CP2i. Mathématiques 3ème semestre. 2022-2023.
Notes de cours

Thomas Duyckaerts

CHAPITRE 1

Rappels d'algèbre linéaire

Ce cours chapitre est un chapitre de rappel sur les matrices et les applications linéaires dans un espace vectoriel de dimension finie. Les notions d'espace vectoriel, de base, de dimension sont supposées connues. Le lecteur est invité à relire son cours de l'année dernière pour réviser ces notions et pour les démonstrations des résultats présentés ici.

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ sera un corps commutatif (on peut choisir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour fixer les idées).

1. Matrices

1.a. Définition. Une matrice $n \times p$ sur $\mathbb{K}$ est un élement M de $\mathbb{K}^{n\times p}$, notée comme un carré à n lignes et p colonnes. Les coordonnées m_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ de la matrices sont appelés *éléments* ou coefficients. On note $M = [m_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$. Par convention le premier indice (ici i) désigne toujours le numéro de colonne et le deuxième (ici j) désigne la colonne.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n\times p$ sur $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices *carrées* $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est aussi noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exemple 1.1.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = [m_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}}$$

est une matrice 3×2 sur $\mathbb{R}$ (un élément de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$). On a $m_{2,1} = 4$, $m_{3,2} = 6$.

1.b. Opérations. Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$, $B = [b_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ deux matrices *de même taille* et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le produit de A par le scalaire λ et la somme $A+B$ sont des matrices de même taille, définies en faisant les opérations coefficients par coefficients:

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}, \quad A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}.$$

Ces opérations confèrent à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une structure d'espace vectoriel (en particulier, l'addition est commutative et associative). L'élément neutre pour l'addition est la matrice nulle, noté 0 ou $0_{n,p}$, dont tous les coefficients sont nuls.

Soit maintenant $C = [c_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}$, une matrice dont *le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes de* A. Par définition le produit AC de A et C est la matrice $n \times q$ définie par

$$AC = [d_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq q}}, \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq q.$$

EXERCICE 1.2. Calculer le produit $\left(\begin{smallmatrix}1&3&4\\2&4&5\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}-1&0&0&7\\2&0&0&1\\4&0&1&2\end{smallmatrix}\right)$.

EXERCICE 1.3. A quel condition sur la matrice A le carré $A^2 = A \times A$ est-il bien défini?

On rappelle que la multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition, mais n'est pas commutative: calculer par exemple les produits AC et CA pour $A = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$.

La multiplication admet un élément neutre, appelé *matrice identité* et noté I_n. Par définition, $I_n = [\delta_{ij}]_{1\leq {i \atop j} \leq n}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$. Ainsi, si A est une matrice $n \times p$, on a

$$A = I_n A = A I_p.$$

1.c. Matrices inversibles. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On dit que A est inversible lorsqu'il existe $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $BA = AC = I_n$. Dans ce cas $C = B$ est unique, et noté A^{-1}.

On peut vérifier l'inversibilité d'une matrice et calculer A^{-1} par la méthode du pivot de Gauss.

EXEMPLE 1.4. Lorsque A est une matrice 2×2,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est inversible } \iff ad - bc \neq 0.$$

Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$ad - bc$ est appelé le *déterminant* de A.

Le déterminant, et la formule de l'exemple précédent se généralisent à la dimension supérieure.

Ainsi

$$\det[a_{ij}]_{1\leq {i \atop j} \leq n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j},$$

où ε_σ est la signature de la permutation σ, et on a

$$A \text{ inversible } \iff \det(A) \neq 0.$$

Le lecteur est invité à réviser le chapitre sur le déterminant du cours de l'année dernière.

EXEMPLE 1.5. $\left(\begin{smallmatrix}0&1&2\\0&3&4\\0&7&13\end{smallmatrix}\right)$ n'est pas inversible. (pourquoi?). $\left(\begin{smallmatrix}3&4\\2&3\end{smallmatrix}\right)$ est inversible (calculer son inverse). I_n est inversible, d'inverse I_n.

EXERCICE 1.6. Trouver d'autres matrices carrées qui sont leur propre inverse.

2. Applications linéaires

2.a. Définitions. Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une *application linéaire* de E dans F est une application de E dans F telle que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Lorsque $E = F$, on dit que f est un endomorphisme de E. On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemple 2.1. La formule $f\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} x_1-3x_2 \\ 2x_1+4x_2-x_3 \end{smallmatrix}\right)$ définit une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. L'identité de E (que l'on notera Id_E) est un endomorphisme de E.

Si f, g sont des éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les éléments $f + g$ et λf de $\mathcal{L}(E, F)$ par

$$\forall x \in E, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

(On utilise donc la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur F). Ceci confère à $\mathcal{L}(E, F)$ une structure d'espace vectoriel.

2.b. Matrice de représentation d'une application linéaire. On suppose E et F de dimensions finies respectivement p et n. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Par définition, la *matrice de représentation* de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, noté $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est la matrice $n \times p$ dont la j-ième colonne est formé des coordonnées de $f(b_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 2.2. Soit $\mathcal{B} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ et $\mathcal{C} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$, et f donné par l'exemple 2.1. Justifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases et calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Un cas particulier important est celui de la base canonique de l'espace $\mathbb{R}^n$. On rappelle que cette base canonique $\mathcal{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$ est donnée par $e_j = (\delta_{ij})_{1 \leq i \leq n}$. Par exemple,

$$\mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$, on a

$$f\big((x_i)_{1 \leq i \leq p}\big) = \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right)_{1 \leq i \leq n}.$$

La matrice A se "lit" donc sur la formule définissant f.

Exemple 2.3. Soit f donné par l'exemple 2.1. La matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comparer avec le résulat de l'exercice 2.2.

Lorsque f est un endomorphisme de E, on représente généralement f en choisissant la même base de départ et d'arrivée. Dans ce contexte, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 2.4. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$, où $\mathcal{B}$ est une base de E. Le résultat dépend-il du choix de $\mathcal{B}$? Persiste-t-il pour $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_E)$ où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases *distinctes* de E?

2.c. Effet des opérations sur les matrices de représentations. On se donne deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimensions finies p et n respectivement. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $x \in E$. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne des coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{C}$. Alors
$$Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)X.$$
- Soit $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g), \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$
- Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{D}$ une base de G et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$
Le terme de droite de l'égalité est un produit matriciel: le produit des matrices de représentations correspond à la composition des applications.

2.d. Changement de bases. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. On voudrait exprimer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$ à partir de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. On utilise pour cela la notion de *matrice de passage*.

Définition 2.5. La matrice de passage de $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$ à $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_p)$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice $p \times p$ (où $p = \dim E$) dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Plus précisément, la j-ième colonne de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est formée des coordonnées de b'_j dans la base $\mathcal{B}$.

On vérifie facilement, à partir de sa définition que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme u de E défini par $u(b_j) = b'_j$, $j = 1, \dots p$.

Exemple 2.6. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = \left(\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$. Alors
$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.7. *La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible. Son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.*

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ transforme les coordonnées d'un vecteur de E dans $\mathcal{B}'$ en ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ (**attention à l'inversion des ordres des bases!**):

Proposition 2.8. *Soit $x \in E$, X le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ et X' le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$. Alors $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X'$.*

On déduit de la proposition 2.8 la formule de changement de base pour les applications linéaires:
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = (P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'})^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

On résume la formule par le schéma suivant On en déduit notamment que deux matrices $n \times n$, A et B, représentent le même endomorphisme de E (avec, à chaque fois, la même base de départ et d'arrivée) si et seulement si existe une matrice $n \times n$ inversible P, telle que $A = P^{-1}BP$.

CHAPITRE 2

Réduction des endomorphismes

Ce chapitre est une version étendue du chapitre correspondant du polycopié écrit par Benoît Rittaud pour le cours 2019-2020.

À la fin de ce chapitre, vous devrez notamment savoir :

- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
- Savoir si une matrice est diagonalisable ou trigonalisable, dans les cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et la diagonaliser ou la trigonaliser selon le cas.
- Appliquer la réduction des endomorphismes à des problèmes tels que l'étude des suites à récurrence linéaire ou les équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants.

Dans toute ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif (on pourra prendre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$), E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et f un endomorphisme de E.

1. Éléments propres d'un endomorphisme

1.a. Valeurs propres et vecteurs propres.

Définition 1.1. Une *valeur propre* de f est un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe un élément v de E, *non nul*, tel que $f(v) = \lambda v$. Un tel vecteur est appelé *vecteur propre* de f pour la valeur propre λ. L'ensemble des valeurs propres de f est appelé *spectre* de f et noté $\mathrm{Sp}(f)$.

Remarque 1.2. Le spectre de f est parfois noté aussi $\sigma(f)$. En anglais, les valeurs propres sont appelées *eigenvalues* et les vecteurs propres *eigenvectors*.

Exemple 1.3.

- Soit $a \in \mathbb{K}$ et h_a l'homothétie de rapport a, définie par $h_a(u) = au$ pour tout u de E. Alors $\mathrm{Sp}(h_a) = \{a\}$. Les vecteurs propres de h_a pour la valeur propre a sont tous les vecteurs non nuls de E.
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un angle tel que $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ (cf plus bas pour une explication sur cette notation). On considère, sur $\mathbb{R}^2$, la rotation r_θ, de centre $(0,0)$ et d'angle θ. Alors si $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$, r_θ n'a pas de valeur propre, puisque si v est un élément non nul de $\mathbb{R}^2$, $r_\theta(v)$ et v ne sont jamais colinéaires. En revanche, $r_\pi = h_{-1}$, et donc $\mathrm{Sp}(r_\pi) = \{-1\}$ et tout vecteur non nul est vecteur propre de r_π.

Notation 1.4. Dans le deuxième exemple, on a utilisé les notations suivantes: $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2\pi k$ (on dit alors que θ est congru à θ' modulo 2π). $\theta \not\equiv \theta'\ [2\pi]$ si et seulement si θ n'est pas congru à θ' modulo 2π.

1.b. Polynôme caractéristique. On rappelle que le déterminant d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est donné par $\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$, où $\mathcal{B}$ est n'importe quelle base de E. Par la formule de changement de bases rappelée au chapitre précédent, ce déterminant ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$. En effet, si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E,

$$\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) = \det(P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)PP^{-1}) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)),$$

où $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Par le cours de S2 de CP2i, f est injectif si et seulement si il est bijectif si et seulement si son déterminant est non nul.

Proposition et définition 1.5. La formule

$$\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$$

définit une fonction polynôme en λ. Le polynôme correspondant, noté aussi χ_f, est appelé *polynôme caractéristique de* f. C'est un polynôme de degré n, de terme dominant $(-1)^n X^n$.

Démonstration. On choisit une base $\mathcal{B}$ de E. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors

$$\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = \det(A - \lambda I_n).$$

En notant $A = [a_{ij}]_{1\leq \substack{i\\j} \leq n}$ et $A - \lambda I_n = [b_{ij}]_{1\leq \substack{i\\j} \leq n}$, on a

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ a_{ij} - \lambda & \text{si } i = j. \end{cases}, \tag{1}$$

et $\chi_f(\lambda) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n b_{\sigma(j)j}$. D'après (1), le produit $\prod_{j=1}^n b_{\sigma(j)j}$ est un polynôme de degré au plus n en λ. Il est de degré exactement n quand $\sigma(j) = j$ pour tout j, c'est à dire quand σ est la permutation identité. On en déduit que χ_f est une fonction polynôme de degré n, avec

$$\chi_f(X) = \prod_{j=1}^{n} (a_{jj} - X)^n + P_{n-1} = (-X)^n + \widetilde{P}_{n-1},$$

où P_{n-1} et $\widetilde{P}_{n-1}$ sont des polynômes de degré au plus $n-1$. La deuxième égalité a été obtenue en développant le produit $\prod_{j=1}^n (a_{jj} - X)^n$. □

Exercice 1.6. Calculer les polynômes caractéristiques des endomorphismes h_a et r_θ de l'exemple 1.3.

