Sous-espaces, angles et approximation diophantienne

Nicolas de Saxcé

March 3, 2025

Abstract

Suivant un programme suggéré par Schmidt, on étudie l'approximation diophantienne pour les sous-espaces de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Si A et B sont deux sous-espaces de dimensions respectives d et e, on interprète le j-ème angle entre A et B en termes de pinceaux dans la grassmannienne. Cela nous permet de majorer l'exposant diophantien presque sûr pour l'approximation diophantienne au j-ème angle d'un sous-espace A choisi aléatoirement suivant la mesure de Lebesgue sur la variété grassmannienne. On conjecture que la borne obtenue, qui généralise celle de Moshchevitin, est optimale.

Abstract

Following a suggestion of Schmidt, we study rational approximations to linear subspaces of the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. Given two subspaces A and B with $\dim A = d$ and $\dim B = e$, we interpret the j-th angle between A and B in terms of pencils in the Grassmann variety. Using this, we derive an upper bound for the almost sure Diophantine exponent with respect to the j-th angle of a subspace A chosen randomly with respect to the Lebesgue measure on the Grassmann variety. Our bound generalizes a result of Moshchevitin, and we conjecture that equality holds almost surely.

Introduction

Dans un article fondateur [4], Schmidt suggère le problème suivant :

Étant donné des entiers $0 < d < n$, $0 < e < n$ et un sous-espace vectoriel A de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, étudier les sous-espaces rationnels *B de dimension e qui sont proches de A.*

Il s'agit de comparer la *hauteur* du sous-espace rationnel B, définie comme le covolume du réseau $B \cap \mathbb{Z}^n$ dans B,

$$H(B) = \mathrm{vol}\,(B/B \cap \mathbb{Z}^n)\,,$$

à la distance de B à A. Notons que l'on peut encore interpréter ce problème de différentes façons. Supposons par exemple $n = 4$ et $d = e = 2$. Les sous-espaces A et B de dimension 2 dans $\mathbb{R}^4$ peuvent se voir comme des droites dans l'espace projectif $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. À partir de la distance usuelle $d(\cdot,\cdot)$ sur l'espace projectif, il existe alors au moins deux distances naturelles entre A et B :

- la distance minimale $\psi_1(A,B) = \min_{a\in A,\ b\in B} d(a,b)$;
- la distance de Hausdorff $\psi_2(A,B) = \max_{a\in A} d(a,B)$.

En général, pour prendre en compte toutes les possibilités, Schmidt observe que la position de B par rapport à A est entièrement déterminée par une famille d'angles $\phi_j(A,B)$, $j = 1,\dots,\min(d,e)$, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et propose par conséquent d'étudier l'approximation diophantienne pour chacun de ces angles. La définition des angles $\phi_j(A,B)$ est rappelée à la partie 1. Ci-dessous, on utilise aussi la distance ψ_j associée à l'angle ϕ_j, simplement définie par $\psi_j(A,B) = \sin\phi_j(A,B)$.

Dans toute la suite, on note $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$ la variété grassmannienne des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, et $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{Q})$ l'ensemble de ses points rationnels, i.e. des sous-espaces de dimension d qui admettent une base constituée de vecteurs à coordonnées rationnelles. Si A est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, on définit son *exposant diophantien* pour l'approximation au j-ème angle par des sous-espaces rationnels de dimension e par

$$\beta_{j,e,d,n}(A) = \inf\left\{\beta > 0 \;\middle|\; \exists c > 0 : \forall B \in \mathrm{Gr}_{e,n}(\mathbb{Q}),\ \psi_j(A,B) \geq cH(B)^{-\beta}\right\}.$$

Dans cet article, on s'intéresse à l'exposant diophantien d'un sous-espace A choisi aléatoirement suivant la mesure de Lebesgue. Dans le cas particulier où $n = 2d = 2e$ et $j = 1$, Moshchevitin [3, Satz 2] a démontré un analogue de la partie « convergente » du théorème de Khintchine, dont on déduit facilement une borne supérieure sur l'exposant diophantien de presque tout sous-espace A. Notre résultat principal est une généralisation du théorème de Moshchevitin, valable pour tout choix d'entiers n, d, e et j.

