Mesures invariantes

Une erreur à corriger dans l'exercice 2 des notes: si μ est symétrique et adaptée sur G, alors μ est apériodique. Il faut ajouter comme hypothèse que G est connexe. (Et si G n'est pas connexe?)

$\mathcal{B}(G)$ tribu des boréliens de G

Théorème 1. *G groupe compact. Il existe une unique application $m : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{R}^+$ telle que*

1. $m(G) = 1$;
2. $\forall (A_n)$ *disjoints* $m(\cup_n A_n) = \sum_n m(A_n)$
3. $\forall g \in G, \forall A$, $m(gA) = m(A)$

On se demande si l'on peut prolonger m à toutes les parties de G.

Exercice 1. Si G est infini, montrer qu'on ne peut pas prolonger m à $\mathcal{P}(G)$.

Solution. Soit Γ un sous-groupe dénombrable de G. Soit E un système de représentants des classes à gauche de G modulo Γ. On ne peut pas définir $m(E)$ et satisfaire les trois propriétés ci-dessus. En effet, $G = \sqcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma E$. Donc $1 = m(G) = \sum_{\gamma \in \Gamma} m(\gamma E) = \sum_{\gamma \in \Gamma} m(E)$, absurde.

Peut-on prolonger m à $\mathcal{P}(G)$ tout en vérifiant les propriétés suivantes?

1. $m(G) = 1$;
2. $\forall A, B$ disjoints $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$
3. $\forall g \in G, \forall A$, $m(gA) = m(A)$

On s'intéressera notamment à cette question pour $G = \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$, $d \geq 2$.

Théorème 2 (Hausdorff, Banach)**.** *$G = \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$. Si $d = 2$, on peut prolonger m à $\mathcal{P}(G)$.*

Si $d > 2$, on ne peut pas.

1 Paradoxe de Banach-Tarski

G un groupe quelconque

$B(G)$ l'espace des fonctions bornées à valeurs réelles sur G

Définition 3. Une *moyenne invariante* sur $B(G)$ est une forme linéaire $m' : B(G) \to \mathbb{R}$ telle que

(i) (positivité) $m'(f) \geq 0$ si $f \geq 0$;

(ii) (normalisation) $m'(1_G) = 1$.

(iii) (invariance) $\forall g \in G$, $\forall f \in B(G)$, $\quad m'(gf) = m'(f)$, où G agit sur $B(X)$ suivant l'action régulière, i.e. $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$.

Rappel $(gf)(x) = f(g^1 x)$.

Proposition 4. *Il existe une moyenne invariante sur $B(G)$ si et seulement si on peut prolonger la mesure de Haar à $\mathcal{P}(G)$, en gardant les trois propriétés énoncées ci-dessus.*

Proof. Si m' est une moyenne invariante, alors $m(A) = m'(1_A)$ prolonge la mesure de Haar. Réciproquement, si on peut prolonger m à $\mathcal{P}(G)$, cela permet de définir m' sur les fonctions indicatrices, puis, par linéarité, sur les fonctions en escalier, et enfin, par continuité, on étend m' à $B(G)$ tout entier. (Une moyenne est toujours continue pour $\|\cdot\|_\infty$.) $\square$

Définition 5 (Ensembles équidécomposables)**.** $A, B \subset G$.

$A \sim B$ s'il existe des partitions finies de A et B, $A = \cup_i A_i$, $B = \cup_i B_i$, et (g_i) des éléments de G tels que $\forall i$, $B_i = g_i A_i$.

Si A est équidécomposable à une partie de B, on note $A \lesssim B$.

Proposition 6. *Si $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$, alors $A \sim B$.*

Corollaire 7. *Sont équivalents:*

1. *Il existe $A, B \subset G$ disjoints tels que $A \sim G \sim B$.*

2. *Il existe une partition $G = A' \sqcup B'$ avec $A' \sim G \sim B'$.*

Proof. Il est clair que 2 implique 1. Réciproquement, si on a 1, on pose $A' = A$ et $B' = G \setminus A$. Comme $G \sim B \lesssim B' \lesssim G$, donc $G \sim B'$. $\square$

Définition 8 (Décomposition paradoxale)**.** Une partition $G = A' \sqcup B'$ avec $A' \sim G \sim B'$ est une *décomposition paradoxale* de G.