Proposition 1.7. *Les valeurs propres de $f \in \mathcal{L}(E)$ sont les racines, dans $\mathbb{K}$, de son polynôme caractéristique.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\iff \exists v \in E \setminus \{0_E\},\ f(v) = \lambda v \\ &\iff f - \lambda\,\mathrm{Id}_E \text{ n'est pas injectif} \\ &\iff \chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = 0. \end{aligned}$$

□

De la proposition 1.7 et des propriétés connues des racines des polynômes on déduit:

Corollaire 1.8. (i) *Un endomorphisme de E a au plus $n = \dim E$ valeurs propres.*

(ii) *Un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension ≥ 1 a au moins une valeur propre.*

(iii) *Un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impair a au moins une valeur propre.*

L'exemple de la rotation de $\mathbb{R}^2$ (exemple 1.3) montre qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension paire peut ne pas avoir de valeur propre.

1.c. Point de vue matriciel.

DÉFINITION 1.9. Soit A une matrice carrée $n \times n$ sur $\mathbb{K}$. Les valeurs propres de A sont par définition les valeurs propres de n'importe quel endomorphisme f dans un espace vectoriel E de dimension n tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ pour une certaine base $\mathcal{B}$ de E.

La proposition 1.7 justifie la définition 1.9. Par cette proposition, les valeurs propres de f sont données par les racines de son polynôme caractéristiques

$$\det(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = \det(A - \lambda I_n),$$

qui ne dépend pas du choix de f.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les valeurs propres de A sont les valeurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) défini par $f_A : X \mapsto AX$. La matrice A est exactement la matrice de représentation de f_A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Les vecteurs propres de f_A sont appelés *vecteurs propres de A*.

EXEMPLE 1.10. (i) Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq {i \atop j} \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure. Calculer les valeurs propres de A.

(ii) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où les $(\lambda_j)_{j=1,2,3}$ sont deux à deux distinctes.

AVERTISSEMENT 1.11. Les valeurs propres d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et de la même matrice, considérée comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peuvent différer. Considérer par exemple $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1.d. Le théorème de Cayley-Hamilton. Soit $P(X) = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ un polynôme, et f un endomorphisme, on note $P(f) = \sum_{j=0}^{d} a_j f^j$, où f^j désigne

$$f^j = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{j \text{ fois.}}$$

De même, si A est une matrice carrée, on note $P(A) = \sum_{j=0}^{d} a_j A^j$. On a alors le théorème de Cayley-Hamilton (admis):

THÉORÈME 1.12. *Soit f un endomorphisme et χ_f son polynôme caractéristique. Alors $\chi_f(f) = 0$.*

La version matricielle du théorème de Cayley-Hamilton est bien sûr valable: si A est une matrice carrée, $\chi_A(A)$ est la matrice nulle.

EXERCICE 1.13. Vérifier le théorème de Cayley-Hamilton sur la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1.e. Sous-espaces propres.

Définition 1.14. On rappelle que le noyau d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est l'ensemble $\ker f = \{x \in E\ ,\ f(x) = O_E\}$. L'image de f est $\mathrm{Im}(f) = f(E)$. Ce sont deux sous-espaces vectoriels de E. De plus, on a le théorème du rang:

$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim E.$$

($\dim \mathrm{Im}(f)$ est aussi appelé *rang* de f). En particulier,

$$f \text{ est injectif} \iff f \text{ est bijectif} \iff f \text{ est surjectif} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Notation 1.15. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = \{x \in E,\ f(x) = \lambda x\}$.

Par ce qui précède,

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff E_\lambda(f) \neq \{0_E\}.$$

Définition 1.16. Lorsque λ est valeur propre de f, $E_\lambda(f)$ est appelé *sous-espace propre* de f associé à la valeur propre λ. Il est formé des vecteurs propres de f associés à λ, et de 0_E. Si A est une matrice, les sous-espaces propres de A sont par définition les sous-espaces propres de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ $X \mapsto AX$, représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 1.17. Déterminer les sous-espaces propres des éléments suivants de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

où $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la matrice $n \times n$ diagonale dont les éléments diagonaux sont, de haut en bas, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

2. Diagonalisation

2.a. Définition.

Définition 2.1. L'endomorphisme f de E est *diagonalisable* quand il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f)$ est diagonale. La base $\mathcal{B}$ est alors appelée *base de diagonalisation.*

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une telle base. On a donc $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, pour certains scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Par définition de $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f)$, on a $f(b_j) = \lambda_j b_j$: les b_j sont donc des vecteurs propres de f et les λ_j les valeurs propres correspondantes. Réciproquement, si $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ est une base formée de vecteurs propres de f, la matrice de représentation de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale, et ses éléments diagonaux sont les valeurs propres correspondant à $v_1,\ldots,v_n$. On a montré:

Proposition 2.2. *Un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si E admet une base de vecteurs propres de f.*

Exemple 2.3.
- (i) L'homothétie $h_a = a\,\mathrm{Id}_E$, où $a \in \mathbb{K}$, est trivialement diagonalisable. N'importe quelle base de E est une base de diagonalisation de h_a.
- (ii) La rotation r_θ de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et d'angle θ, où $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$ n'est pas diagonalisable: elle n'a pas de valeur propre.

(iii) Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à l'axe Ox. Alors s est diagonalisable. La base canonique est une base de diagonalisation, et la matrice de s dans cette base est $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Définition 2.4. Une matrice A est *diagonalisable* quand l'endomorphisme f_A de $\mathbb{K}^n$ représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $X \mapsto AX$ est diagonalisable.

Ceci signifie que dans une certaine base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, la matrice de f_A est diagonalisale. Soit $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par $P^{-1}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}} A \mathcal{P}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}}$. On en déduit:

Proposition 2.5. *La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale. La matrice P est alors la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_n$ à la base $\mathcal{B}$.*

Exercice 2.6. Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de M. Montrer que M est diagonalisable et donner une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.
Même question pour la matrice $R_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Dans la suite de cette section, tous les résultats sur les endomorphismes peuvent être bien sûr réinterprétés en terme matriciel.

2.b. Diagonalisation et polynôme caractéristique. On rappelle que le polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$ si il a n racines sur $\mathbb{K}$ comptées avec leurs ordres de multiplicité. En d'autres termes, on a

$$Q(X) = a \prod_{1 \leq j \leq d} (X - z_j),$$

où $a \neq 0$, et $z_1,\ldots,z_d$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Lemme 2.7. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Alors χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration. En effet, dans une base $\mathcal{B}$ de diagonalisation, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Le polynôme caractéristique de f est donc

$$\prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - X).$$

□

Exercice 2.8. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Le fait que χ_f est scindé n'est pas suffisant pour que f soit diagonalisable. Par exemple $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas diagonalisable: sa seule valeur propre est 1, et on ne peut pas avoir $A = P^{-1}I_2P$ puisque ceci impliquerait $A = I_2$. Il existe toutefois une condition suffisante simple pour qu'une matrice soit diagonalisable en terme de polynôme caractéristique:

Théorème 2.9. *Soit f un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Alors f est diagonalisable.*

Démonstration. Par hypothèse, le polynôme caractéristique de f est de la forme $\prod_{j=1}^{n}(z_j - X)$, où les z_j sont deux à deux distincts. Les z_j sont donc des valeurs propres de f. Soit $(e_j)_{j=1,\ldots n}$ des vecteurs propres correspondants. Montrons que e_j est une base de E: cela donnerait une base de E de vecteurs propres de f, impliquant que f est diagonalisable. Puisque $\mathcal{B}$ est de cardinal $n = \dim E$, il suffit pour cela de montrer que $\mathcal{B}$ est libre.

On se place dans le cas $n = 2$ pour donner l'idée de la preuve. On suppose donc

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = 0 \tag{2}$$

On doit montrer $x_1 = x_2 = 0$. En appliquant f à (2), on obtient

$$x_1 z_1 e_1 + x_2 z_2 e_2 = 0. \tag{3}$$

$z_1 \times$(2)-(3) donne $x_2(z_1 - z_2)e_2 = 0$, et donc $x_2 = 0$ puisque $z_1 \neq z_2$. En revenant à (2), on obtient aussi $x_1 = 0$.

Le cas général se démontre de manière similaire: en appliquant f^j à (3) pour $j = 0, \ldots, n-1$ on obtient les n équations:

$$x_1 z_1^j e_1 + x_2 z_2^j e_2 + \ldots + x_n z_n^j e_n = 0, \quad j = 0, \ldots, n-1. \tag{4}$$

On démontre que la seule solution de ce système d'équations est $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ en utilisant l'inversibilité de la matrice de Vandermonde $[z_i^j]_{1 \leq \substack{i \\ j} \leq n}$. Pour conclure la preuve, il suffit de montrer l'inversibilité de cette matrice, ce qui est un exercice classique (mais pas complètement trivial!) laissé au lecteur. □

Exemple 2.10. Soit T une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont distincts deux à deux. Alors T est diagonalisable.

2.c. Diagonalisation et sous-espaces propres. On rappelle que les sous-espaces E_1, …, E_j de E sont *supplémentaires* dans E quand tout élément x de E s'écrit de manière unique $x_1 + x_2 + \ldots + x_j$, avec $x_k \in E_k$ pour tout j entre 1 et k. On note alors $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_j = \bigoplus_{k=1}^{j} E_k$.

Exercice 2.11. Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$

$$E_1 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right),\ E_2 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right),\ E_3 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Fixons pour tout $k \in \{1, \ldots, j\}$, une base $\mathcal{B}_k$ de E_k. On peut montrer que les espaces E_1, …, E_j sont supplémentaires si et seulement si $\bigcup_{k=1}^{j} \mathcal{B}_k$ est une base de E.

On en déduit que $E_1, \ldots, E_j$ sont supplémentaires dans E si et seulement si 2 des 3 propriétés suivantes sont vérifiées:

$$E = E_1 + \ldots + E_j \tag{i}$$

$$\forall (x_1, \ldots, x_j) \in E_1 \times \ldots \times E_j, \quad \sum_{k=1}^{j} x_k = 0_E \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_j = 0_E \tag{ii}$$

$$\dim E_1 + \ldots + \dim E_j = \dim E \tag{iii}$$

Le point (i) signifie que tout vecteur de E s'écrit $x_1 + x_2 + \ldots + x_j$ avec $k \in E_k$, $k = 1, \ldots, j$.

En particulier, deux sous-espaces E_1 et E_2 de E sont supplémentaires si et seulement si $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

Proposition 2.12. *L'endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans E.*

DÉMONSTRATION. En effet, si les sous-espaces propres de f sont supplémentaires dans E, on peut construire une base de vecteurs propres de E en choisissant une base de chaque sous-espace propre de E et en faisant la réunion de toutes ces bases.

Réciproquement, si f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de E. Le sous espace propre associé à la valeur propre λ est l'espace vectoriel engendré par les $v \in \mathcal{B}$ tel que v est un vecteur propre associé à λ. On déduit facilement du fait que $\mathcal{B}$ est une base que ces sous-espaces propres sont supplémentaires. $\square$

On peut montrer que la propriété (ii) plus haut est automatiquement vérifiée lorsque les E_j sont les sous-espace propres de f. La preuve utilise l'inversibilité de la matrice de Vandermonde, comme dans la démonstration du Théorème 2.9. Elle est laissée en exercice au lecteur intéressé. On en déduit:

COROLLAIRE 2.13. *L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est exactement la dimension de E.*

EXERCICE 2.14. Calculer les sous-espaces propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.d. Application de la diagonalisation au calcul des puissances successives d'une matrice. Si $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ses puissances successives sont données par $D^j = \operatorname{diag}(\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j)$. Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Il existe donc une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = D$ est une matrice diagonale. On en déduit

$$(P^{-1}AP)^j = D^j.$$

Or

$$(P^{-1}AP)^j = P^{-1}A^jP,$$

ce qui donne

$$A^j = PD^jP^{-1}.$$

On peut donc très facilement calculer les puissances d'une matrice qu'on a diagonalisée.