Théorème 1. *Soient des entiers $1 \leq d, e \leq n$ et j tel que $\max(0, d+e-n) \leq j \leq \min(d,e)$. Si $\psi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante telle que*

$$\int_1^{+\infty} u^{n-1}\psi(u)^{j(n-d-e+j)}\,du < +\infty,$$

alors pour presque tout A dans $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$, l'inégalité

$$\psi_j(A,B) \leq \psi(H(B))$$

n'a qu'un nombre fini de solutions $B \in \mathrm{Gr}_{e,n}(\mathbb{Q})$.

Remarque. Dans le théorème de Moshchevitin [3], l'hypothèse de convergence sur la fonction ψ est plutôt $\sum_{q\geq 1} q^{n/2-1}\psi(\sqrt{q}) < +\infty$. Comme la hauteur d'un sous-espace rationnel est toujours de la forme $H(B) = \sqrt{q}$ pour un certain $q \in \mathbb{N}^*$, cette condition est sans doute plus naturelle. Cependant, lorsque ψ est décroissante, on vérifie facilement à l'aide d'une comparaison série-intégrale et du changement de variable $u = \sqrt{q}$ que ces deux conditions sont équivalentes. On renvoie à la conclusion pour une discussion plus détaillée de l'hypothèse de monotonie sur ψ.

Comme premier corollaire de ce théorème, on obtient un majorant naturel pour l'exposant diophantien d'un sous-espace choisi aléatoirement suivant la mesure de Lebesgue.

Corollaire 2 (Majoration de l'exposant presque sûr)**.** *Pour presque tout A dans $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$, pour tout* $\max(0, d+e-n) \leq j \leq \min(d, e)$,

$$\beta_{j,e,d,n}(A) \leq \frac{n}{j(n-d-e+j)}.$$

On peut s'attendre à ce qu'une égalité soit en fait valable presque sûrement. Notons cependant qu'en général, l'inégalité n'est pas valable pour tout A dans $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$, comme l'a démontré Élio Joseph [2] dans le cas $n = 4$, $d = e = 2$ et $j = 1$. Nous discutons ces problèmes un peu plus en détail à la fin de l'article.

Le plan de l'article est le suivant. Dans une première partie, on rappelle la définition et les propriétés élémentaires des angles successifs entre deux sous-espaces vectoriels. Les liens avec la notion de *pinceau* dans la variété grassmannienne sont établis dans la seconde partie. La démonstration à proprement parler du théorème 1 est exposée à la partie 3.

1 Angles entre sous-espaces vectoriels

Si $\mathbb{R}^n$ est muni de la structure euclidienne standard, l'*angle* $\sphericalangle(A, B)$ entre deux droites vectorielles A et B est par définition l'unique élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que si u_A et u_B sont deux vecteurs unitaires sur A et B, respectivement, alors

$$|(u_A, u_B)| = \cos \sphericalangle(A, B),$$

et la *distance* entre A et B est

$$d(A, B) = \sin \sphericalangle(A, B).$$

Plus généralement, la position relative de deux sous-espaces vectoriels A et B de dimensions respectives d et e est décrite par la famille des *angles successifs*, définis de la façon suivante. On choisit d'abord deux droites $A_1 \in A$ et $B_1 \in B$ telles que

$$d(A_1, B_1) = \min\{d(U, V) \ ; \ U \subset A, \, V \subset B, \, \dim U = \dim V = 1\}.$$

Le premier angle entre A et B est

$$\varphi_1(A, B) = \sphericalangle(A_1, B_1).$$

Le second angle est défini de manière semblable, à partir des sous-espaces $A \cap A_1^\perp$ et $B \cap A_1^\perp$: on choisit deux droites $A_2 \in A \cap A_1^\perp$ et $B_2 \in B \cap B_1^\perp$ telles que $d(A_2, B_2)$ soit minimal et on pose

$$\varphi_2(A, B) = \sphericalangle(A_2, B_2).$$

Si $f = \min(d, e)$, on construit ainsi deux familles de droites orthogonales $(A_j)_{1 \leq j \leq f}$ dans A et $(B_j)_{1 \leq j \leq f}$ dans B telles que pour chaque j,

$$d(A_j, B_j) = \min \left\{ d(U, V) \ ; \ \begin{array}{l} U \subset A \cap (\oplus_{i<j} A_i)^\perp \ \text{ et } V \subset B \cap (\oplus_{i<j} B_i)^\perp \\ \dim U = \dim V = 1 \end{array} \right\},$$

et les angles successifs entre A et B sont les quantités

$$\varphi_j(A,B) = \sphericalangle(A_j, B_j), \qquad j = 1, \dots, f.$$

Suivant Schmidt [4], nous noterons aussi

$$\psi_j(A,B) = \sin \varphi_j(A,B).$$

Remarque. Les droites A_j et B_j ne sont pas toujours uniquement définies, mais la suite des angles $(\psi_j(A,B))_{1 \le j \le f}$ l'est, et ne dépend donc pas des choix faits pour construire les familles $(A_j)_{1\le j\le f}$ et $(B_j)_{1\le j\le f}$. Cela peut se voir comme une conséquence de la proposition 4 ci-dessous, qui donne une autre interprétation des angles successifs entre A et B. Schmidt [4, Theorem 4] en donne une démonstration un peu différente.