Exercice 2.

1. $F = \langle a, b \rangle$ groupe libre à deux générateurs, montrer que F admet une décomposition paradoxale.
2. Si G contient un sous-groupe libre à deux générateurs, montrer que G admet une décomposition paradoxale.
3. Si G admet une décomposition paradoxale, montrer qu'il n'existe pas de moyenne invariante sur $B(G)$.

Solution.

1. On note A^+ (resp. A^-) l'ensemble des mots réduits commençant par a (resp. a^{-1}). De même, on définit B^+ et B^-. $F = A^+ \cup A^- \cup B^+ \cup B^- \cup \{1\}$. Notons que $F = a^{-1}A^+ \cup A^- = b^{-1}B^+ \cup B^-$ sont des partitions de F. D'après le corollaire ci-dessus, F admet une décomposition paradoxale.
2. Soit F un sous-groupe libre de G, et $F = A \cup B$ une décomposition paradoxale. Soit (x_α) un système de représentants de G/F. Posons $G_A = \cup_\alpha A x_\alpha$, $G_B = \cup_\alpha B x_\alpha$. La partition $G = G_A \cup G_B$ est une décomposition paradoxale de G.
3. Notons que $A \sim B$, et m est une moyenne invariante, alors $m(A) = m(B)$. Supposons $G = A \sqcup B$, alors $1 = m(G) = m(A) + m(B)$, donc $m(A) \neq 1$ ou $m(B) \neq 1$, et A et B ne sont pas tous deux équidécomposables à G.

Théorème 9 (Caractérisation des groupes discrets moyennables)**.** *Soit G un groupe. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *(critère de Følner) $\forall \varepsilon > 0, \forall K \subset G$ fini, $\exists U \subset G$ fini tel que pour tout $x \in K$, $\frac{|U \Delta xU|}{|U|} \leq \varepsilon$. (On note Δ la différence symétrique.)*
2. *(moyennabilité) Il existe une moyenne invariante sur $B(G)$.*
3. *(critère de Tarski) Il n'existe pas de décomposition paradoxale de G.*
4. *(application doublante) $\forall K \subset G$ fini, il n'existe pas d'application $\psi : G \to G$ telle que $\forall g \in G$, $\psi(g)g^{-1} \in K$, et $|\psi^{-1}(g)| \geq 2$.*

Proof. 1 implique 2.

Soit $V = \mathrm{Vect}\{gf - f\ ;\ f \in B(G), g \in G\}$. Montrons que pour tout $h \in V$, $\sup_{g\in G} h(g) \geq 0$.

On écrit $h = \sum k_i f_i - f_i$. On note $K = \{k_i\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe U fini vérifiant la condition du 1.

$$\begin{aligned}
\inf h &\leq \frac{1}{|U|}\sum_{u\in U} h(u) \\
&= \frac{1}{|U|}\sum_i \sum_{u\in U} f_i(k_i^{-1}u) - f_i(u) \\
&\leq \frac{1}{|U|}\sum_i |k_i U \Delta U| \|f_i\|_\infty \\
&\leq |K|\varepsilon \max_i \|f_i\|_\infty
\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers zéro, on trouve bien $\inf h \leq 0$, et donc $\sup h = -\inf(-h) \geq 0$.

On définit donc m sur $W = V \oplus \mathbb{R}1_G$ par $m(h + \lambda 1_G) = \lambda$. Pour tout $f \in W$, $m(f) \leq \sup f$. Par le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger m à $B(G)$ de sorte pour tout f, $m(f) \leq \sup f$.

Si $f \geq 0, \sup -f \leq 0$, donc $m(f) = -m(-f) \geq -\sup -f \geq 0$. Naturellement, $m(1_G) = 1$. Et m est invariante par construction.

2. implique 3.

Déjà vu en exercice: si $G = A \sqcup B$, $1 = m(G) = m(A) + m(B)$ donc $m(A) \neq 1$ ou $m(B) \neq 1$ et A ou B n'est pas équidécomposable à G.

3. implique 4.