3. Quelques propriétés supplémentaires des valeurs propres

3.a. Ordre de multiplicité des valeurs propres.

AVERTISSEMENT. *Dans une version précédente de ce polycopié (malheureusement imprimée et distribuée aux étudiants), l'auteur avait inversé les notions de multiplicité algébrique et géométrique. Les définitions correctes sont données dans la version actuelle. L'auteur souhaite présenter ses excuses pour cette lamentable confusion.*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \operatorname{Sp}(E)$. λ est donc une racine du polynôme caractéristique χ_f. A λ, on associe deux notions de multiplicité:

DÉFINITION 3.1. • La *multiplicité algébrique* $m_a(\lambda)$ est l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de χ_f.

- La *multiplicité géométrique* $m_g(\lambda)$ est la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(f)$.

PROPOSITION 3.2. *Si* $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(f)$,

$$m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda).$$

DÉMONSTRATION. En effet, soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base de $E_{\lambda_0}(f)$ (avec $m = m_g(f)$). On complète cette base en une base $\mathcal{B}$ de E. ALors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_0 I_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où B est une matrice $m \times (n-m)$, 0 est la matrice nulle $(n-m) \times m$ et C est une matrice $(n-m) \times (n-m)$. On voit alors que $(\lambda_0 - \lambda)^m$ divise $\chi_f(\lambda)$ ce qui montre le résultat. $\square$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ ses valeurs propres (comptées avec multiplicité). Supposons χ_f scindé, ce qui signifie exactement

$$m_a(\lambda_1) + \ldots + m_a(\lambda_p) = \dim E.$$

On rappelle que f est diagonalisable si et seulement si

$$\dim E_{\lambda_1} + \ldots \dim E_{\lambda_p} = \dim E,$$

i.e.

$$m_g(\lambda_1) + \ldots m_g(\lambda_p) = \dim E.$$

Par la proposition 3.2, ceci ne peut avoir lieu que si $m_a(\lambda_j) = m_g(\lambda_j)$ pour tout j. On a donc

THÉORÈME 3.3. *Un endormorphisme f est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et la multiplicité géométrique de chaque valeur propre de f est égale à sa multiplicité algébrique.*

3.b. Trace. Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq \substack{i \\ j} \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace* de A, et on note $\mathrm{Tr}\, A$ la somme des coefficients diagonaux de A:

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Remarquons que $A \mapsto \mathrm{Tr}\, A$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est à dire une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$).

THÉORÈME 3.4. *La trace de A ne dépend que du polynôme caractéristique de A. En conséquence, si P est une matrice inversible,* $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}\, A$.

DÉMONSTRATION. Par définition,

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (a_{j\sigma(j)} - \delta_{j,\sigma(j)}\lambda).$$

Supposons que $\sigma \in \mathcal{S}_n$ n'est pas l'identité de $\{1, \dots, n\}$. Il existe donc $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\ell = \sigma(k) \neq k$. Mais alors $\sigma(\ell) \neq \ell$ aussi (sinon on aurait $\sigma(\ell) = \sigma(k)$, contredisant l'injectivité de σ). Il y a donc au moins deux indices k tels que $\sigma(k) \neq$

k. Ceci montre que $\prod_{j=1}^{n}(a_{j\sigma(j)}) - \delta_{j,\sigma(j)}\lambda)$ est un polynôme de degré au plus $n-2$ en λ. Donc

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(a_{jj} - \lambda) + P_{n-2}(\lambda),$$

où P_{n-2} est un polynôme de degré au plus $n-2$. En développant, on voit que le coefficient de λ^{n-1} dans χ_A est exactement $(-1)^{n-1}\operatorname{Tr} A$, ce qui montre le théorème. □

EXERCICE 3.5. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$. On pourra commencer par le cas où $B = E_{ij}$ (la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0 sauf le coefficient b_{ij} qui vaut 1).

COROLLAIRE 3.6 (Trace d'un endomorphisme). *Si f est un endormophisme d'un espace vectoriel E de dimension finie,* $\operatorname{Tr}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E et est appelée* trace *de f.*

DÉMONSTRATION. Par le théorème, $\operatorname{Tr}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ne dépend que du polynôme caractéristique de f, qui est égal au polynôme caractéristique de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$, ce qui montre le résultat. □

PROPOSITION 3.7. *Si le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $f \in \mathcal{L}(E)$) est scindé, alors* $\operatorname{Tr} A$ *(respectivement* $\operatorname{Tr} f$*) est la somme de ses valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités algébriques.*

DÉMONSTRATION. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si χ_f est scindé, alors

$$\chi_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda),$$

où les λ_i sont les valeurs propres de f (comptées avec multiplicité algébriques). On voit alors immédiatement que le coefficient de λ^{n-1} est exactement $(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$, ce qui montre le résultat, puisque par la démonstration du théorème 3.4, cette quantité est aussi étale à $(-1)^{n-1}\operatorname{Tr} f$. (La démonstration est la même lorsque l'on remplace l'endomorphisme f par une matrice). □

Nous verrons plus loin qu'un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable. En écrivant la matrice de f dans une base de trigonalisation, on retrouve immédiatement le résulat précédent.

EXERCICE 3.8. Soit p un projecteur (cf travaux dirigés). Quelle lien y a-t-il la trace de p et l'image de p?

4. Trigonalisation

4.a. Définition et caractérisation.

DÉFINITION 4.1. On dit que l'endomorphisme f de E est trigonalisable quand il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure. $\mathcal{B}$ est alors appelée *base de trigonalisation.*

Si f est trigonalisable, en écrivant la matrice de représentation de f dans une base de trigonalisation, on voit que son polynôme caractéristique vérifie

$$\chi_f(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda_j - \lambda),$$

où les λ_j sont les valeurs propres de f (comptées avec multiplicité algébrique). Le polynôme χ_f est donc scindé. On admet la réciproque de cette propriété:

THÉORÈME 4.2. *L'endomorphisme f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.*

En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.

DÉFINITION 4.3. La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *trigonalisable* si et seulement si l'endomorphisme $X \mapsto AX$ représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est trigonalisable.

Comme pour la diagonalisation, on démontre facilement que A est trigonalisable si et seulement si un endomorphisme représentant A dans une base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel est trigonalisable, ou encore si et seulement si tous ces endomorphismes sont trigonalisables. De manière équivalente, A est trigonalisable si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible, telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.

4.b. Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme. Soit f un endomorphisme trigonalisable sur un espace vectoriel de dimension n. Par le théorème 4.2, son polynôme caractéristique est scindé. Il s'écrit donc:

$$\chi_f(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda)^{m_j},$$

où les λ_j sont les valeurs propres (distinctes) de f, et les m_j sont leurs multiplicités algébriques (on a donc $\sum_{j=1}^{k} m_j = n$).

DÉFINITION 4.4. Le *sous-espace caractéristique* de f associé à une valeur propre λ est le sous-espace vectoriel de E

$$N_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_a(\lambda)}.$$

Les sous-espaces caractéristiques d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont par définition les sous-espaces caractéristiques de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ de $\mathbb{K}^n$.

EXERCICE 4.5. Déterminer les valeurs-propres, les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 4.6. Soit f un endomorphisme trigonalisable sur un espace vectoriel E de dimension n.

a. Montrer que pour toute valeur propre λ, le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est inclus dans le sous espace caractéristique $N_\lambda(f)$.

b. Montrer que chaque sous-espace caractéristique de f est stable par f, i.e.

$$\forall v \in N_\lambda(f), \quad f(v) \in N_\lambda(f).$$

Le lien entre les sous-espaces caractéristiques et la trigonalisation est le suivant: on peut montrer que les sous espaces caractéristiques $(N_{\lambda_j}(f))_{1\leq j\leq k}$ d'un endomorphisme trigonalisable f sont supplémentaires dans E. L'espace vectoriel $N_{\lambda_j}(f)$ étant stable par f, la restriction f_j de f à cet espace vectoriel définit donc un endomorphisme de $N_{\lambda_j}(f)$. On peut vérifier son polynôme caractéristique est exactement $(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$ où m_j est la multiplicité algébrique de λ_j qui dans ce cas est égale à la dimension de $N_{\lambda_j}(f)$. L'endomorphisme f_j est donc trigonalisable. Si on fixe pour chaque $j\in\{1,\dots,k\}$ une base de trigonalisation $\mathcal{B}_j$ de $N_{\lambda_j}(f)$, on obtient donc une base $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\ldots\cup\mathcal{B}_k$ de E, dont on peut montrer facilement qu'elle est une base de trigonalisation de f. On peut donc trigonaliser un endormophisme en le trigonalisant sur chacun de de ses sous-espaces caractéristiques. On renvoie le lecteur intéressé à tout bon livre d'algèbre linéaire de licence pour les démonstrations des affirmations précédentes.

Il existe des méthodes systématiques de trigonalisation (les réductions de Dunford et de Jordan par exemple). Nous ne verrons pas ces méthodes dans le cas général. Nous allons en revanche donner des exemples de trigonalisation d'endomorphisme en dimension 2 et 3. D'après ce qui précède, ses méthodes sont également utiles pour trigonaliser les matrices en dimensions supérieures, en se restreignant à chacun des sous-espaces caractéristiques.

Dans toute la suite, f est un endomorphisme sur un espace vectoriel E de dimension finie n, <u>que l'on suppose trigonalisable</u> (i.e. χ_f est scindé).

4.c. Trigonalisation en dimension 2. Supposons $n=2$.

4.c.1. Si les racines de χ_f sont simples, f est diagonalisable.

4.c.2. Si χ_f a une seule racine λ, qui est donc double, ou bien f est diagonalisable, et donc $\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{Id}_E)=E$, ce qui signifie $f=\lambda\operatorname{Id}_E$, ou bien f n'est pas diagonalisable. Dans ce dernier cas, une base de triagonalisation est donnée par $\mathcal{B}=(v_1,v_2)$ où v_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, et v_2 n'importe quel vecteur non colinéaire à v_1. La matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & a\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$. On détermine $a\in\mathbb{K}^*$ en calculant $f(v_2)=av_1+\lambda v_2$. On remarque que l'on peut toujours choisir $a=1$ en remplaçant la base $\mathcal{B}$ par la base $\mathcal{B}'=(av_1,v_2)$.

4.d. Trigonalisation en dimension 3. On suppose $n=3$.

4.d.1. Si les racines de χ_f sont simples, f est diagonalisable.

4.d.2. Si χ_f a une racine simple λ_1 et une racine double λ_2, f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(f-\lambda_2\operatorname{Id}_E)$ est de dimension 2. Si cette dernière condition n'est pas vérifié, on peut facilement trigonaliser f. Une base de trigonalisation est donnée par (v_1,v_2,v_3), où v_1 est un vecteur propre associé à λ_1, v_2 un vecteur propre associé à λ_2 et v_3 n'importe quel vecteur qui n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par (v_1,v_2). La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=$ $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & a\\ 0 & \lambda_2 & b\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, où a et b sont tels que $f(v_3)=av_1+bv_2+\lambda_2v_3$.

Exercice: montrer que l'on peut prendre v_3 dans le sous-espace caractéristique associé à λ_2. Que vaut a dans ce cas?

4.d.3. Si χ_f a une racine triple λ, la situation dépend de la dimension de $\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{Id}_E)$.

• Si $\dim\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{Id}_E=3$, $f=\lambda\operatorname{Id}_E$, et donc f est trivialement diagonalisable.

• Si $\dim\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{Id}_E)=2$, f n'est pas diagonalisable. Une base de trigonalisation est donnée par (v_1,v_2,v_3), où (v_1,v_2) est une base de $\operatorname{Ker}(f-\lambda\operatorname{Id}_E)$ et

v_3 est n'importe quel vecteur de E qui n'est pas dans $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \lambda & b \\ 0 & 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, où a et b sont tels que $f(v_3) = av_1 + bv_2 + \lambda v_3$. *Exercice:* trouver une base $\mathcal{B}'$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est de la forme précédente avec $a = 0$, $b = 1$.