Commençons par un lemme élémentaire qui montre que l'on passe simplement de la famille (A_j) à (B_j) par projection orthogonale sur B, et vice-versa.

Lemme 3. *Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimensions respectives d et e. On note p_A et p_B les projections orthogonales sur A et B, respectivement. Avec les notations ci-dessus, on a, pour tout $j = 1, \dots, \min(d,e)$ tel que $\psi_j(A,B) < 1$,*

$$B_j = p_B(A_j) \quad \text{et} \quad A_j = p_A(B_j).$$

En particulier, avec $f = \min(d,e)$,

$$\begin{aligned}\psi_f(A,B) &= \max\{d(u,B)\ ;\ u \in A,\ \|u\| = 1\} \\ &= \max\{d(v,A)\ ;\ v \in B,\ \|v\| = 1\}.\end{aligned}$$

Démonstration. Montrons par récurrence sur j que si $\psi_{j-1}(A,B) < 1$, alors

$$A \cap (\oplus_{i<j} A_i)^\perp = A \cap (\oplus_{i<j} B_i)^\perp.$$

Pour $j = 1$, il n'y a rien à démontrer, supposons donc le résultat connu pour $j \ge 1$ et tel que $\psi_j(A,B) < 1$. Par définition, les droites A_j et B_j sont choisies dans $A \cap (\oplus_{i<j} A_i)^\perp$ et $B \cap (\oplus_{i<j} B_i)^\perp$ de sorte que la distance $d(A_j, B_j)$ soit minimale. Par hypothèse de récurrence, $A \cap (\oplus_{i<j} A_i)^\perp = A \cap (\oplus_{i<j} B_i)^\perp$, et par conséquent, A_j doit être la projection orthogonale de B_j sur $A \cap (\oplus_{i<j} B_i)^\perp$, et donc

$$\begin{aligned}A_j &\subset B_j + \left(A \cap (\oplus_{i<j} B_i)^\perp\right)^\perp \\ &\subset A^\perp + \oplus_{i\le j} B_i.\end{aligned}$$

En passant à l'orthogonal, on trouve

$$A \cap (\oplus_{i\le j} B_i)^\perp \subset A_j^\perp$$

et avec l'hypothèse de récurrence,

$$A \cap (\oplus_{i\le j} B_i)^\perp \subset A \cap (\oplus_{i\le j} A_i)^\perp.$$

Comme la dimension du sous-espace de gauche est minorée par celle du sous-espace de droite, les deux membres de cette inclusion doivent être égaux, ce qui achève la récurrence. Par construction, $A_j \subset A \cap (\oplus_{i<j} A_i)^\perp$ et $B_j = p_{B\cap(\oplus_{i<j} B_i)^\perp}(A_j)$. L'espace $(\oplus_{i<j} B_j)^\perp$ est stable par la projection p_B, donc l'égalité $A \cap (\oplus_{i<j} A_i)^\perp = A \cap (\oplus_{i<j} B_i)^\perp$ implique que $B_j = p_B(A_j)$. Par symétrie, on a aussi $A_j = p_A(B_j)$.

Notons $f = \min(d, e)$, et fixons une base orthonormée $(u_j)_{1\le j\le d}$ telle que $A_j = \mathbb{R}u_j$ pour tout $j = 1, \dots, f$, et une base orthonormée $(v_j)_{1\le j\le e}$ telle que $B_j = \mathbb{R}v_j$ pour $j = 1, \dots, f$. Ce qui précède montre que pour $j \le f$, il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tel que $p_{B^\perp}(u_j) = u_j - \lambda_j v_j$. Par conséquent, si $i < j$,

$$\langle p_{B^\perp}(u_i), p_{B^\perp}(u_j)\rangle = \langle u_i, p_{B^\perp}(u_j)\rangle = \langle u_i, u_j - \lambda v_j\rangle = 0.$$

