geq 1}$ converge *en norme* vers 0 dans $L_0^2(G)$.

Propriété du trou spectral

Notons que l'analyse des marches aléatoires à l'aide de la théorie de Fourier nous a permis de montrer la proposition suivante.

Proposition

Soit G un groupe compact et μ une probabilité adaptée et apériodique sur G. La suite d'opérateurs $(T_\mu^n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0 sur l'espace $L_0^2(G) = \{f \in L^2(G) \mid \int_G f \,\mathrm{d}m = 0\}$.

Exercice

Démontrer cette proposition directement à partir de la convergence faible des marches aléatoires.

Définition (Propriété du trou spectral)

Nous dirons que la mesure de probabilité μ sur G admet un trou spectral en 1 dans $L^2(G)$ si la suite $(T_\mu^n)_{n\geq 1}$ converge *en norme* vers 0 dans $L_0^2(G)$.

Suites géométriques dans les algèbres de Banach

Suites géométriques dans les algèbres de Banach

Rappelons que si A est une algèbre de Banach et $T \in A$, le spectre de T dans A est l'ensemble

Suites géométriques dans les algèbres de Banach

Rappelons que si A est une algèbre de Banach et $T \in A$, le spectre de T dans A est l'ensemble

$$\mathrm{Spec}_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ non inversible dans } A\}$$

Suites géométriques dans les algèbres de Banach

Rappelons que si A est une algèbre de Banach et $T \in A$, le spectre de T dans A est l'ensemble

$$\mathrm{Spec}_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ non inversible dans } A\}$$

et le rayon spectral de T

Suites géométriques dans les algèbres de Banach

Rappelons que si A est une algèbre de Banach et $T \in A$, le spectre de T dans A est l'ensemble

$$\mathsf{Spec}_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ non inversible dans } A\}$$

et le rayon spectral de T

$$\mathrm{RS}_A(T) = \max\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \mathsf{Spec}_A(T)\}.$$

Suites géométriques dans les algèbres de Banach

Rappelons que si A est une algèbre de Banach et $T \in A$, le spectre de T dans A est l'ensemble

$$\mathrm{Spec}_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ non inversible dans } A\}$$

et le rayon spectral de T

$$\mathrm{RS}_A(T) = \max\{|\lambda| \; ; \; \lambda \in \mathrm{Spec}_A(T)\}.$$

Proposition

Suites géométriques dans les algèbres de Banach

Rappelons que si A est une algèbre de Banach et $T \in A$, le spectre de T dans A est l'ensemble

$$\mathrm{Spec}_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ non inversible dans } A\}$$

et le rayon spectral de T

$$\mathrm{RS}_A(T) = \max\{|\lambda| \;;\; \lambda \in \mathrm{Spec}_A(T)\}.$$

Proposition

Soit A une algèbre de Banach et $T \in A$.

Suites géométriques dans les algèbres de Banach

Rappelons que si A est une algèbre de Banach et $T \in A$, le spectre de T dans A est l'ensemble

$$\mathsf{Spec}_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ non inversible dans } A\}$$

et le rayon spectral de T

$$\mathrm{RS}_A(T) = \max\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \mathsf{Spec}_A(T)\}.$$

Proposition

Soit A une algèbre de Banach et $T \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

Suites géométriques dans les algèbres de Banach

Rappelons que si A est une algèbre de Banach et $T \in A$, le spectre de T dans A est l'ensemble

$$\mathrm{Spec}_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ non inversible dans } A\}$$

et le rayon spectral de T

$$\mathrm{RS}_A(T) = \max\{|\lambda| \; ; \; \lambda \in \mathrm{Spec}_A(T)\}.$$

Proposition

Soit A une algèbre de Banach et $T \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *La suite $(T^n)_{n \geq 1}$ converge en norme vers 0 dans A.*

Suites géométriques dans les algèbres de Banach

Rappelons que si A est une algèbre de Banach et $T \in A$, le spectre de T dans A est l'ensemble

$$\mathrm{Spec}_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ non inversible dans } A\}$$

et le rayon spectral de T

$$\mathrm{RS}_A(T) = \max\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \mathrm{Spec}_A(T)\}.$$

Proposition

Soit A une algèbre de Banach et $T \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *La suite $(T^n)_{n \geq 1}$ converge en norme vers 0 dans A.*
2. $\mathrm{RS}_A(T) < 1$.