• Si $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E = 1$, la trigonalisation est un tout petit peu plus compliquée. On va montrer que l'on peut trouver une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ telle que

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

ou de manière équivalente:

$$(f - \lambda \operatorname{Id}_E)v_1 = 0, \quad (f - \lambda \operatorname{Id}_E)v_2 = v_1, \quad (f - \lambda \operatorname{Id}_E)v_3 = v_2. \tag{5}$$

Pour cela, on commence par remarquer que la dimension de l'image de $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ est 2 par le théorème du rang. En particulier, cette image ne peut pas être incluse dans le noyau de $f - \lambda \operatorname{Id}_E$, qui par hypothèse est de dimension 1. En d'autre termes, $(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^2 \neq 0$. On se donne alors v_3 tel que $(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^2(v_3) \neq 0$, et on pose, en suivant (5) $v_2 = (f - \lambda \operatorname{Id}_E)(v_3)$, $v_1 = (f - \lambda \operatorname{Id}_E)(v_2) = (f - \lambda \operatorname{Id}_E)^2(v_3)$. En utilisant ces définitions, et le fait que $v_1 \neq 0$ par le choix de v_3, on montre facilement que (v_1, v_2, v_3) est libre, et donc que c'est une base de E. Par construction, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme recherchée.

5. Travaux dirigés

5.a. Diagonalisation. Sauf mention contraire, E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1.

a. Dire sans calcul si les matrices suivantes sont diagonalisables:

$$\begin{pmatrix} \pi & -1 & 3 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & i & 3 \\ 0 & 4 & 4i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. Soit $a \in \mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est $(a - X)^n$. Montrer que $f = a \operatorname{Id}_E$ ou que f n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.

a. Pour chacune des matrices M réelles suivantes, calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres correspondants. Déterminer si la matrice est diagonalisable. Si elle est diagonalisable, donner une matrice P telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -3 & -7 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b. Calculer C^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.

a. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 10 & 4 \\ -1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$. Diagonaliser A.

b. A l'aide de la question précédente, déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

EXERCICE 4.

a. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 := f$ (ou $f^2 = f \circ f$). On dit que f est une *projection* (ou plus précisément la projection sur $\operatorname{Im} f$, parallèlement à $\operatorname{Ker}(f)$). Déterminer la restriction de f à $\operatorname{Im} f$.

b. Montrer que $\operatorname{Sp}(f) \subset \{0, 1\}$.

c. Montrer que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$ et que f est diagonalisable.

d. En utilisant les questions précédentes, montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres. Déterminer une base de diagonalisation.

EXERCICE 5.

a. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = \mathrm{Id}_E$ (on dit que f est une symétrie). Montrer que $\frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + f)$ est une projection.

b. A la lumière de l'exercice 4 et de la question précédente, que peut-on dire des valeurs propres de f? Montrer que f est diagonalisable.

c. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -3+3i \\ 6-2i & -4+i & -2+4i \\ 2i & -i & -2-i \end{pmatrix}$ et donner ses valeurs propres.

5.b. Trigonalisation.

EXERCICE 6. Trigonaliser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; A' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -12 & -5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 7. Les endomorphismes $f_1, \dots f_4$ de $\mathbb{R}^3$ définis par les formules suivantes sont-ils diagonalisables? Trigonalisables? Pour chacun des endomorphismes, donner une base de diagonalisation ou de trigonalisation, et déterminer les sous-espaces caractéristiques:

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+5z \\ x-y+2z \\ -x-3z \end{pmatrix}, \quad f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x-y \\ -5x-2y-5z \\ 5x+3y+4z \end{pmatrix},$$

$$f_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-2z \\ x+y+2z \\ x-y+4z \end{pmatrix}, \quad f_4\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x+2y+2z \\ -8x+7y+4z \\ 4x-2y+z \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 8. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a. Quel est le rang de A? Montrer que 0 est valeur propre, et déterminer la dimension du sous-espace propre correspondant.

b. Déterminer toutes les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable?

c. Plus généralement, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la trace d'une matrice de rang 1 pour qu'elle soit diagonalisable.

Exercice 9. On considère la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

a. Déterminer les valeurs propres de A. Déterminer les sous-espaces propres de A.

b. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A. La matrice A est-elle diagonalisable? Trigonalisable?

c. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

5.c. Applications aux suites définies par une relation de récurrence.

Exercice 10. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$(f_0, f_1) = (a, b), \quad \forall n \geq 1,\ f_{n+1} = f_{n-1} + f_n.$$

a. Pour tout $n \geq 0$, on pose $F_n = \left(\begin{smallmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{smallmatrix} \right)$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 0$, $F_{n+1} = AF_n$.

b. Diagonaliser ou trigonaliser A. En déduire une expression de A^n pour tout $n \geq 0$.

c. Calculer F_n puis f_n pour tout n. Dans le cas $(a, b) = (0, 1)$ (*suite de Fibonnaci*), déterminer un équivalent simple de f_n quand $n \to \infty$.

d. A quelle condition sur a et b la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est-elle bornée?

Exercice 11. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$(u_0, u_1) = (a, b), \quad \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = -3u_{n-1} + 3u_n.$$

a. Pour tout $n \geq 0$, on pose $U_n = \left(\begin{smallmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{smallmatrix} \right)$. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 0$, $Bu_{n+1} = Bu_n$.

b. Calculer les valeurs propres de B, et diagonaliser ou trigonaliser B. En déduire une expression de B^n pour tout $n \geq 0$.

c. Calculer U_n puis u_n pour tout n. Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_{n\geq 0}$ quand $n \to \infty$, en fonctions de a et b.

5.d. Applications aux systèmes d'équations différentielles linéaires.

Exercice 12. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse au système d'équations différentielles:

$$\begin{cases} y_1'(t) = 5y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_2'(t) = -4y_1(t) - 4y_2(t) \end{cases} \tag{S}$$

avec condition initiale

$$(y_1(0), y_2(0)) = (a, b).$$

a. Soit $Y = \binom{y_1}{y_2}$. Trouver une matrice A tel que $Y' = AY$.

b. Déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible, telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale.

c. Soit $X = \binom{x_1}{x_2} = P^{-1}Y$. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par X? En déduire X, puis Y.

d. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que Y reste bornée[1] quand $t \to +\infty$. Même question pour $t \to -\infty$. Pour quelles valeurs de a et b est-ce que Y est bornée sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse maintenant à l'un des systèmes d'équations différentielles:

$$(S_1) \qquad \begin{cases} y_1'(t) = -3y_1(t) - 2y_2(t) \\ y_2'(t) = 9y_1(t) + 3y_2(t), \end{cases}$$

ou

$$(S_2) \qquad \begin{cases} y_1'(t) = 3y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = 9y_1(t) - 3y_2(t) \end{cases}$$

avec condition initiale

$$(y_1(0), y_2(0)) = (a, b).$$

Résoudre (S_1) (respectivement (S_2)) avec la même stratégie que l'exercice précédent. Répondre également à la question d. de l'exercice précédent.

[1]c'est à dire pour que y_1 et y_2 restent bornées

CHAPITRE 3

Formes bilinéaires, formes quadratiques

À la fin de ce chapitre, vous devrez notamment savoir :

- Reconnaître une forme bilinéaire, une forme quadratique, une forme bilinéaire symétrique/antisymétrique. Manipuler les formes bilinéaires.
- Représenter matriciellement une forme bilinéaire.
- Calculer le noyau et le cône isotrope d'une forme bilinéaire symétrique.
- Calculer la polarisée d'une forme quadratique.
- Déterminer l'orthogonal d'un sous-ensemble de l'espace vectoriel E pour une forme bilinéaire symétrique sur E.
- Appliquer la réduction de Gauss à une forme quadratique réelle et déterminer sa signature.

1. Définition et premières propriétés

On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ pour fixer les idées. Tout ce qui est contenu dans ce chapitre (sauf la notion de signature, spécifique à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) est en fait valable dans n'importe quel corps (commutatif) *de caractéristique différente de* 2, c'est à dire tel que $1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

1.a. Définition.

Définition 1.1. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une *forme bilinéaire* sur E lorsque

- pour tout y de E, $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire et
- pour tout x de E, $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

De manière équivalente,

$$\forall(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{K}^4,\ \forall(u_1, u_2, v_1, v_2) \in E^4, \quad \varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2)$$
$$= \alpha_1\beta_1\varphi(u_1, v_1) + \alpha_1\beta_2\varphi(u_1, v_2) + \alpha_2\beta_1\varphi(u_2, v_1) + \alpha_2\beta_2\varphi(u_2, v_2).$$

Exemples 1.2. La formule

$$\varphi_1(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots y_n)$$

définit une forme bilinéaire sur $\mathbb{K}^n$.

L'application φ_2 de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_2(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_3 - x_3y_1 + 4x_3y_2$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$.

L'application définie sur $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ par

$$\varphi_3(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1.b. Matrice associée à une forme bilinéaire. On suppose E de dimension finie, et on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Soient x, y deux vecteurs de E, et

$$X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$$

les vecteurs colonnes de leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$. En utilisant la bilinéarité de φ, on obtient

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$
$$= \sum_{1 \leq {i \atop j} \leq n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = {}^t XAY,$$

où A est la matrice $[\varphi(e_i, e_j)]_{1 \leq {i \atop j} \leq n}$.

Plus précisément, ${}^t XAY$ est une matrice à une ligne et une colonne, identifiée à un élément de $\mathbb{K}$.

Définition 1.3. La *matrice de la forme bilinéaire* φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la matrice carrée $[\varphi(e_i, e_j)]_{1 \leq {i \atop j} \leq n}$.

Exemples 1.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La formule

$$\varphi_A(X, Y) = {}^t XAY$$

définit une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est exactement la matrice A.

La matrice de la forme bilinéaire φ_1 de l'exemple 1.2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est I_n.

La matrice de la forme bilinéaire φ_2 de l'exemple 1.2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 1.5. Déterminer la matrice de la forme bilinéaire φ_3 de l'exemple 1.2 dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.

Exercice 1.6. Déterminer la matrice de la forme bilinéaire φ_2 de l'exemple 1.2 dans la base $\left(\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.7. Soit φ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ de matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\varphi(x, y)$ en fonction des coordonnées (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) de x et y.

Comme pour les applications linéaires, on a une *formule de changement de bases* des matrices de formes bilinéaires. On se donne une forme bilinéaire φ sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, et deux bases $\mathcal{B}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ de cet espace vectoriel. On note A (respectivement $\widetilde{A}$) la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ (respectivement $\widetilde{B}$).

On note $P = P_{\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$. On rappelle que les vecteurs colonnes de cette matrice sont les coordonnées, dans la base $\mathcal{B}$, des vecteurs de $\widetilde{\mathcal{B}}$. Par ailleurs, la multiplication matricielle par P transforme les coordonnées d'un vecteur dans $\widetilde{\mathcal{B}}$ en ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ (attention à l'inversion des deux bases par rapport au nom “matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\widetilde{\mathcal{B}}$).

Soit x et y deux vecteurs de E, X et Y (respectivement $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$) leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\widetilde{\mathcal{B}}$). Alors

$$\varphi(x,y) = {}^tXAY = {}^t\widetilde{X}\widetilde{A}\widetilde{Y}.$$

D'autre part, puisque $X = P\widetilde{X}$ et $Y = P\widetilde{Y}$,

$${}^tXAY = {}^t(P\widetilde{X})AP\widetilde{Y} = {}^t\widetilde{X}{}^tPAP\widetilde{Y}.$$

On a donc

$$\forall \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad {}^t\widetilde{X}({}^tPAP)\widetilde{Y} = {}^t\widetilde{X}\widetilde{A}\widetilde{Y},$$

ce dont on déduit facilement (par exemple en applicant la formule précédentes aux vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$):

$$\widetilde{A} = {}^tPAP, \quad P = P_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

C'est la *formule de changement de bases pour les formes bilinéaires*, à comparer à la formule analogue pour les applications linéaires.