Par ailleurs, pour $j > f$, on a toujours

$$u_j \in A \cap (\oplus_{i=1}^f A_i)^\perp = A \cap (\oplus_{i=1}^f B_i)^\perp \subset B^\perp$$

donc $p_{B^\perp}(u_j) = u_j$. Cela montre que la famille de vecteurs $\{p_{B^\perp}(u_j)\ ;\ 1 \le j \le d\}$, est orthogonale. Si $u \in A$ est unitaire, on décompose

$$u = \sum_j a_j u_j \quad \text{avec} \sum a_j^2 = 1$$

et donc

$$d(u, B)^2 = \|p_{B^\perp}(u)\|^2 = \sum_{j=1}^d a_j^2 \cdot \|p_{B^\perp}(u_j)\|^2 = \sum_{j=1}^f a_j^2 \cdot \|p_{B^\perp}(u_j)\|^2.$$

En particulier, $d(u, B) \le \max_{j=1,\dots,f} \|p_{B^\perp}(u_j)\|$, ce qui se réécrit

$$d(u, B) \le \max_{1\le j\le f} d(u_j, B) = \sin\varphi_f(A, B) = \psi_f(A, B).$$

Comme l'égalité est atteinte si $u = u_f$, cela montre ce qu'on veut. □

Définition (Distance entre deux sous-espaces)**.** Étant donné deux sous-espaces A et B dans $\mathbb{R}^n$, de dimensions respectives d et e, on définit la *distance* de A à B par la formule

$$d(A, B) = \psi_f(A, B) \qquad \text{où} \quad f = \min(d, e).$$

Notons que d n'est pas une distance à proprement parler, puisque $d(A, B) = 0$ n'implique pas $A = B$, mais seulement $A \subset B$ ou $B \subset A$. Néanmoins, si l'on se restreint aux sous-espaces de dimension d fixée, on vérifie facilement l'inégalité triangulaire à l'aide du lemme 3, ce qui montre que d induit une distance au sens usuel du terme sur la variété grassmannienne $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$ des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ de dimension d. Ces observations permettent d'interpréter les angles successifs entre A et B en termes de distance dans la variété grassmannienne.

Proposition 4 (j-ème angle et sous-espaces de dimension j)**.** *Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimensions respectives d et e. Pour tout $j = 1, \dots, \min(d, e)$,*

$$\psi_j(A, B) = \min\left\{ d(U, V)\ ;\ \begin{array}{c} U \subset A,\ V \subset B, \\ \dim U = \dim V = j \end{array} \right\}.$$

Démonstration. Pour $j = 1, \dots, \min(d, e)$, posons

$$U_j = \mathrm{Vect}(A_1, \dots, A_j) \quad \text{et} \quad V_j = \mathrm{Vect}(B_1, \dots, B_j).$$

Si U est un sous-espace de A de dimension $j \leq \min(d, e)$, alors l'intersection $A \cap U_{j-1}^{\perp} \cap U$ est non triviale, et toute droite D dans cette intersection vérifie $d(D, B) \geq \sin \varphi_j(A, B)$. Fixons une telle droite D. Alors, pour tout sous-espace $V \subset B$ de dimension j,

$$d(U, V) \geq d(U, B) \geq d(D, B) \geq \psi_j(A, B).$$

Comme l'égalité est atteinte pour $U = U_j$ et $V = V_j$, cela montre la proposition. □

Le théorème suivant, pour lequel on renvoie à Schmidt [4, Theorem 5] montre que les angles successifs caractérisent entièrement la position relative de A par rapport à B.

Théorème 5. *Fixons des entiers $1 \leq d, e \leq n$ et notons $g = \max(0, d + e - n)$ et $f = \min(d, e)$. Pour toute famille croissante de paramètres $0 \leq \psi_{g+1} \leq \cdots \leq \psi_f \leq 1$, il existe à isométrie près une unique paire (A, B) de sous-espaces de dimensions respectives d et e telle que*

$$\psi_j(A, B) = \psi_j \quad \textit{pour tout } j = g + 1, \dots, f.$$

Remarque. Notons que si $d + e > n$, alors $\psi_j(A, B) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, d + e - n$. Cela montre qu'en général, le nombre de paramètres nécessaires pour décrire la position relative de A et B est égal à $f - g = \min(d, e, n - d, n - e)$.

