Variétés analytiques p-adiques et homotopie

Alberto Vezzani

Journée du LAGA

Université Paris 13, 6 janvier 2017

Motivations

En géométrie arithmétique

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}, \mathbb{C} \\
\mathbb{Q} \arrow[ur, bend left, "|-|_\infty"] \arrow[dr, bend right, "|-|_p"'] & \\
 & \mathbb{Q}_p, \mathbb{C}_p
\end{tikzcd}
$$

Similarités

- Corps valués $\rightsquigarrow$ analyse
- Description

$$\mathbb{R} = \left\{ a_{-N}p^{N} + \ldots + a_0 + a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2} + \ldots \mid a_i \in \{0, \ldots, p-1\} \right\}$$

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ a_{-N}p^{-N} + \ldots + a_0 + a_1 p + a_2 p^{2} + \ldots \mid a_i \in \{0, \ldots, p-1\} \right\}$$

Aussi vrai pour le corps (de caractéristique p)

$$\mathbb{F}_p((t)) = \left\{ a_{-N}t^{-N} + \ldots + a_0 + a_1 t + a_2 t^{2} + \ldots \mid a_i \in \{0, \ldots, p-1\} \right\}$$

Différences

- La topologie de $\mathbb{Q}_p$ est “mauvaise”

1. Le cercle $\{x \colon ||x|| = 1\}$ est *ouvert*.
2. La topologie est *totalement déconnectée*.

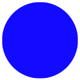
- L’analyse sur $\mathbb{Q}_p$ est “bonne”

1. Une série $\sum a_n T^n$ converge ssi $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.
2. Si $|f(x)| \leq 1$ et $|g(x)| \leq 1$ alors $|(f+g)(x)| \leq 1$.

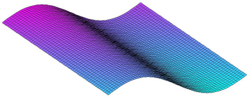
Definition

Une variété analytique lisse sur $\mathbb{C}$ est un espace annelé de Hausdorff à base dénombrable, avec un atlas $\{(X_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ d'isomorphismes avec des domaines ouverts dans $\mathbb{C}^n$ avec leurs fonctions holomorphes.

$$\mathbb{D}^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$$

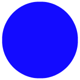


Le lieu des zéros $Z \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^M$ de $p_1, p_2, \ldots, p_M$ holomorphes $\det \frac{\partial p_i}{\partial U_j}(t, u) \neq 0$ pour tout $(t, u) \in Z$



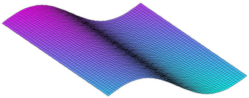
Varieties analytiques sur $\mathbb{C}_p$

$$\mathbb{C}_p\langle T\rangle = \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^n : a_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$$



$\mathbb{B}^1$

$$R = \mathbb{C}_p\langle T_1,\ldots,T_N,U_1,\ldots,U_M\rangle/(p_1,\ldots,p_M)$$
$$\det\left(\frac{\partial p_i}{\partial U_j}\right) \in R^*$$



Spa R

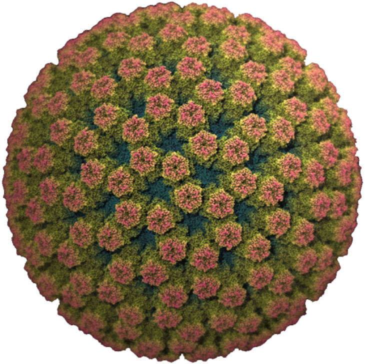
Definition

Une variété analytique lisse sur $\mathbb{C}_p$ est un espace annelé de Hausdorff à base dénombrable, avec un atlas $\{(X_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ d'isomorphismes avec des Spa R*, où* R *est comme ci-dessus.*

Aussi vrai pour $\mathbb{F}_p((t))$!

Résoudre les problèmes de la topologie

Comment les trous ont été “remplis” ?



Aussi vrai pour $\mathbb{F}_p((t))$!

Variétés analytiques p-adiques et homotopie

Homologie et cohomologie

Outils classiques pour classifier : *groupes de (co-)homologie*

Sur $\mathbb{C}$ on a :

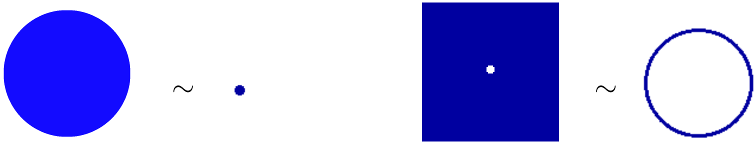
Homologie singulière
À travers cycles/bords.

Cohomologie de de Rham
À travers formes fermées/formes exactes

Elles sont *invariantes par homotopie* !

Homotopie classique

En topologie algébrique, on définie l'homotopie pour les applications, et donc une relation d'équivalence entre espaces



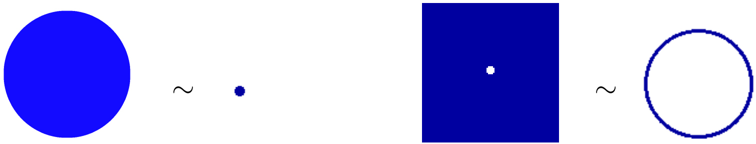
Top $/\sim$ est le cadre fondamental pour la topologie algébrique

On peut aussi ajouter des coefficients rationnels $(\mathbf{Top}, \mathbb{Q})/\sim$.

Comment définir l'homotopie pour les *espaces analytiques* ?

Homotopie analytique

On contracte les boules !



Objets de recherche : les *motifs*

$$\text{Mot} = (\textbf{Var An}, \mathbb{Q})/\sim$$

Aussi possible sur $\mathbb{F}_p((t))$!