Exercice 1.8. Vérifier le résultat de l'exerice 1.6 en utilisant la formule de changement de bases.

2. Formes quadratiques

2.a. Symétrie des formes bilinéaires.

Définition 2.1. La forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est *symétrique* quand

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x).$$

Exemples 2.2. Reprenons les formes bilinéaires de l'exemple 1.2. Les formes bilinéaires φ_1 (sur $\mathbb{R}^n$) et φ_3 sur $\mathbb{R}_n[X]$, définies par

$$\varphi_1(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad \varphi_3(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

sont symétriques. La forme bilinéaire φ_2 sur $\mathbb{R}^3$, définie par $\varphi_2(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_3 - x_3y_1 + 4x_3y_2$ n'est pas symétrique.

Proposition 2.3. *On suppose E de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. La forme bilinéaire φ sur E est symétrique si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.*

Démonstration. Soit A la matrice de φ dans $\mathcal{B}$. La forme bilinéaire φ est symétrique si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x).$$

Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si x et y sont les éléments de E de coordonnées respectives X et Y dans $\mathcal{B}$, on a $\varphi(x,y) = {}^tXAY$ et $\varphi(y,x) = {}^tYAX$. On obtient donc que φ est symétrique si et seulement si

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2, \quad {}^tXAY = {}^tYAX.$$

Puisque ${}^tXAY$ est une matrice 1×1, elle est égale à sa transposée:

$${}^tXAY = {}^t({}^tXAY) = {}^tY{}^tA\,{}^t({}^tX) = {}^tY{}^tAX.$$

La matrice φ est donc symétrique si et seulement si

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2, \quad {}^tYAX = {}^tY{}^tAX,$$

ce qui signifie exactement $A = {}^tA$, i.e. que A est symétrique. □

DÉFINITION 2.4. Une forme bilinéaire φ sur E est dite *antisymétrique* si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = -\varphi(y,x).$$

Elle est dite *alternée* quand

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x,x) = 0.$$

PROPOSITION 2.5. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.*

DÉMONSTRATION. Supposons φ antisymmétrique. Alors pour $x \in E$, $\varphi(x,x) = -\varphi(x,x)$. Donc $2\varphi(x,x) = 0$ ce qui implique $\varphi(x,x) = 0$. Donc φ est alternée.

Réciproquement si φ est alternée et $(x,y) \in E^2$, alors

$$0 = \varphi(x+y, x+y) = \underbrace{\varphi(x,x)}_{0} + \underbrace{\varphi(y,y)}_{0} + \varphi(x,y) + \varphi(y,x),$$

et donc $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$, ce qui montre que φ est alternée. □

REMARQUE 2.6. La propriété précédente persiste sur tout corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, c'est à dire telle que $1+1 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ (ce qui est bien sur le cas sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais pas par exemple sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

EXEMPLE 2.7. Soit $n \geq 1$. On considère sur $\mathbb{R}^{2n}$ la forme bilinéaire:

$$\omega(x,x') = \sum_{j=1}^{n} u_j v'_j - \sum_{j=1}^{n} u'_j v_j, \quad (x,x') \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n},$$

où $x = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$, $x' = (u'_1, \dots, u'_n, v'_1, \dots, v'_n)$. Alors ω est une forme bilinéaire antisymétrique.

PROPOSITION 2.8. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, φ une forme bilinéaire sur E et A la matrice de φ dans E. Alors φ est antisymétrique si et seulement si A est antisymétrique.*[1]

2.b. Forme quadratique.

DÉFINITION 2.9. Soit φ une forme bilinéaire sur E. L'application $q : E \mapsto \mathbb{K}$ définie par $q(x) = \varphi(x,x)$ est appelée *forme quadratique associée à φ*. Une application $q : E \to \mathbb{K}$ est appelée une *forme quadratique* quand il existe une forme bilinéaire φ sur E telle que q soit la forme quadratique associée à φ.

EXEMPLES 2.10. La forme quadratique associée à la forme bilinéaire définie par

$$\varphi_1(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

est q_1 telle que

$$q_1(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \quad x \in \mathbb{K}^n$$

[1]Rappelons que la matrice carrée A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.

La forme quadratique associée à une forme bilinéaire alternée sur E est la fonction constante nulle sur $E \times E$.

REMARQUE 2.11. Il n'y a pas unicité de la forme bilinéaire correspondant à une forme quadratique q. De fait, on peut ajouter à une forme bilinéaire φ toute forme bilinéaire alternée sans changer la forme quadratique correspondante. On peut montrer (cf Exercice 6) que l'ensemble des formes bilinéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Soit q une forme quadratique et φ sa forme bilinéaire associée. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, alors

$$q(\lambda x) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 q(x).$$

On dit qu'une forme quadratique est *homogène de degré* 2. On a de plus l'identité remarquable suivante:

$$q(x+y) = \varphi(x+y, x+y) = q(x) + q(y) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x). \tag{7}$$

En utilisant la même identité, où y est remplacé par $-y$, on en déduit *l'identité du parallèlogramme*:

$$q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y)).$$

De plus, si on suppose φ symmétrique, et que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou n'importe quel corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, ce qui permet de diviser par 2 dans $\mathbb{K}$) (7) s'écrit:

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right). \tag{8}$$

THÉORÈME 2.12. *On suppose* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soit* q *une forme quadratique sur* E. *Alors il existe une* unique *forme bilinéaire symétrique* φ *telle que*

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x,x) = q(x).$$

Cette forme bilinéaire φ *est donnée par la formule* (8).

DÉFINITION 2.13. Si q est une forme quadratique, la forme bilinéaire symétrique définie par (8) est appelée *forme polaire* de q.

DÉMONSTRATION. *Unicité.* Soit φ une forme bilinéaire symétrique associée à q. Alors φ doit vérifier (8), ce qui implique l'unicité.
Existence. Puisque q est une forme quadratique, il existe une forme bilinéaire ψ sur E telle que $q(x) = \psi(x,x)$ pour tout x de E. On définit φ par la formule (8). Alors d'une part

$$\varphi(x,x) = \frac{1}{2}\left(q(2x) - q(x) - q(x)\right) = \frac{1}{2}(4q(x) - 2q(x)) = q(x)$$

(où dans la deuxième inégalité, on a utilisé que q était homogène de degré 2). Et d'autre part, par la formule (8) définissant φ, et la formule (7) appliquée à ψ,

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(\psi(x,y) + \psi(y,x)\right), \tag{9}$$

ce qui montre que φ est bien bilinéaire (puisque ψ l'est). $\square$

EXEMPLE 2.14. On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique définie par

$$q(x) = x_1 x_2 + x_3^2.$$

Alors la forme polaire de q est donnée par

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + x_3y_3.$$

REMARQUE 2.15. Soit ψ une forme bilinéaire sur E, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors la formule (9) définie une forme bilinéaire symétrique, appelée *symétrisée* de ψ, et qui est l'unique forme bilinéaire symétrique de même forme quadratique que ψ (cf aussi l'exercice 6).

3. Orthogonalité, noyau

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.

3.a. Orthogonalité.

DÉFINITION 3.1. Les vecteurs u et v de E sont dits *orthogonaux* (pour φ) lorsque $\varphi(u,v) = 0$. On note alors $u \perp v$ (ou $u \perp^{\varphi} v$ lorsqu'il y a une ambiguïté sur φ). Deux sous-ensembles U et V de E sont dits orthogonaux lorsque

$$\forall u \in U,\ \forall v \in V, \quad u \perp v.$$

On note de nouveau $U \perp V$. Enfin, une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est dite orthogonale lorsque les éléments de $\mathcal{F}$ sont orthogonaux deux à deux.

EXERCICE 3.2. On considère la forme bilinéaire symétriques sur $\mathbb{R}[X]$.

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

A quelle condition sur a les polynômes X^2 et $X - a$ sont-ils orthogonaux?

3.b. Orthogonal.

DÉFINITION 3.3. Soit F une partie de E. L'orthogonal de F pour φ est l'ensemble

$$F^{\perp\varphi} = \{x \in E \text{ t.q. } \forall y \in F,\ \varphi(x,y) = 0\}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la forme bilinéaire φ, on note simplement $F^{\perp}$.

PROPOSITION 3.4. *L'ensemble $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

DÉMONSTRATION.

$$F^{\perp} = \bigcap_{x \in F} \{x\}^{\perp},$$

et il suffit donc de vérifier que $\{x\}^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E pour tout $x \in E$. Or c'est précisément le noyau de la forme linéaire sur E: $y \mapsto \varphi(x,y)$, qui est bien un sous-espace vectoriel. □

EXERCICE 3.5. Montrer que $\{x\}^{\perp}$ est de dimension $\dim E$ ou $\dim E - 1$.

EXERCICE 3.6. Soit F, G des parties de E. Vérifier les propriétés suivantes:

$$F \subset (F^{\perp})^{\perp}, \quad F^{\perp} = (\operatorname{vect} F)^{\perp}, \quad F \subset G \Longrightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}.$$

La proposition suivante découle de la deuxième égalité de l'exercice:

Proposition 3.7. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie p, et $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F. Alors*

$$F^\perp = \{f_1, \dots, f_p\}^\perp .$$

Exercice 3.8. Soit φ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

Calculer l'orthogonal de $(0, 1, 1)$ pour φ.

Exercice 3.9. Soit $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ (c'est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$, cf chapitre suivant). Donner une base de l'orthogonal de $(0, 1, 1)$ et de

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right\}^\perp$$

pour cette forme bilinéaire symétrique.

Définition 3.10. Le cône isotrope de la forme quadratique φ est l'ensemble

$$C_\varphi = \{x \in E,\ \varphi(x, x) = 0\} = \left\{x \in E,\ x \in \{x\}^\perp\right\} .$$

Exercice 3.11. Soit φ défini comme dans l'exercice 3.8. Calculer le cône isotrope de φ.

3.c. Noyau.

Définition 3.12. On appelle *noyau* de φ le sous-espace vectoriel de E: $E^{\perp\varphi}$, c'est à dire le sous-espace vectoriel de E défini par:

$$\{x \in E,\ \forall y \in E, \quad \varphi(x, y) = 0\} .$$

On dit que φ est *non dégénérée* quand son noyau est réduit à $\{0_E\}$ (et *dégénérée* dans le cas contraire).

Exercice 3.13. Soit les formes bilinéaires symétriques définies sur $\mathbb{R}^3$ par $\varphi_1(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$, $\varphi_2(x, y) = (x_1 + x_2) y_3 + x_3 (y_1 + y_2)$. Calculer leurs noyaux. Ces formes bilinéaires sont-elles dégénérées?

Proposition 3.14. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$. Le noyau de φ est le sous-espace vectoriel de E formé des vecteurs dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont des éléments de* $\ker A$.

Démonstration. Soit $y \in E$, et Y ses coordonnées dans E. Alors

$$y \in E^{\perp\varphi} \iff \forall x \in E,\ \varphi(x, y) = 0 \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1},\ {}^t XAY = 0 \iff AY = 0.$$

□

Exercice 3.15. Soit φ_1 et φ_2 les formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^3$ définies dans l'exercice 3.13. Déterminer leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, puis les noyaux de ces matrices. Vérifier que ces résultats sont compatibles avec la proposition 3.14

Proposition 3.16. *Soit φ une forme bilinéaire non-dégénérée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

$$\dim F^\perp + \dim F = \dim E.$$

Cette proposition sera prouvée en travaux dirigés (Exercice 7 des travaux dirigés de fin de chapitre).

4. Réduction de Gauss et signature

4.a. Réduction de Gauss. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou n'importe quel corps de caractéristique $\neq 2$.

Soit q une forme quadratique symétrique sur $\mathbb{K}^n$. La réduction de Gauss permet d'écrire φ comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{K}^n$. On obtient une telle écriture par récurrence sur n. Lorsque $n = 1$, on a forcément $q(x) = ax^2$ pour un $a \in \mathbb{K}$ et il n'y a rien à faire.