2 Pinceaux dans la grassmannienne

Rappelons qu'étant donné deux entiers $n \geq e \geq 1$, on note $\mathrm{Gr}_{e,n}(\mathbb{R})$ la variété grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension e dans $\mathbb{R}^n$. Les contraintes géométriques qui apparaissent naturellement dans l'approximation diophantienne des sous-espaces vectoriels sont les *pinceaux*, dont on rappelle la définition ci-dessous.

Définition (Pinceau)**.** Étant donné B dans $\mathrm{Gr}_{e,n}(\mathbb{R})$ et $j \in \mathbb{Z}$, on note

$$\mathcal{P}_{B,j} = \{A \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R}) \mid \dim A \cap B \geq j\}.$$

Remarque. Si $j \leq d + e - n$, on a toujours $\mathcal{P}_{B,j} = \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$, tandis que si $j > \min(d, e)$, alors $\mathcal{P}_{B,j} = \varnothing$. Le pinceau $\mathcal{P}_{B,j}$ est donc une sous-variété stricte non vide si et seulement si $\max(0, d + e - n) < j \leq \min(d, e)$.

Le lemme suivant relie les angles successifs entre deux sous-espaces A et B aux distances dans $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$ de A aux différents pinceaux définis à partir de B. (Naturellement, un énoncé analogue est valable en échangeant A et B.) Ci-dessous, si F est un fermé quelconque de $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$, et $A \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$, on note $d(A, F)$ la distance de A au fermé F, où la distance sur $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$ est celle définie au paragraphe précédent.

Proposition 6 (Angles et pinceaux)**.** *Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimensions respectives d et e. Pour tout $j = 1, \dots, \min(d, e)$,*

$$\psi_j(A, B) = d(A, \mathcal{P}_{B,j}).$$

Démonstration. Si $A' \in \mathcal{P}_{B,j}$, il existe un sous-espace $V \subset A' \cap B$ tel que $\dim V = j$. D'après la proposition 4, on a

$$d(A, A') \geq d(A, V) \geq \psi_j(A, B)$$

et donc $d(A, \mathcal{P}_{B,j}) \geq \psi_j(A, B)$.

Réciproquement, la proposition 4 montre aussi qu'il existe deux sous-espaces $U \subset A$ et $V \subset B$ de dimension j tels que $d(U, V) = \psi_j(A, B)$. Écrivons $A = U \oplus U'$, et posons $A' = V \oplus U'$. Alors, $A' \in \mathcal{P}_{B,j}$ et $d(A, A') \leq d(U, V) = \psi_j(A, B)$, donc

$$d(A, \mathcal{P}_{B,j}) \leq \psi_j(A, B).$$

□

La proposition ci-dessus permet de retrouver un résultat de Schmidt [4, Theorem 6], qui exprime les angles successifs entre $A^\perp$ et $B^\perp$ en fonction des angles entre A et B.

Corollaire 7 (Angles successifs des supplémentaires orthogonaux)**.** *Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimensions respectives d et e. Pour tout $j = \max(0, d + e - n) \dots \min(d, e)$,*

$$\psi_j(A, B) = \psi_{n-d-e+j}(A^\perp, B^\perp).$$

Démonstration. D'après le lemme 3, si A et A' sont deux éléments de $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$, leur distance est donnée par

$$d(A, A') = \max\{d(u, A')\ ;\ u \in A,\ \|u\| = 1\}.$$

Or, $d(u, A') = \max\{\langle u, v'\rangle\ ; v' \in (A')^\perp,\ \|v'\| = 1\}$, et donc

$$d(A, A') = \max\{\langle u, v'\rangle\ ;\ u \in A,\ v' \in (A')^\perp,\ \|u\| = \|v'\| = 1\}.$$

Par symétrie de la distance (ici, A et A' sont de même dimension), on a aussi

$$\begin{aligned} d(A, A') &= \max\{\langle v, u'\rangle\ ;\ v \in A^\perp,\ u' \in A',\ \|u'\| = \|v\| = 1\} \\ &= d(A^\perp, (A')^\perp). \end{aligned}$$

Cela montre déjà le corollaire pour l'angle maximal, correpondant à $j = \min(d, e)$.