Suites géométriques dans les algèbres de Banach

Rappelons que si A est une algèbre de Banach et $T \in A$, le spectre de T dans A est l'ensemble

$$\mathrm{Spec}_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ non inversible dans } A\}$$

et le rayon spectral de T

$$\mathrm{RS}_A(T) = \max\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \mathrm{Spec}_A(T)\}.$$

Proposition

Soit A une algèbre de Banach et $T \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *La suite $(T^n)_{n \geq 1}$ converge en norme vers 0 dans A.*
2. $\mathrm{RS}_A(T) < 1$.

Démonstration.

Suites géométriques dans les algèbres de Banach

Rappelons que si A est une algèbre de Banach et $T \in A$, le spectre de T dans A est l'ensemble

$$\mathrm{Spec}_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ non inversible dans } A\}$$

et le rayon spectral de T

$$\mathrm{RS}_A(T) = \max\{|\lambda| \; ; \; \lambda \in \mathrm{Spec}_A(T)\}.$$

Proposition

Soit A une algèbre de Banach et $T \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *La suite $(T^n)_{n \geq 1}$ converge en norme vers 0 dans A.*
2. $\mathrm{RS}_A(T) < 1$.

Démonstration.

Appliquer la formule pour le rayon spectral

Suites géométriques dans les algèbres de Banach

Rappelons que si A est une algèbre de Banach et $T \in A$, le spectre de T dans A est l'ensemble

$$\mathrm{Spec}_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ non inversible dans } A\}$$

et le rayon spectral de T

$$\mathrm{RS}_A(T) = \max\{|\lambda| \; ; \; \lambda \in \mathrm{Spec}_A(T)\}.$$

Proposition

Soit A une algèbre de Banach et $T \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *La suite $(T^n)_{n\geq 1}$ converge en norme vers 0 dans A.*
2. $\mathrm{RS}_A(T) < 1$.

Démonstration.

Appliquer la formule pour le rayon spectral $\mathrm{RS}_A(T) = \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. □

Le corollaire suivant justifie la terminologie utilisée de

Le corollaire suivant justifie la terminologie utilisée de « trou spectral en 1 ».

Le corollaire suivant justifie la terminologie utilisée de « trou spectral en 1 ».

Corollaire

Si μ *admet un trou spectral dans* $L^2(G)$*, alors la valeur propre* 1 *est isolée dans* $\mathrm{Spec}(T_\mu)$.

Coefficients de Fourier et trou spectral

Coefficients de Fourier et trou spectral

Rappelons que si μ est une mesure borélienne finie sur G, on pose

Coefficients de Fourier et trou spectral

Rappelons que si μ est une mesure borélienne finie sur G, on pose

$$\hat{\mu}(\rho) = \int_G \rho(g)\mu(\mathrm{d}g).$$

Coefficients de Fourier et trou spectral

Rappelons que si μ est une mesure borélienne finie sur G, on pose

$$\hat{\mu}(\rho) = \int_G \rho(g)\mu(\mathrm{d}g).$$

Proposition

Une probabilité borélienne μ sur G admet un trou spectral si, et seulement si,

Coefficients de Fourier et trou spectral

Rappelons que si μ est une mesure borélienne finie sur G, on pose

$$\hat{\mu}(\rho) = \int_G \rho(g)\mu(\mathrm{d}g).$$

Proposition

Une probabilité borélienne μ sur G admet un trou spectral si, et seulement si, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour toute représentation $\rho \in \hat{G}$ non triviale,

Coefficients de Fourier et trou spectral

Rappelons que si μ est une mesure borélienne finie sur G, on pose

$$\hat{\mu}(\rho) = \int_G \rho(g)\mu(\mathrm{d}g).$$

Proposition

Une probabilité borélienne μ sur G admet un trou spectral si, et seulement si, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour toute représentation $\rho \in \hat{G}$ non triviale, $\mathrm{RS}(\hat{\mu}(\rho)) \leq 1 - \varepsilon$.