On fixe $n \geq 2$. Supposons que pour tout $p \leq n-1$, on puisse écrire toute forme quadratique sur $\mathbb{K}^p$ comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$. Soit $A = [a_{i,j}]$ la matrice de q dans $\mathbb{K}^n$. On a donc

$$q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

On distingue deux cas.

Premier cas. Il existe i tel que $a_{i,i} \neq 0$. Supposons (quitte à réordonner les indices) $a_{1,1} \neq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{1,1} x_1^2 + 2x_1 \sum_{2 \leq j \leq n} a_{1,j} x_j + \sum_{2 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \\ &= a_{1,1} \left(x_1 + \sum_{2 \leq j \leq n} \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} x_j \right)^2 - \frac{1}{a_{1,1}} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_j \right)^2 + \sum_{2 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \\ &= a_{1,1} (L_1(x))^2 + q_2(x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

où L_1 est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$, et q_2 est une forme quadratique dépendant seulement des variables $(x_2, \ldots, x_n)$. sur $\mathbb{K}^{n-1}$. Par hypothèse de récurrence, on peut écrire:

$$q_2(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=2}^{p} b_k (L_k(x_2, \ldots, x_n))^2,$$

où $(L_k)_{2 \leq k \leq n}$ est une famille de formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{K}^n$, et $b_k \in \mathbb{K}$. On a donc

$$q(x) = a_{1,1} (L_1(x))^2 + \sum_{k=2}^{n} L_k(x),$$

où on a noté (avec un léger abus de notation):

$$L_k(x) = L_k(x_2, \ldots, x_n).$$

Il reste à montrer que la famille $(L_k)_{1 \leq k \leq n}$ est libre, ce qui se vérifie facilement en utilisant que la famille $(L_k)_{2 \leq k \leq n}$ est libre, que $L_1(x)$ s'écrit $x_1 + L_1'(x_2, \ldots x_n)$, et que les L_k ne dépendent pas de x_1.

Deuxième cas. Pour tout i, $a_{i,i} = 0$. Supposons q non identiquement nul (sinon il n'y a rien à faire). Alors il existe $i \neq j$ avec $a_{i,j} \neq 0$. On suppose (quitte à réordonner les indices) $a_{1,2} \neq 0$. On écrit q en séparant le terme dépendant de x_1 et x_2, les termes dépendant de x_1 (mais pas de x_2), ceux dépendant de x_2 (mais pas de x_1) et ceux ne dépendant ni de x_1 ni de x_2:

$$\begin{aligned}
q(x) &= 2a_{1,2}x_1x_2 + 2x_1 \sum_{3\le j\le n} a_{1,j}x_j + 2x_2 \sum_{3\le j\le n} a_{2,j}x_j + \sum_{3\le j\le n} x_ix_j \\
&= 2a_{1,2}\left(x_1 + \sum_{3\le j\le n} \frac{a_{2,j}}{a_{1,2}}x_j\right)\left(x_2 + \sum_{3\le j\le n} \frac{a_{1,j}}{a_{1,2}}x_j\right) \\
&\qquad \underbrace{-\frac{2}{a_{1,2}}\left(\sum_{3\le j\le n} a_{1,j}x_j\right)\left(\sum_{3\le j\le n} a_{2,j}x_j\right) + \sum_{3\le j\le n} x_ix_j}_{q_2(x_3,\dots,x_n)},
\end{aligned}$$

où q_2 est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^{n-2}$. On utilise ensuite l'identité $4AB = (A+B)^2 - (A-B)^2$, pour écrire:

$$2a_{1,2}\left(x_1 + \sum_{3\le j\le n} \frac{a_{2,j}}{a_{1,2}}x_j\right)\left(x_2 + \sum_{3\le j\le n} \frac{a_{1,j}}{a_{1,2}}x_j\right) = \frac{a_{1,2}}{2}(L_1^2 - L_2^2),$$

où L_1, L_2 sont des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$, avec $L_1(x) = x_1 - x_2 + L_1'(x_3, \dots, x_n)$, $L_2(x) = x_1 + x_2 + L_2'(x_3, \dots, x_n)$, où les L_j' désignent des formes linéaires sur $\mathbb{K}^{n-2}$. En utilisant que par hypothèse de récurrence, $q_3 = \sum_{k=3}^n b_k(L_k)^2$, où les L_k sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{K}^{n-2}$ en les variables $(x_3, \dots, x_n)$, que l'on identifie à des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$, on obtient

$$q(x) = \frac{a_{1,2}}{2}(L_1^2 - L_2^2) + \sum_{k=3}^n b_k L_k^2.$$

Il reste à vérifier que les formes linéaires $(L_k)_{1\le k\le n}$ sont indépendantes, ce qui découle de l'indépendance des formes linéaires $(L_k)_{3\le k\le n}$, du fait que ces formes linéaires ne dépendent que de $x_3, \dots, x_n$, et des formules $L_1 = x_1 - x_2 + L_1'$, $L_2 = x_1 - x_2 + L_2'$, où L_1' et L_2' ne dépendent que de $(x_3, \dots, x_n)$.

EXEMPLE 4.1. L'application de l'algorithme précédent à la forme quadratique $q_1(x_1, x_2) = x_1x_2$ est donnée par

$$x_1x_2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2. \tag{10}$$

Et à la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$: $q_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ donne

$$q_2(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2.$$

EXERCICE 4.2. Appliquer la réduction de Gauss à $q(x) = x_2^2 + 4x_1x_3 + x_1x_2 + 8x_3^2$ ($x \in \mathbb{R}^3$). Déterminer la signature de cette forme quadratique.

4.b. Loi d'inertie de Sylvester. La décomposition d'une forme quadratique en combinaison linéaire de formes linéaires indépendantes n'est pas unique. On peut par exemple réécrire la forme quadratique q_1 de l'exemple 4.1:

$$x_1x_2 = \frac{1}{8}(x_1 + 2x_2)^2 - \frac{1}{8}(x_1 - 2x_2)^2. \tag{11}$$

On va mettre introduire une quantité, la signature, qui est commune à toutes ses décompositions, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit donc q une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$, que l'on écrit, à l'aide de la réduction de Gauss:

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \left(L_i(x)\right)^2 ,$$

où les L_i sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, telles que $(L_1, \dots, L_p)$ est libre. Lorsque $a_i > 0$, on peut écrire

$$a_i(L_i)^2 = (\sqrt{a_i} L_i)^2.$$

Lorsque $a_i < 0$,

$$a_i(L_i)^2 = -(\sqrt{-a_i} L_i)^2.$$

Donc quitte à réordonner et renormaliser les formes linéaires L_i, on peut écrire:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{\sigma_+}(L_i(x))^2 - \sum_{i=\sigma_++1}^{\sigma_++\sigma_-}(L_i(x))^2, \tag{12}$$

où les L_i sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4.3 (Loi d'inertie de Sylvester). *Les entiers σ_+ et σ_- apparaissant dans* (12) *ne dépendent pas de la décomposition choisie de la forme* (12).

En d'autres termes, si

$$\sum_{i=1}^{\sigma_+}(L_i(x))^2 - \sum_{i=\sigma_++1}^{\sigma_++\sigma_-}(L_i(x))^2 = \sum_{i=1}^{\sigma'_+}(L'_i(x))^2 - \sum_{i=\sigma'_++1}^{\sigma'_++\sigma'_-}(L'_i(x))^2,$$

pour deux familles libres de formes linéaires $(L_1, \dots, L_{\sigma_++\sigma_-})$ et $(L'_1, \dots, L'_{\sigma'_++\sigma'_-})$, alors $\sigma_+ = \sigma'_+$ et $\sigma_- = \sigma'_-$ (même si les formes linéaires L_j et L'_j ne sont pas forcément égales, cf (10) et (11).

Définition 4.4. Le couple (σ_+, σ_-) est appelé *signature* de q. C'est un couple d'entiers tels que $\sigma_- + \sigma_+ \leq n = \dim E$.

Pour montrer le théorème 4.3, on peut par exemple observer que σ_+ est la dimension maximale que peut avoir un sous-espace vectoriel F de E tel que

$$\forall x \in F \setminus \{0_E\}, \quad q(x) > 0,$$

et de même, σ_- est la dimension maximale que peut avoir F avec la propriété

$$\forall x \in F \setminus \{0_E\}, \quad q(x) < 0.$$

(Ces propriétés qui caractérisent σ_+ et σ_- donnent une définition alternative de la signature).

Exemple 4.5. Soit σ_+ et σ_- deux entiers naturels tels que $\sigma_+ + \sigma_- \leq n$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$q(x) = \sum_{j=1}^{\sigma_+} x_j^2 - \sum_{j=\sigma_++1}^{\sigma_++\sigma_-} x_j^2.$$

Alors q est de signature (σ_+, σ_-).

Exercice 4.6. Déterminer les signatures des formes quadratiques apparaissant dans l'exemple 4.1 et l'exercice 4.2.

Proposition 4.7. *Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, et φ sa forme polaire. Alors φ est non-dégénérée si et seulement si la signature (σ_+, σ_-) de q vérifie $\sigma_+ + \sigma_- = n$.*

Démonstration. On note $\sigma = \sigma_+ + \sigma_-$. Par définition de la signature, il existe une famille libre $(L_i)_{1\leq i\leq\sigma}$ de formes linéaires telle que

$$q(x) = \sum_{j=1}^{\sigma_+}(L_i(x))^2 - \sum_{j=1+\sigma_+}^{\sigma}(L_i(x))^2.$$

Soit φ la forme polaire de q, i.e.

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{\sigma_+} L_i(x)L_i(y) - \sum_{i=1+\sigma_+}^{\sigma} L_i(x)L_i(y), \quad (x,y) \in E^2.$$

On considère l'application $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^\sigma$ définie par

$$\mathcal{L}(x) = (L_1(x), \dots, L_\sigma(x)).$$

Si $\sigma < n$, le théorème du rang montre que le noyau de $\mathcal{L}$ est au moins de dimension 1. Soit x un élément non nul de ce noyau. On a $L_1(x) = \ldots = L_\sigma(x)$, ce qui implique que

$$\forall y \in E, \quad \varphi(x,y) = 0,$$

ou encore que x est dans le noyau de φ. Donc φ est dégénérée.

Supposons maintenant $\sigma = n$. Montrons d'abord que $\mathcal{L}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. Pour cela, en raisonnant sur les dimensions, il suffit de vérifier que le noyau de $\mathcal{L}$ est réduit à $\{0\}$. Soit donc x un élément de ce noyau. Cela signifie que $L_i(x) = 0$ pour tout i entre 1 et n. Puisque $(L_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (qui est de dimension n), c'est une base de cet espace. On en déduit que $L(x) = 0$ pour tout forme linéaire L sur $\mathbb{R}^n$. En particulier (les coordonnées sont des formes linéaires) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Finalement $x = 0$ comme annoncé.