Pour le cas général, on utilise la proposition 6. Supposons $\psi_j(A, B) \leq \rho$. Alors, il existe A' dans $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$ tel que $d(A, A') \leq \rho$ et $A' \in \mathcal{P}_{B,j}$, i.e. $\dim A' \cap B \geq j$. De façon équivalente,

$$\dim A' + B = d + e - \dim A' \cap B \leq d + e - j$$

et, passant à l'orthogonal,

$$\dim(A')^\perp \cap B^\perp \geq n - d - e + j$$

i.e.

$$(A')^\perp \in \mathcal{P}_{B^\perp, n-d-e+j}.$$

Comme $d(A^\perp, (A')^\perp) = d(A, A') \leq \rho$, cela implique $d(A^\perp, \mathcal{P}_{B^\perp, n-d-e+j}) \leq \rho$ et donc

$$\psi_{n-d-e+j}(A^\perp, B^\perp) \leq \rho.$$

Ainsi, $\psi_{n-d-e+j}(A^\perp, B^\perp) \leq \psi_j(A, B)$, et en appliquant cette inégalité à $A^\perp$ et $B^\perp$, on obtient l'égalité souhaitée. □

Remarque. Comme les sous-espaces A et B sont entièrement déterminés par leurs supplémentaires orthogonaux, on peut toujours se ramener au cas $d+e \leq n$, quitte à remplacer A par $A^\perp$ et B par $B^\perp$.

Nous concluons cette partie par le calcul de la dimension d'un pinceau, qui nous sera utile pour évaluer la mesure de Lebesgue d'un petit voisinage d'un pinceau.

Proposition 8 (Dimension d'un pinceau)**.** *Les entiers n, d, e et j étant fixés, les sous-variétés $\mathcal{P}_{B,j}$ dans $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$ sont toutes isométriques. De plus, si $d, e \in \{1, \ldots, n\}$ et $\max(0, d+e-n) \leq j \leq \min(d, e)$ alors*

$$\dim \mathcal{P}_{B,j} = j(e-j) + (d-j)(n-d).$$

Comme $\dim \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R}) = d(n-d)$, cette égalité se réécrit

$$\operatorname{codim} \mathcal{P}_{B,j} = j(n-d-e+j).$$

Démonstration. La première partie de l'énoncé découle de ce que le groupe d'isométries $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathrm{Gr}_{e,n}(\mathbb{R})$. Pour le calcul de la dimension, on peut donc supposer $B = \mathbb{R}^e$. La condition $\max(0, d+e-n) \leq j \leq \min(d, e)$ implique que l'ensemble

$$\mathcal{P}'_{B,j} = \{A \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R}) \mid \dim A \cap B \ = j\}$$

est un ouvert dense dans $\mathcal{P}_{B,j}$, et donc

$$\dim \mathcal{P}'_{B,j} = \dim \mathcal{P}_{B,j}.$$

L'application

$$F\colon \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}'_{B,j} & \to & \mathrm{Gr}_{j,e}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A \cap B \end{array}$$

est une fibration de $\mathcal{P}'_{B,j}$ au-dessus de $\mathrm{Gr}_{j,e}(\mathbb{R})$, et la fibre $F^{-1}(U)$ au-dessus d'un sous-espace $U \subset \mathbb{R}^e$ de dimension j est égale à l'ensemble des sous-espaces A de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ tels que $A \cap \mathbb{R}^e = U$. L'application $A \mapsto A/U$ permet d'identifier $F^{-1}(U)$ à l'ensemble des sous-espaces de $\mathbb{R}^{n-j}$ de dimension $d-j$ qui sont en somme directe avec $\mathbb{R}^{e-j}$. Comme $j \geq d+e-n$, cet ensemble est un ouvert dense dans $\mathrm{Gr}_{d-j,n-j}(\mathbb{R})$, et donc $\dim F^{-1}(U) = (d-j)(n-d)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{P}_{B,j} &= \dim \mathrm{Gr}_{j,e}(\mathbb{R}) + \dim F^{-1}(U) \\ &= j(e-j) + (d-j)(n-d). \end{aligned}$$

□

3 Le cas convergent du théorème de Khintchine

Avec le lemme de Borel-Cantelli, les observations des deux paragraphes précédents permettent de démontrer facilement le théorème 1 énoncé dans l'introduction.