Par contraposée, si $\psi : G \to G$ est doublante et $\forall g, \psi(g)g^{-1} \in K$ fini. Pour chaque $g \in G$, on choisit a_g tel que $\psi(a_g) = g$, et on pose

$$A = \{a_g\} \quad \text{et} \quad B = G \setminus A.$$

Pour $k \in K$, posons

$$A_k = \{g \in A \mid \psi(g) = kg\} \quad \text{et} \quad B_k = \{g \in B \mid \psi(g) = kg\}$$

Alors $A = \sqcup_k A_k$ et $B = \sqcup_k B_k$. Mais $\psi : A \to G$ est surjective, et donc $G = \cup_k kA_k$. De même, $G = \cup_k kB_k$. Donc on a bien une décomposition paradoxale de G.

4. implique 1.

Il existe $\varepsilon > 0$, K fini tels que pour tout U fini non vide, $|KU \setminus U| \geq \varepsilon |U|$. On peut supposer que $1 \in K$ et $K^{-1} = K$. Et alors, quitte à remplacer K par un certain K^n, on peut supposer $|KU \setminus U| \geq 2|U|$.

On considère alors le graphe biparti $G \sqcup G$,

$$g \leftrightarrow h \text{ si et seulement si } \exists k \in K : g = kh.$$

Soient ϕ_1 et ϕ_2 les applications $G \to G$ données par le lemme des mariages. Soit $\psi : G \to G$ définie par

$$\psi(h) = g \text{ s'il existe } g \in G \text{ tel que } h = \phi_1(g) \textit{ ou } h = \phi_2(g)$$

$$\psi(h) = h \textit{ sinon.}$$

L'application ψ satisfait toutes les conditions requises. □

Exercice 3. Montrer que $G = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ admet une moyenne invariante.

Solution. On utilise le premier point du théorème. Soit $K \subset G$ une partie finie et $\varepsilon > 0$. Comme G est abélien, on peut majorer $|K^n| \leq n^{|K|}$ (croissance polynomiale). Par conséquent, pour n arbitrairement grand, $|K^{n+1}| \leq |1 + \varepsilon||K^n|$. En posant $U = K^n$, on obtient $|KU \setminus U| \leq \varepsilon |U|$.

Proposition 10. *Si $d \geq 3$, le groupe $G = \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ contient un sous-groupe libre à deux générateurs.*

Proof. cf. notes de cours. □

Remarque. Alternative de Tits: si Γ est un sous-groupe dense d'un groupe de Lie semi-simple, alors Γ contient un sous-groupe libre. (Cela s'applique en particulier à $\Gamma = G = \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$, $d \geq 3$.)

Corollaire 11 (Hausdorff)**.** *Pour $d \geq 3$, le groupe $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ n'admet pas de moyenne invariante sur $B(G)$. (Comme groupe discret.)*

Proof. Il suffit d'appliquer le fait qu'un groupe qui contient un sous-groupe libre à deux générateurs admet une décomposition paradoxale (point 3) du théorème. □

Lemme 12 (Lemme des mariages de Hall)**.** *Soit $A \sqcup B$ un graphe biparti de valence bornée.*

1. *On suppose que pour tout $X \subset A$, $|V(X)| \geq |X|$. Alors, il existe $\phi : A \to B$ injective telle que pour tout a, $a \leftrightarrow \phi(a)$.*

2. *On suppose que pour tout $X \subset A$, $|V(X)| \geq 2|X|$. Alors, il existe $\phi_1, \phi_2 : A \to B$ injectives telles que pour tout a, $a \leftrightarrow \phi_i(a)$, $i = 1, 2$, et $\forall a, a'$, $\phi_1(a) \neq \phi_2(a')$.*

Proof. Montrons le lemme dans le cas où A est fini (et donc B aussi). On procède par récurrence sur le cardinal de A. Si $|A| = 1$, le résultat est clair.

Supposons donc $|A| \geq 2$. On distingue deux cas.

Premier cas : Il existe $A' \subset A$ (strict) tel que $|V(A')| = |A'|$. Dans ce cas, il suffit de construire l'application ϕ sur A' (son image est exactement égale à $V(A')$) puis sur $A \setminus A'$. Cela est faisable par l'hypothèse de récurrence.

Deuxième cas: Pour tout $A' \subset A$ (strict) $|V(A')| \geq |A'| + 1$. On choisit $x \in A$ quelconque et $y \in B$ tel que $x \leftrightarrow y$, on pose $\phi(x) = y$. Le graphe $(A \setminus \{x\}) \sqcup (B \setminus \{y\})$ vérifie les hypothèses du lemme des mariages, donc par l'hypothèse de récurrence, il existe $\phi : (A \setminus \{x\}) \to B \setminus \{y\}$ qui satisfait les conditions requises.