Soit maintenant x un élément du noyau de φ. D'après ce qui précède, on peut trouver $y \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$1 \leq i \leq \sigma_+ \Longrightarrow L_i(y) = L_i(x), \quad 1 + \sigma_+ \leq i \leq n \Longrightarrow L_i(y) = -L_i(x).$$

On a donc

$$0 = \varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(L_i(x))^2,$$

ce qui implique $L_1(x) = \ldots = L_n(x) = 0$, donc $\mathcal{L}(x) = 0$, i.e. $x = 0$ puisque $\mathcal{L}$ est un automorphisme. On a bien montré que φ est non dégénéré. $\square$

5. Travaux dirigés

EXERCICE 1.

a. Chacune des applications suivantes de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est-elle une forme bilinéaire? Si c'est le cas, donner sa forme quadratique associée. Déterminer si elle est symétrique, antisymétrique. Donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ indiquée.

$$\varphi_0(x,y) = x_1y_2 - 6x_2y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3, \quad E = \mathbb{R}^3,\ \mathcal{B} = \text{base canonique}$$
$$\varphi_1(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2, \quad E = \mathbb{R}^3,\ \mathcal{B} = \text{base canonique}$$
$$\varphi_2(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1, \quad E = \mathbb{R}^2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$\varphi_3(x,y) = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2, \quad E = \mathbb{R}^2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$\varphi_4(x,y) = \int_0^1 P'(x)Q'(x)dx, \quad E = \mathbb{R}_3[X],\ \mathcal{B} = \left(X^k\right)_{0\le k\le 3}.$$

b. Déterminer les noyaux des formes quadratiques φ_1 et φ_4. Dire si elles sont dégénérées.

c. En utilisant la formule de changement de base, déterminer la matrice de φ_1 dans la base $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

EXERCICE 2. Déterminer les formes polaires associées aux formes quadratiques suivantes:

$$q_1(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3x_4, \quad x \in \mathbb{R}^4$$
$$q_2(x) = -x_1x_2 + 2x_2x_3 + 3x_1x_3, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

EXERCICE 3. Ecrire la réduction de Gauss des formes quadratiques suivantes. Déterminer leurs signatures. Dire si elles sont non-dégénérées.

$$q_1(x) = -x_2^2 - 2x_1x_2,\ \text{sur } \mathbb{R}^2$$
$$q_2(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3,\ \text{sur } \mathbb{R}^3$$
$$q_3(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 \text{ sur } \mathbb{R}^3$$
$$q_4(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3^2,\ \text{sur } \mathbb{R}^3.$$

EXERCICE 4. Soit q forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$. Déterminer la signature de q en fonction des paramètres $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$.

EXERCICE 5 (Espace de Lorentz). On note $X = (x,y,z,t)$ un élément de l'espace $\mathbb{R}^4$. Sur $\mathbb{R}^4$, on considère la forme quadratique q définie par

$$q(X) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

On note φ sa forme bilinéaire associée.

a. Quelle est la signature de q? Exprimer $\varphi(X,X')$ en fonction des coordonnées de X et X'.

b. Calculer l'orthogonal pour φ du singleton $\{(1,1)\}$.

c. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x = 2t$. Déterminer l'orthogonal de F pour φ.

d. Montrer que $q_{\restriction F}$ est une forme quadratique sur F, dont on déterminera la signature.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

a. Vérifier que l'ensemble des formes bilinéaires sur E est un sous-espace vectoriel de dimension n de l'espace vectoriel des fonctions de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$. Dans la suite de cet exercice, on notera V cet espace vectoriel.

b. Montrer que V est de dimension n^2. On pourra utiliser les matrices de représentations.

c. Montrer que l'ensemble A des formes bilinéaires antisymétriques sur E et l'ensemble S des formes bilinéaires symétriques sur E sont des sous-espaces vectoriels de V. Montrer que $\dim A = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$, et que

$$V = A \oplus S.$$

On pourra de nouveau utiliser les matrices de représentations.

d. Soit $\varphi \in V$. Exprimer, en fonction de φ et $(x, y) \mapsto \varphi(y, x)$:

- la projection de φ sur A, parallèlement à S,
- la projection de φ sur S, parallèlement à A.

Appliquer ces formules à la forme bilinéaire φ_0 de la question a de l'exercice 1.

Exercice 7. Soit φ une forme quadratique non-dégénérée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.

a. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $L : E \mapsto \mathbb{K}^n$ defined by

$$L(x) = (\varphi(e_1, x), \dots, \varphi(e_n, x)) .$$

Justifier que L est une application linéaire. Calculer son noyau, et montrer que c'est un isomporphisme de E dans $\mathbb{K}^n$.

b. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ de E. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

$$G = \{y \in \mathbb{K}^n \ : \ y_1 = \ldots = y_p = 0\} .$$

Quelle est la dimension de G? Montrer que $L^{-1}(G) = F^{\perp\varphi}$.

c. Montrer que $\dim F + \dim F^{\perp\varphi} = n$.

CHAPITRE 4

Espaces euclidiens

À la fin de ce chapitre, vous devrez notamment savoir :

- Utiliser les propriétés des produits scalaires et des normes euclidiennes.
- Manier les bases orthogonales et orthonormales.
- Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- Déterminer une distance à un sous-espace à partir d'une projection orthogonale.

Dans tout ce chapitre, on considèrera exclusivement des espaces vectoriels *réels*. En particulier, E désignera toujours un espace vectoriel réel. Mentionnons qu'il existe une théorie analogue à celle développée ici dans le cas complexe: il s'agit de la théorie des espaces *hermitiens*.

1. Norme euclidienne

1.a. Forme bilinéaire positive.

DÉFINITION 1.1. La forme bilinéaire φ sur E (ou sa forme quadratique associée) est dite *positive* quand

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x,x) \geq 0.$$

Elle est dite *définie positive* quand

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad \varphi(x,x) > 0.$$

Donc, si φ est définie positive, le seul vecteur de E tel que $\varphi(x,x) = 0$ est le vecteur nul.

EXEMPLE 1.2. La forme bilinéaire φ_1 définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\varphi_1(x,y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ est définie positive. La forme bilinéaire φ_3 définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi_3(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q'(t)dt$ est définie positive. Les formes bilinéaires définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\varphi_5(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2, \quad \varphi_6(x,y) = x_1y_2$$

ne sont pas positives. En effet, $\varphi_5((0,1),(0,1)) = -1$ et $\varphi_6((-1,1),(-1,1)) = -1$. La forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\psi(x,y) = x_1y_1$ est positive, mais pas définie positive (car $\psi((0,1),(0,1)) = 0$).

REMARQUE 1.3. Une forme bilinéaire φ définie positive est non dégénérée. En effet, si x est dans le noyau de φ, on a en particulier $\varphi(x,x) = 0$ et donc $x = 0_E$.

DÉFINITION 1.4. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positive* quand

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geq 0.$$

Elle est *définie positive* quand

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad {}^tXAX > 0.$$

En d'autres termes, les matrices positives (respectivement définies positives) sont les matrices des formes bilinéaires positives (respectivement définies positives).

1.b. Produit scalaire.

DÉFINITION 1.5. Un *produit scalaire (euclidien)* sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

EXEMPLES 1.6. Les formules

$$\varphi_1(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \text{ et } \varphi_3(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

définissent des produits scalaires, respectivement sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}_n[X]$. Le produit scalaire φ_1 est appelé *produit scalaire usuel* de $\mathbb{R}^n$. La forme bilinéaire ψ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\psi(x,y) = x_1 y_1$$

n'est pas un produit scalaire: elle est symétrique et positive, mais pas définie positive.

Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E (et en particulier le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$) est souvent noté $(x,y) \mapsto x \cdot y$ ou $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$. Le nombre $x \cdot y$ est appelé *produit scalaire des vecteurs x et y.*

DÉFINITION 1.7. Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé *espace euclidien* lorsqu'il est de dimension finie et *espace pré-hilbertien réel* lorsqu'il est de dimension infinie.

1.c. Norme.

DÉFINITION 1.8. Une *norme* sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application $N : E \to [0, +\infty[$ vérifiant les trois propriétés suivantes

(i) $\forall u \in E,\ N(u) = 0 \Longrightarrow u = 0_E$.
(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$.
(iii) $\forall (u,v) \in E^2,\ N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (inégalité triangulaire).

Le couple (E, N), où N est une norme sur E est appelé *espace vectoriel normé.* Si $u \in E$, $N(u)$ est appelé norme du vecteur u.

On utilise souvent une notation de type "valeur absolue", mais avec deux barres, pour dénoter une norme $\|\cdot\|$ (parfois avec un indice). La norme d'un vecteur u est donc notée $\|u\|$.

DÉFINITION 1.9. La *distance* de deux vecteurs u et v dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est la quantité $\|u - v\|$.

EXEMPLE 1.10. Les formules suivantes définissent deux normes sur $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

EXERCICE 1.11. Démontrer que ce sont bien des normes.

1.d. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Nous allons montrer que la racine carrée de la forme quadratique associée au produit scalaire définit une norme sur un espace euclidien. Pour cela, nous aurons besoin de la propriété fondamentale suivante:

THÉORÈME 1.12. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. Alors*

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad |\langle x, y\rangle|^2 \leq |\langle x, x\rangle| \, |\langle y, y\rangle| \, ,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

DÉMONSTRATION. Notons pour simplifier $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.
Si $y = 0_E$, la propriété énoncé est triviale. De fait, il y a égalité et x et y sont colinéaires.
Supposons $y \neq 0_E$. Alors $\|y\| > 0$ car le produit scalaire est défini positif. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y\rangle + \lambda^2 \|y\|^2.$$

C'est un trinôme du second degré (puisque $\|y\| \neq 0$) en λ qui est toujours positif. Sont discriminant est donc négatif. Ceci signifie exactement:

$$\langle x, y\rangle^2 - \|y\|^2 \|x\|^2 \leq 0,$$

qui est la propriété recherchée. Le discriminant est nul si et seulement si le trinôme a une racine, donc si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x + \lambda y\| = 0.$$

Puisque le produit scalaire est défini positif, ceci est bien équivalent au fait qu'il existe λ tel que $x + \lambda y = 0_E$ i.e. (puisque y est non nul) que x et y sont colinéaires. □

EXERCICE 1.13. Vérifier que l'inégalité de Cauchy-Schwarz (mais pas le critère d'égalité) reste vrai si le produit scalaire est remplacée par une forme bilinéaire symétrique positive (non nécessairement définie positive).

EXERCICE 1.14. En calculant la valeur minimum du trinôme considéré dans la preuve précédente, montrer que

$$\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 = \|z\|^2,$$

pour un certain $z \in E$ que l'on déterminera.

EXEMPLE 1.15. Pour des réels $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$,

$$\left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2.$$

Si f et g sont des fonctions continues sur $[a,b]$, $a < b$,

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}.$$

1.e. Norme euclidienne.

THÉORÈME 1.16. *Soit* $\big(E, \langle\cdot,\cdot,\rangle\big)$ *un espace euclidien ou pré-hilbertien réel. On note* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. *Alors* $\|\cdot\|$ *est une norme sur* E*, appelée* norme euclidienne.

DÉMONSTRATION. Remarquons que par positivité du produit scalaire, la quantité $\|x\|$ est bien définie comme racine carrée d'un nombre positif. Elle est positive par construction. De plus, le produit scalaire étant défini positif, on a

$$\|x\| = 0 \Longrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0_E.$$

Par ailleurs, si $\lambda \in \mathbb{R}$, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda^2 \langle x, x\rangle.$$

Pour montrer l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

□

EXEMPLE 1.17. La norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$ est la norme définie par:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

La distance définie par cette norme est la distante usuelle.

Il existe une infinité d'autres normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^n$. Par exemple, si a_1, ..., a_n sont des nombres strictement positifs,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^2}$$

définit une norme euclidenne sur $\mathbb{R}^n$.

EXERCICE 1.18. Dessiner la sphère unité $\{x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| = 1\}$ lorsque $\|\cdot\|$ est la norme

$$\|x\| = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2}.$$

EXEMPLE 1.19. La formule suivant définit une norme euclidienne sur $\mathbb{R}[X]$ (ou sur tout sous-espace de $\mathbb{R}[X]$, par exemple $\mathbb{R}_n[X]$):

$$\|P\| = \sqrt{\int_0^1 P^2(x)dx}.$$

La même formule définit une norme sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.f. Quelques égalités et inégalités. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien ou pré-hilbertien réel. On rappelle les formules suivantes, que l'on peut démontrer par calcul direct:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

(Les formules de la dernière ligne, déjà vues, sont des égalités de polarisation, permettant de retrouver le produit scalaire à partir de la norme euclidienne). On a aussi les deux inégalités triangulaires:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|.$$

La première ce ces inégalités à été démontrée à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La deuxième découle de la première, appliquée à $X = x - y$, $Y = y$ puis à $X = y - x$, $Y = x$.

2. Orthogonalité

2.a. Vecteurs, familles et parties orthogonaux. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien ou pré-hilbertien réel. On a défini au chapitre 3, §3, pour des formes bilinéaires symétriques quelconques, les notions de vecteurs orthogonaux, de parties orthogonales ainsi que d'orthogonal d'un sous-ensemble de E. Ces notions, ainsi que toutes les propriétés montrées au chapitre 3, §3 restent bien sûr valables dans le cas particulier des produits scalaires euclidiens.