Démonstration du théorème 1. Dans cette démonstration, pour toute partie Y dans $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$ et tout $\delta > 0$, on note $Y^{(\delta)}$ le δ-voisinage de Y, i.e.

$$Y^{(\delta)} = \{x \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R}) \mid d(x, Y) \leq \delta\}.$$

D'après la proposition 6, pour tout B dans $\mathrm{Gr}_{e,n}(\mathbb{R})$,

$$\{A \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R}) \mid \psi_j(A, B) \leq \delta\} = \mathcal{P}_{B,j}^{(\delta)}$$

et donc, avec la proposition 8, à certaines constantes multiplicatives près ne dépendant que de n,

$$|\{A \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R}) \mid \psi_j(A, B) \leq \delta\}| \asymp \delta^{j(n-d-e+j)}.$$

D'après Schmidt [4, Theorem 3], pour tout $k \geq 0$, le nombre de sous-espaces rationnels $B \in \mathrm{Gr}_{e,n}(\mathbb{Q})$ tels que $2^k \leq H(B) < 2^{k+1}$ est majoré par $\lesssim 2^{kn}$, et donc

$$\sum_{B\,:\, 2^k \leq H(B) < 2^{k+1}} |\{A \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R}) \mid \psi_j(A, B) \leq \psi(H(B))\}| \lesssim 2^{kn} \psi(2^k)^{j(n-d-e+j)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_B |\{A \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R}) \mid \psi_j(A, B) \leq \psi(H(B))\}| &\lesssim \sum_{k \geq 0} 2^{kn} \psi(2^k)^{j(n-d-e+j)} \\ &\lesssim \sum_q q^{n-1} \psi(q)^{j(n-d-e+j)} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure. □

Rappelons que l'*exposant diophantien* d'un sous-espace A de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ pour l'approximation au j-ème angle par des sous-espaces rationnels de dimension e est défini par

$$\beta_{j,e,d,n}(A) = \inf \left\{ \beta > 0 \;\middle|\; \exists c > 0 : \forall B \in \mathrm{Gr}_{e,n}(\mathbb{Q}),\ \psi_j(A, B) \geq c H(B)^{-\beta} \right\}.$$

Le théorème ci-dessus donne déjà une majoration de l'exposant diophantien d'un sous-espace A choisi aléatoirement dans $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$ suivant la mesure de Lebesgue.

Corollaire 9 (Majoration de l'exposant presque sûr)**.** *Pour presque tout A dans $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$, pour tout $j \leq \min(d, e)$,*

$$\beta_{j,e,d,n}(A) \leq \frac{n}{j(n-d-e+j)}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème ci-dessus à la fonction $\psi(q) = q^{-\frac{n}{j(n-d-e+j)} - \varepsilon}$, qui satisfait la condition de convergence pour tout $\varepsilon > 0$. □

Conclusion

En guise de conclusion, nous faisons le point sur certaines questions suggérées par Schmidt dans son article fondateur [4], à la lumière du résultat élémentaire présenté ci-dessus et des autres progrès récents du domaine.

L'hypothèse de monotonie. On peut reprendre le calcul fait à la fin de la démonstration du théorème 1 sans l'hypothèse que ψ est décroissante. Remarquons tout d'abord que la hauteur d'un sous-espace rationnel B est toujours de la forme $H(B) = \sqrt{q}$, pour $q \in \mathbb{N}^*$. En effet, si le sous-réseau $B \cap \mathbb{Z}^d$ a pour base $(v_1, \ldots, v_e)$, et si la puissance extérieure $\wedge^e \mathbb{R}^n$ est munie de la structure euclidienne usuelle, alors

$$H(B) = \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_e\|.$$

Posons donc

$$N_{d,n}(q) = \mathrm{card}\{B \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{Q}) \mid H(B) = \sqrt{q}\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\sum_B |\{A \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R}) \mid \psi_j(A,B) \leq \psi(H(B))\}| \\ &= \sum_{q \geq 1} N_{d,n}(q) \cdot |\{A \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R}) \mid \psi_j(A,B) \leq \psi(\sqrt{q})\}| \\ &\asymp \sum_{q\geq 1} N_{d,n}(q) \cdot \psi(\sqrt{q})^{j(n-d-e+j)}.\end{aligned}$$

Cela montre que le théorème 1 est encore valable sans autre hypothèse sur ψ que la convergence de la somme

$$\sum_{q\geq 1} N_{d,n}(q) \cdot \psi(\sqrt{q})^{j(n-d-e+j)} < +\infty.$$

Valeur presque sûre. On peut conjecturer que l'égalité $\beta_{j,e,d,n}(A) = \frac{n}{j(n-d-e+j)}$ est vérifiée pour presque tout A dans $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$. Plus généralement, il est possible que pour toute fonction $\psi \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ décroissante telle que

$$\int_1^{+\infty} u^{n-1} \psi(u)^{j(n-d-e+j)}\, du = +\infty,$$

l'inégalité $\psi_j(A,B) \leq \psi(H(B))$ ait une infinité de solutions $B \in \mathrm{Gr}_{e,n}(\mathbb{Q})$ pour presque tout A dans $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$. Dans le cas particulier $j = \min(d,e)$, ces résultats ont été démontrés dans [1, théorème 3] à l'aide des méthodes de la dynamique homogène.