Cela montre le résultat si A est fini. Si A est dénombrable, on écrit $A = \cup_n A_n$ comme réunion croissante de parties finies, $B_n = V(A_n)$, on applique le cas fini aux graphes $A_n \sqcup B_n$, et on construit une limite.

Le cas général en découle car comme la valence est bornée, la composante connexe d'un point est toujours dénombrable. Il suffit donc de construire l'application ϕ sur chaque composante connexe. $\square$

On a démontré en particulier que si G est non moyennable en tant que groupe discret, alors il existe une partition $G = A \sqcup B$ telle que $A \sim B \sim G$.

Théorème 13. *Soit G un groupe compact non moyennable en tant que groupe discret, et $U \subset G$ d'intérieur non vide, alors $G \sim U$.*

2 Problème de Ruziewicz

On peut prolonger la mesure de Haar m à la tribu complétée $\mathcal{L}(G)$:

$$\mathcal{L}(G) = \{A \in \mathcal{P}(G) \mid \exists X, Y \in \mathcal{B}(G) : X \subset A \subset Y \text{ et } m(Y \setminus X) = 0\}.$$

On se demande si m est l'unique application $\mathcal{L}(G) \to \mathbb{R}^+$ telle que

1. $m(G) = 1$;

2. $\forall A, B$ disjoints, $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$;

3. $\forall g, A,\ m(gA) = m(A)$.

Notons que l'unicité de la mesure Haar signifie qu'il y a unicité si l'on autorise les réunions disjointes dénombrables dans la condition 2.

Proposition 14. *Soit G compact moyennable comme groupe discret. Soit A un G_δ dense de G. Il existe une moyenne invariante λ sur $B(G)$ telle que $\lambda(A) = 1$. En particulier, s'il existe un G_δ dense A tel que $m(A) = 0$, la mesure de Haar n'est pas l'unique solution au problème posé. (C'est vrai si G est un groupe de Lie, est-ce vrai en général?)*

Proof. Reprendre la démonstration de 1 implique 2 dans la caractérisation des groupes moyennables, et montrer qu'on peut prolonger la forme linéaire sur $V \oplus \mathbb{R}1_G \oplus \mathbb{R}1_A$ définie par $\lambda(h + \alpha 1_G + \beta 1_A) = \alpha + \beta$. (Indication vérifier que pour tout $h \in V$, $\sup_{x \in A} h(x) \geq 0$. □

Proposition 15. *Si G est non moyennable en tant que groupe discret, et $\lambda : \mathcal{L}(G) \to \mathbb{R}^+$ une solution au problème posée, alors λ est absolument continue par rapport à m.*

Proof. Soit (U_n) une suite de voisinages de 1 dans G telle que le nombre de translatés disjoints de U_n dans G tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Cela implique notamment $\lim \lambda(U_n) = 0$. Soit A une partie telle que $m(A) = 0$. Comme $G \sim U_n$, on a $A \sim A_n \subset U_n$. A_n est mesurable car c'est une union finie de translatés de sous-parties de A, chacune mesurable car $m(A) = 0$. Donc on peut écrire $\lambda(A) = \lambda(A_n) \leq \lambda(U_n)$, et à la limite, $\lambda(A) = 0$. □

On note $L^\infty(G)$ l'espace des classes d'équivalence de fonctions bornées mesurables sur G pour la relation $f \sim g$ si l'ensemble $\{f - g \neq 0\}$ est de mesure nulle.

Définition 16. Une *moyenne invariante* sur $L^\infty(G)$ est une forme linéaire $\lambda : L^\infty(G) \to \mathbb{R}$ telle que

1. $\forall f \geq 0$, $\lambda(f) \geq 0$;

2. $\lambda(1_G) = 1$;

3. $\forall f, \forall g$, $\lambda(gf) = \lambda(f)$.

Lemme 17. *Les moyennes invariantes sur $L^\infty(G)$ correspondent aux applications $\lambda : \mathcal{L}(G) \to \mathbb{R}^+$ qui vérifient les conditions souhaitées.*

Proof. Si λ est une moyenne invariante sur $L^\infty(G)$, l'application définie sur $\mathcal{L}(G)$ par $A \mapsto \lambda(1_A)$ vérifie les conditions requises.