Motifs

- *Motifs analytiques sur* $\mathbb{C}$
  Très faciles !

$$\mathrm{Mot}(\mathbb{C}) \cong \bigoplus \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}$$

- *Motifs analytiques sur* $\mathbb{Q}_p$
  Plus compliqués ! Les variétés n'étant pas localement difféomorphes à des boules...

Le basculement

Idée (Krasner) : Une extension suffisamment ramifiée K de $\mathbb{Q}_p$ peut être associée à un corps parfait valué $K^\flat$ *de caractéristique p*.

Développée par Deligne, Faltings, Fargues, Fontaine, Scholze, Wintenberger...

On fixe K eg. $K = \mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$.
On a un corps valué parfait associé $K^\flat$ eg. $K^\flat = \mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})$

La similitude entre les deux est *plus forte* que celle entre $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{F}_p((t))$!

Basculements

Basculement des *groupes de Galois* (Fontaine-Wintenberger, 1979)

$$\{\text{Extensions separables de } K\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Extensions separables de } K^\flat\}$$

Basculement des *perfectoïdes* (Scholze, 2011)

$$\{\text{Espaces perfectoïdes sur } K\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Espaces perfectoïdes sur } K^\flat\}$$

Basculements

Basculement des *groupes de Galois* (Fontaine-Wintenberger, 1979)

$$\{\text{Extensions separables de } K\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Extensions separables de } K^\flat\}$$

Basculement des *perfectoïdes* (Scholze, 2011)

$$\{\text{Espaces perfectoïdes sur } K\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Espaces perfectoïdes sur } K^\flat\}$$

Basculement *motivique* (V.)

$$\mathrm{Mot}(\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})) \cong \mathrm{Mot}(\mathbb{F}_p((t)))$$

Grâce à l'homotopie on peut :

- descendre au niveau des *variétés*.
- descendre sur $\mathbb{F}_p((t))$.

Homologie et cohomologie

Outils classiques pour classifier : *groupes de (co-)homologie*

Sur $\mathbb{C}$ on a :

Homologie singulière
À travers cycles/bords.

Cohomologie de de Rham
À travers formes fermées/formes exactes

Elles sont *invariantes par homotopie* !

Problèmes de la cohomologie de de Rham

La cohomologie de de Rham sur $\mathbb{F}_p$ est *pathologique* !

eg.

$$d(t^p) = pt^{p-1}dt = 0$$

La cohomologie de de Rham analytique sur $\mathbb{Q}_p$ est *pathologique* !

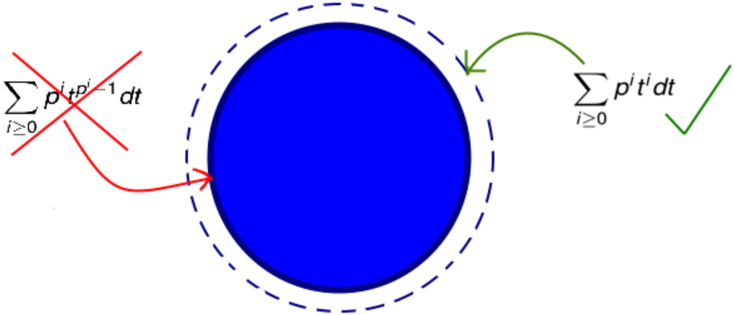
eg.

$$\int \left(\sum_{i \geq 0} p^i t^{p^i - 1} dt \right) = \sum_{i \geq 0} t^{p^i}$$

non convergente
sur le disque $\mathbb{B}^1$

Formes surconvergentes

Le disque $\mathbb{B}^1$ est “fermé” et pour les formes différentielles il faut alors prendre un épaississement.



Homologie et cohomologie

Groupes de (co-)homologie sur $\mathbb{Q}_p$

Homologie singulière
Information réduite : la topologie est bizarre...

Si l'on considère les formes *surconvergentes* (Große-Klönne)

Cohomologie de de Rham
À travers formes fermées/formes exactes, coefficients dans $\mathbb{Q}_p$.

Elles sont *invariantes par homotopie* !

Cohomologie p-adique

Théorème (V.)

L'homologie singulière et la cohomologie de de Rham surconvergente peuvent être définies sur $\mathrm{Mot}(\mathbb{Q}_p)$.

Théorème (V.)

Dimension finie, invariance par homotopie, formule de Künneth, descente étale.

On déduit alors du basculement motivique l'existence et les mêmes propriétés de ces théories (co-)homologique sur $\mathbb{F}_p((t))$!

Homologie et cohomologie

Groupes de (co-)homologie sur $\mathbb{F}_p((t))$

Homologie singulière
Information réduite : la topologie est bizarre...

Cohomologie de de Rham
À travers *anti-basculement +* formes fermées/formes exactes

On en déduit des *groupes de (co-)homologie à la de Rham* pour les variétés *sur* $\mathbb{F}_p$ en concordance avec la théorie classique de la cohomologie *rigide* suivant Monsky-Washnitzer, Berthelot...

Conclusions

- En analogie avec le cas sur $\mathbb{C}$ on peut définir les *variétés analytiques sur $\mathbb{Q}_p$*.
- D'un pdv cohomologique, la théorie sur $\mathbb{C}$ est réduite à la cohomologie singulière. *Pas vraie sur $\mathbb{Q}_p$.*
- D'un pdv cohomologique, la théorie sur des extension assez ramifiées de $\mathbb{Q}_p$ est *équivalente* à celle sur $\mathbb{F}_p((t))$.
- On peut *"basculer"* théories cohomologiques et résultats, selon la philosophie de Fontaine-Scholze.
  - De gauche à droite : on obtient la *coho. de Rham en char. p.*
  - De droite à gauche ?

Variétés analytiques p-adiques et homotopie

Alberto Vezzani

Journée du LAGA

Université Paris 13, 6 janvier 2017