Valeur minimale. Dans le cas particulier où $j = \min(d,e)$, nous avons montré dans [1, théorème 1] que l'exposant diophantien de tout point est toujours au moins égal à sa valeur presque sûre :

$$\forall A \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R}), \quad \beta_{\min(d,e),e,d,n}(A) \geq \tfrac{n}{\min(d,e)(n-\max(d,e))}.$$

Cependant, Joseph [2] a construit des sous-espaces A de dimension 2 dans $\mathbb{R}^4$ tels que $\beta_{1,2,2,4}(A) = 3$, et avec les résultats de Schmidt [4], cela montre que dans le cas particulier $n = 4$, $d = e = 2$ et $j = 1$,

$$\inf_{A \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})} \beta_{1,2,2,4}(A) = 3 < 4 = \frac{n}{j(n-d-e+j)}.$$

Il serait intéressant en général de calculer la borne inférieure

$$\underline{\beta}_{j,e,d,n} := \inf_{A \in \mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})} \beta_{j,e,d,n}(A),$$

ou au moins de déterminer à quelle condition sur n, d, e et j cette borne inférieure coïncide avec la valeur presque sûre de l'exposant. En dehors du cas particulier où $(j,e,d,n) = (1,2,2,4)$ discuté ci-dessus, la majoration de l'exposant presque sûr obtenue dans cet article améliore strictement les bornes de Schmidt [4] et Joseph [2] :

$$\underline{\beta}_{j,e,d,n} \leq \frac{n}{j(n-d-e+j)}.$$

Grâce à l'exemple de Joseph [2], on sait que l'égalité n'est pas toujours valable. À notre connaissance, les meilleures bornes inférieures connues sont en général

$$\underline{\beta}_{j,e,d,n} \geq \frac{d(n-j)}{j(n-d)(n-e)}$$

et lorsque $j = 1$,

$$\underline{\beta}_{j,e,d,n} \geq \frac{n(n-1)}{(n-d)(n-e)}.$$

Remarquons que les bornes supérieures et inférieures sur $\underline{\beta}_{j,e,d,n}$ ne coïncident jamais, et que pour $n = 4$ et $d = e = 2$, l'exposant minimal est égal au membre de gauche [2].

Invariance de l'exposant. Le corollaire 7, avec l'égalité $H(B) = H(B^\perp)$ pour tout B dans $\mathrm{Gr}_{e,n}(\mathbb{Q})$, montre qu'on a toujours

$$\beta_{j,e,d,n}(A) = \beta_{n-d-e+j,n-e,n-d,n}(A^\perp).$$

Par conséquent, la valeur minimale $\underline{\beta}_{j,e,d,n}$ doit être invariante par l'involution $(j,e,d,n) \mapsto (n-d-e+j, n-e, n-d, n)$, tout comme la valeur presque sûre de $\beta_{j,e,d,n}(A)$, si elle existe. Schmidt suggère que $\underline{\beta}_{j,e,d,n}$ pourrait aussi être invariante par l'involution $(j,e,d,n) \mapsto (j,d,e,n)$, mais cela semble plus difficile à démontrer. Notons que la borne supérieure obtenue dans le présent article est bien invariante par ces deux transformations.

Remerciements. Nous remercions Nikolay Moshchevitin pour son encouragement à rédiger cette note, ainsi que le relecteur anonyme pour ses commentaires, qui ont notamment permis de clarifier le rôle joué par l'hypothèse de monotonie sur ψ dans la démonstration.

Références

[1] N. de Saxcé. Approximations rationnelles des sous-espaces vectoriels. *manuscrit disponible à l'adresse* ***https://www.math.univ-paris13.fr/~desaxce/***.

[2] E. Joseph. On the approximation exponents for subspaces of $\mathbb{R}^n$. *Mosc. J. Comb. Number Theory*, 11(1) :21-35, 2022.

[3] N. Moshchevitin. Über die Winkel zwischen Unterräumen. *Colloq. Math.*, 162(1) :143-157, 2020.

[4] W. M. Schmidt. On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations. *Ann. Math. (2)*, 85 :430-472, 1967.