Réciproquement, si $\lambda : \mathcal{L}(G) \to \mathbb{R}^+$ vérifie les bonnes conditions, cela permet de définir la forme linéaire sur les fonctions indicatrices par $\lambda(1_A) = \lambda(A)$ (car $\lambda \gg m$), puis par linéarité et continuité, à $L^\infty(G)$ tout entier. □

En particulier, on cherche à savoir si m est unique comme moyenne invariante sur $L^\infty(G)$.

Théorème 18. *Soit G un groupe compact. S'il existe une probabilité μ à support fini dans G qui admet un trou spectral, alors m est unique comme moyenne invariante sur $L^\infty(G)$ (ou unique comme application $\mathcal{L}(G) \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions requises).*

On rappelle que si μ est une probabilité borélienne sur G, on définit l'opérateur de convolution associé $T_\mu : f \mapsto f * \mu$, où

$$(f * \mu)(x) = \int_G f(xg)\mu(\mathrm{d}g).$$

On dit que μ admet un *trou spectral* si la suite d'opérateurs (T_μ^n) converge vers 0 en norme dans $L^2_0(G)$. (On rappelle que si μ est apériodique et adaptée sur G compact, alors (T_μ^n) converge simplement vers 0 dans $L^2_0(G)$, et qu'il y a convergence en norme si et seulement si pour un certain n, $\|T_\mu^n\| < 1$.)

Idée de la démonstration

Si λ est une moyenne invariante, on a $T_\mu\lambda = \lambda$. On approche λ par des fonctions $f_i \to \lambda$, de sorte que $T_\mu f_i \simeq f_i$. Mais à cause du trou spectral, cela impliquera $f_i \to 1$, et donc $\lambda = 1 = m$.

Proof. Soit λ une moyenne invariante sur $L^\infty(G)$. Par densité faible-* de $L^1(G)$ dans son bi-dual, égal à $(L^\infty(G))' \ni \lambda$, il existe une suite généralisée $(f_i)_{i\in I}$ (en anglais "net") d'éléments de $L^1(G)$ telle que

$$\forall i,\ f_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_G f_i = 1$$

qui converge faiblement vers λ:

$$\forall \phi \in L^\infty(G), \quad \lim_i \int_G \phi(x) f_i(x) \mathrm{d}x = \lambda(\phi).$$

Mais pour $g \in G$, $\lambda = g\lambda$, donc (gf_i) converge faiblement vers λ i.e. $\lim gf_i - f_i = 0$ (au sens faible dans $L^1(G)$). Par le théorème de Hahn-Banach (à vérifier), l'adhérence d'une partie convexe est la même pour la topologie faible et pour la topologie forte (associée à la norme). Ayant fixé $\gamma \in G$, on peut donc remplacer chaque f_i par une combinaison convexe g_i des f_j, $j \geq i$, de sorte que $\lim \|\gamma g_i - g_i\|_1 = 0$. Comme μ est à support fini, on peut assurer que cette limite soit valable pour tout $\gamma \in \operatorname{Supp} \mu$.

Posons $h_i = \sqrt{g_i}$ de sorte que $h_i \in L^2(G)$, $h_i \geq 0$ et $\|h_i\|_2 = 1$. Pour tout $\gamma \in \operatorname{Supp} \mu$,

$$\begin{aligned}
\|\gamma h_i - h_i\|_2^2 &= \int_G ((\gamma h_i)(x) - h_i(x))^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \int_G |(\gamma h_i)(x) - h_i(x)|((\gamma h_i(x) + h_i(x)) \mathrm{d}x \\
&= \int_G |(\gamma h_i(x))^2 - h_i(x)^2| \mathrm{d}x \\
&= \|\gamma g_i - g_i\|_1 \to 0.
\end{aligned}$$

Comme T_μ est une moyenne de translations par $\gamma \in \operatorname{Supp} \mu$, cela implique $\lim_i \|T_\mu h_i - h_i\|_2 = 0$. Par la propriété du trou spectral de T_μ, on doit avoir $\lim \|hi - 1_G\|_2 = 0$. (En effet, si l'on écrit $h_i = a_i 1_G + h_i'$, alors $\|T_\mu h_i - h_i\|_2 = \|T_\mu h_i' - h_i'\|_2 \geq (1 - \|T_\mu\|)\|h_i'\|$. Quitte à remplacer μ par μ^{*n}, on peut supposer que $\|T_\mu\| < 1$ en restriction à $L_0^2(G)$. On a alors bien $\lim \|h_i'\|_2 = 0$.)