Coefficients de Fourier et trou spectral

Rappelons que si μ est une mesure borélienne finie sur G, on pose

$$\hat{\mu}(\rho) = \int_G \rho(g)\mu(\mathrm{d}g).$$

Proposition

Une probabilité borélienne μ sur G admet un trou spectral si, et seulement si, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour toute représentation $\rho \in \hat{G}$ non triviale, $\mathrm{RS}(\hat{\mu}(\rho)) \leq 1 - \varepsilon$.

Démonstration.

L'isomorphisme de Fourier montre que $L^2_0(G)$ se décompose en somme de représentations irréductibles non triviales.

Coefficients de Fourier et trou spectral

Rappelons que si μ est une mesure borélienne finie sur G, on pose

$$\hat{\mu}(\rho) = \int_G \rho(g)\mu(\mathrm{d}g).$$

Proposition

Une probabilité borélienne μ sur G admet un trou spectral si, et seulement si, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour toute représentation $\rho \in \hat{G}$ non triviale, $\mathrm{RS}(\hat{\mu}(\rho)) \leq 1 - \varepsilon$.

Démonstration.

L'isomorphisme de Fourier montre que $L^2_0(G)$ se décompose en somme de représentations irréductibles non triviales.
Si $V \simeq V_\rho^*$ est l'une de ces composantes irréductibles, l'opérateur T_μ préserve V et agit sur V comme son coefficient de Fourier $\hat{\mu}(\rho)$.

Coefficients de Fourier et trou spectral

Rappelons que si μ est une mesure borélienne finie sur G, on pose

$$\hat{\mu}(\rho) = \int_G \rho(g)\mu(\mathrm{d}g).$$

Proposition

Une probabilité borélienne μ sur G admet un trou spectral si, et seulement si, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour toute représentation $\rho \in \hat{G}$ non triviale, $\mathrm{RS}(\hat{\mu}(\rho)) \leq 1 - \varepsilon$.

Démonstration.

L'isomorphisme de Fourier montre que $L^2_0(G)$ se décompose en somme de représentations irréductibles non triviales.
Si $V \simeq V_\rho^*$ est l'une de ces composantes irréductibles, l'opérateur T_μ préserve V et agit sur V comme son coefficient de Fourier $\hat{\mu}(\rho)$.
Par suite, $\mathrm{Spec}\, T_\mu = \bigcup_{\rho \in \hat{G}} \mathrm{Spec}\, \hat{\mu}(\rho)$

Coefficients de Fourier et trou spectral

Rappelons que si μ est une mesure borélienne finie sur G, on pose

$$\hat{\mu}(\rho) = \int_G \rho(g)\mu(\mathrm{d}g).$$

Proposition

Une probabilité borélienne μ sur G admet un trou spectral si, et seulement si, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour toute représentation $\rho \in \hat{G}$ non triviale, $\mathrm{RS}(\hat{\mu}(\rho)) \leq 1 - \varepsilon$.

Démonstration.

L'isomorphisme de Fourier montre que $L^2_0(G)$ se décompose en somme de représentations irréductibles non triviales.
Si $V \simeq V_\rho^*$ est l'une de ces composantes irréductibles, l'opérateur T_μ préserve V et agit sur V comme son coefficient de Fourier $\hat{\mu}(\rho)$.
Par suite, $\mathrm{Spec}\, T_\mu = \bigcup_{\rho \in \hat{G}} \mathrm{Spec}\, \hat{\mu}(\rho)$ donc $\mathrm{RS}(T_\mu) = \sup_{\rho \in \hat{G}} \mathrm{RS}(\hat{\mu}(\rho))$ et le résultat est clair. □

Exercice

Soit μ une mesure apériodique adaptée sur G. Montrer que si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Haar, alors μ admet un trou spectral.

Exercice

Soit $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *et* $\mu = \frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha})$, *avec* $\alpha \notin \mathbb{Q}$. *Montrer que* μ *n'admet pas de trou spectral.*

Fin du premier chapitre