Ainsi, $\lim h_i = 1$ dans $L^2(G)$ donc $\lim g_i = 1$ dans $L^1(G)$ puisque $\|g_i - 1\|_2 \leq 2\|h_i - 1\|_1 \leq \|h_i - 1\|_2$ puis

$$\lambda = \lim g_i = 1.$$

En d'autres termes, $\lambda = m$. □

Remarque. Question ouverte: la mesure de Haar est-elle unique comme application $\mathcal{B}(G) \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois propriétés requises?

Exercice 4. Si $G = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ la mesure de Haar n'est pas unique comme moyenne invariante sur $L^\infty(G)$.

Solution. En effet, $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est abélien, donc moyennable en tant que groupe discret. D'après la proposition 14, il existe de nombreux prolongements de m à $\mathcal{L}(G)$ (et même à $\mathcal{P}(G)$ tout entier).

Théorème 19 (Margulis, Sullivan, Drinfeld)**.** *Pour tout $d \geq 3$, il existe une mesure à support fini dans $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ qui admet un trou spectral. En particulier, la mesure de Haar est unique comme moyenne invariante sur $L^\infty(G)$.*

3 La conjecture du trou spectral

Exercice 5. Soit G un groupe compact. On note $D(G) = \overline{\langle xyx^{-1}y^{-1} \ ; \ x, y \in G \rangle}$ Montrer que $D(G) = \cap_\phi \ker \phi$, où $\phi : G \to H$ est un morphisme de groupes topologiques avec H abélien.

Solution. Le groupe $D(G)$ est distingué et fermé, donc la projection $G \to G/D(G)$ est continue. De plus $G/D(G)$ est abélien, donc l'intersection $\cap_\phi \ker \phi$ est incluse dans $D(G)$. Réciproquement, si $\phi : G \to H$ avec H abélien. Soit $g \in D(G)$. On écrit, $g = \lim g_n$, avec $g_n = [x_1, y_1] \dots [x_k, y_k]$. On a toujours $\phi(g_n) = 1$ car H est abélien, et en passant à la limite (ϕ est continue), $\phi(g) = 1$.

Définition 20. On dira qu'un groupe compact G est parfait si $D(G)$ est d'indice fini dans G.

Proposition 21. *Soit G un groupe compact non parfait et μ une probabilité à support fini. La probabilité μ n'admet pas de trou spectral.*

Proof. En utilisant un morphisme surjectif $G \to H$ avec H abélien infini, on se ramène au cas où G est abélien. Et alors, on construit facilement une suite de fonction presque invariantes de norme 1 dans $L^2_0(G)$. (Utiliser une suite de Følner.) $\square$

Conjecture 22. *Toute probabilité adaptée apériodique sur un groupe compact parfait G admet un trou spectral.*

Le théorème qui nous intéressera dans les semaines à venir.

Théorème 23. *Soit G un groupe de Lie compact à centre fini et μ une probabilité adaptée apériodique sur G. On suppose que dans une certaine base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, tous les éléments $\mathrm{Ad}\, g$, $g \in \mathrm{Supp}$ sont des matrices à coefficients algébriques. Alors μ admet un trou spectral.*

Exercice 6. 1. Montrer que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

2. Construire une mesure adaptée apériodique sur $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ à support dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$.

3. Même question pour $\mathrm{SO}_d(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$.

Question: si $\lim f_n = 0$ pour la topologie faible dans L^1, construire la suite g_n de combinaisons convexes qui converge en norme vers 0.

Pour chaque n l'adhérence de $convexe(\{f_m \ ; \ m \geq n\})$ contient 0. Donc il existe une combinaison convexe $g_n = \sum_m t_m f_m$ (somme finie) avec $\sum t_m = 1$ telle que $\|g_n\| \leq \frac{1}{n}$. Alors, $\lim \|g_n\| = 0$.

Définition 24 (Groupe algébrique affine)**.** Un groupe algébrique est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{C})$ défini par des équations polynomiales.