Exemple 2.1. Les vecteurs $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire usuel. Les vecteurs u et $w = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ne le sont pas.

On munit maintenant $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle_s = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + x_2 y_2.$$

Pour ce produit scalaire, les vecteurs u et v ne sont pas orthogonaux, mais les vecteurs u et w le sont.

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$. Alors X et $\frac{2}{3} - X$ sont orthogonaux.

2.b. Théorème de Pythagore.

Théorème 2.2. *Soit* $(u_1, \ldots, u_p)$ *une famille de vecteurs orthogonaux. Alors*

$$\|u_1 + \ldots + u_p\|^2 = \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_p\|^2.$$

Démonstration. Ceci découle immédiatement de l'orthogonalité des vecteurs et de la bilinéarité du produit scalaire:

$$\|u_1 + \ldots + u_p\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{p} u_j, \sum_{k=1}^{p} u_k \right\rangle = \sum_{1 \leq \substack{j \\ k} \leq p} \underbrace{\langle u_j, u_k \rangle}_{0 \text{ si } j \neq k} = \sum_{j=1}^{p} \langle u_j, u_j \rangle = \sum_{j=1}^{p} \|u_j\|^2.$$

□

Exemple 2.3. Soit ABC un triangle rectangle en A. Alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

C'est le théorème de Pythagore usuel, que l'on obtient en appliquant le théorème 2.2 aux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exemple 2.4. Appliquons le théorème de Pythagore aux familles de 2 vecteurs de l'exemple 2.1:

$$\left\|\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right\|^2 + \left\|\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\|^2 = \left\|\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\|^2 = 4$$

(où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^2$).

$$\left\|\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right\|_s^2 + \left\|\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\|_s^2 = \left\|\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right\|_s^2 = 2.$$

$$\int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - t\right)^2 dt = \int_0^1 \frac{4}{9} dt = \frac{4}{9}.$$

Exemple 2.5. La grande diagonale d'un cube de côté c (reliant deux sommets opposés) a pour longueur:

$$\sqrt{c^2 + c^2 + c^2} = c\sqrt{3}.$$

Une conséquence importante du théorème de Pythagore est la suivante:

Corollaire 2.6. *Soit* $(u_1, \ldots, u_p)$ *une famille orthogonale* sans vecteur nul. *Alors* $(u_1, \ldots, u_p)$ *est libre.*

Démonstration. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j = 0.$$

On remarque que la famille $(\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_p u_p)$ est orthogonale. Par le théorème de Pythagore,

$$0 = \left\| \sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^2 \|u_j\|^2.$$

On en déduit (puisque par hypothèse $\|u_j\| \neq 0$ pour tout j) $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$. On a bien montré que la famille était libre. □

2.c. Base orthogonale. Coordonnées.

Définition 2.7. Une *base orthogonale* d'un espace euclidien E est une base $\mathcal{B}$ de E dont les éléments sont orthogonaux 2 à 2. Si de plus tous ces éléments sont de norme 1, on dit que $\mathcal{B}$ est une *base orthonormale.*

Remarque 2.8. Soit E un espace euclidien de dimension n. Alors toute famille orthogonale de cardinal n sans vecteur nul est une base orthogonale de E. En effet, par le Corollaire 2.6, une telle famille est libre. On en déduit que c'est une base parce que son cardinal est égal à la dimension de E.

Exemple 2.9. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour le produit scalaire euclidien usuel.

La base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas orthogonale pour le produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

La famille $(X, \frac{2}{3} - X)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire précédent. Ce n'est pas une base orthonormale.

Proposition 2.10. *Soit* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base orthonormale de l'espace euclidien* E *et* $x \in E$. *Les coordonnées de* x *dans* $(e_1, \ldots, e_n)$ *sont données par* $\big(\langle x, e_j\rangle\big)_{1 \leq j \leq n}$.

Démonstration. Soit $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ les coordonnées de x dans E. Alors

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

On fixe $j \in \{1, \dots, n\}$ et on fait le produit scalaire de cette égalité avec e_j. On obtient

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_k, e_j \rangle = x_j,$$

puisque $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{j,k}$. □

EXEMPLE 2.11. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors on a bien

$$x_j = \langle x, e_j \rangle,$$

(où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien usuel).

COROLLAIRE 2.12. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien E, et $x \in E$. Alors*

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle^2.$$

DÉMONSTRATION. On a

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j,$$

et la famille de vecteurs $\Big(\langle x, e_j \rangle e_j \Big)_{1 \leq j \leq n}$ est orthogonale. Le résultat découle alors du théorème de Pythagore. □

EXERCICE 2.13. Comme dans l'exemple 2.1, on munit maintenant $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle_s = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + x_2 y_2.$$

Soit $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right)$ et $w = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$.

Montrer que (u, w) est une base orthonormale de E. Donner les coordonnées d'un vecteur $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^2$ dans cette base. Calculer $\|x\|_s^2$.

REMARQUE 2.14. Soit $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base orthogonale de E. Alors $\mathcal{B}' = \left(\frac{e_j}{\|e_j\|} \right)_{1 \leq j \leq n}$ est une base orthonormale de E. Si $x \in E$, les coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$ sont $\left(\frac{\langle e_j, x \rangle}{\|e_j\|} \right)_{1 \leq j \leq n}$. En d'autres termes:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle e_j, x \rangle}{\|e_j\|^2} e_j.$$

Les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ sont donc $\left(\frac{\langle e_j, x \rangle}{\|e_j\|^2} \right)_{1 \leq j \leq n}$.

EXERCICE 2.15. Dans le contexte de la remarque précédente, Calculer $\|x\|^2$.

EXERCICE 2.16. On se place dans l'espace E des fonctions 2π-périodiques f sur $\mathbb{R}$ qui sont de la forme

$$f(x) = a + b \cos x + c \sin x.$$

Pour $(f, g) \in E$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx.$$

d. Montrer que c'est un produit scalaire sur E, et que $(1, \cos, \sin)$ est une base orthogonale pour ce produit scalaire.

e. En déduire une base orthonormale de E. Si $f = a + b\cos + c\sin$, exprimer a, b, c et $\|f\|$ en utilisant des produits scalaires avec les fonctions 1, cos et sin.

2.d. Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Un espace euclidien admet-il toujours une base orthonormale? La réponse _positive_ est donnée par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt:

THÉORÈME 2.17. *Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre d'un espace euclidien (ou pré-hilbertien réel) E. Alors il existe une famille libre* orthogonale $(f_1, \dots, f_p)$ *telle que*

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad f_j \in \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_j).$$

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille libre orthogonale de E ayant $p = \dim E$ éléments, donc une base orthogonale de E. Quitte à normaliser les vecteurs f_j, on obtient:

COROLLAIRE 2.18. *Tout espace euclidien admet une base orthonormale.*

DÉMONSTRATION. La démonstration est importante, puisqu'elle donne une méthode de construction de la famille orthogonale $(f_j)_{1\leq j\leq p}$.

On construit la famille libre orthogonale $(f_j)_{1\leq j\leq p}$ par récurrence, de la manière suivante.

On pose $f_1 = e_1$.

Soit $j \geq 2$. Supposons construits $(f_1, \dots, f_{j-1})$ avec les propriétés demandées. On cherche f_j de la forme

$$f_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k f_k.$$

On veut $\langle f_j, f_\ell \rangle = 0$ pour tout entier ℓ entre 1 et $j-1$. En d'autres termes, en utilisant l'orthogonalité des vecteurs $(f_k)_{1\leq k\leq j-1}$,

$$\forall \ell \in \{1, \dots, j-1\}, \quad 0 = \langle e_j, f_\ell \rangle + \alpha_\ell \|f_\ell\|^2,$$

c'est à dire $\alpha_\ell = -\frac{\langle e_j, f_\ell \rangle}{\|f_\ell\|^2}$. On obtient donc le vecteur

$$f_j = e_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\langle e_j, f_k \rangle}{\|f_k\|^2} f_k,$$

qui vérifie les propriétés demandées.

Pour une interprétation de f_j en terme de projection, voir la remarque 2.24 plus bas. $\square$

Un exemple important d'espace euclidien est donné par un sous-espace vectoriel de dimension fini F d'un espace euclidien ou pré-hilbertien réel E, muni de la restriction du produit scalaire de E à $F \times F$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt peut être utilisé dans ce contexte, par exemple pour construire des bases orthogonales de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, comme dans l'exercice suivant.

EXERCICE 2.19. Construire une base orthonormale (pour le produit scalaire usuelle de $\mathbb{R}^4$) de

$$F = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Donnons un deuxième exemple d'utilisation:

EXERCICE 2.20. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Construire une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ à l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à partir de la base $(1, X, X^2)$. (Voir aussi §4).

2.e. Projection orthogonale.

THÉORÈME 2.21. *Soit F un sous espace vectoriel de dimension fini d'un espace euclidien ou préhilbertien réel E. Alors $F^\perp \oplus F = E$. La projection π_F sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelée projection orthogonale sur F. Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base* orthonormale *de F, on a*

$$\forall x \in E, \quad \pi_F(x) = \sum_{j=1}^{p} \langle e_j, x\rangle e_j.$$

DÉMONSTRATION. Il est facile de voir que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. En effet, si $x \in F \cap F^\perp$, on a $\langle x, x\rangle = 0$, ce qui implique $x = 0_E$.

Pour montrer que $F + F^\perp = E$ lorsque E est de dimension finie, on peut conclure en raisonnant sur les dimensions, par l'égalité $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$, démontrée dans l'exercice 7 du chapitre précédent.

Dans le cas général, on montre l'égalité $E = F + F^\perp$ directement. On fixe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de F (une telle base existe par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt et puisque F est de dimension finie). Pour $x \in E$, on pose

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, x\rangle e_k \in F.$$

Soit $y = x - \varphi(x)$. Montrons $y \in F^\perp$. Pour cela il suffit de vérifier $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, $\langle y, e_j\rangle = 0$ (cf Proposition 3.7). Or

$$\langle y, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, x\rangle\langle e_k, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, x\rangle \delta_{j,k} = 0.$$

Finalement, on a

$$x = \underbrace{y}_{\in F^\perp} + \underbrace{\varphi(x)}_{\in F},$$

ce qui montre comme annoncé que $E = F \oplus F^\perp$, et que φ est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. $\square$

REMARQUE 2.22. On a bien évidemment $\pi_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E - \pi_F$.

REMARQUE 2.23. Lorsque E est un espace euclidien, le théorème implique $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$. Par ailleurs, en l'appliquant le théorème à $F^\perp$, on obtient

$$E = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp.$$

Donc

$$\dim E = \dim F^\perp + \dim (F^\perp)^\perp,$$

ce qui montre que $\dim F = \dim(F^\perp)^\perp$. Puisque $F \subset (F^\perp)^\perp$, on en déduit

$$F = (F^\perp)^\perp.$$

Attention ce raisonnement n'est valable que lorque la dimension de E est finie!

REMARQUE 2.24. Revenons à la preuve du Théorème 2.17. Fixons $j \in \{1, \dots, p\}$, et posons $F_j = \mathrm{vect}(f_1, \dots, f_{j-1}) = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{j-1})$. On a

$$e_j = \underbrace{f_j}_{\in F_j^\perp} + \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{\langle e_j, f_k \rangle}{\|f_k\|^2} f_k}_{\in F_j}$$

En d'autres termes, f_j est exactement la projection orthogonale de e_j sur $\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{j-1})^\perp$.

EXERCICE 2.25. Soit $E = \mathbb{R}^4$ (muni du produit scalaire usuel). On pose

$$F = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Donner $F^\perp$ et π_F (la projection orthogonale sur F).

EXERCICE 2.26. Calculer la projection orthogonale sur le sous-espace F de l'exemple 2.19.

Terminons ce chapitre par une caractérisation de la projection orthogonale sur un espace vectoriel en terme de distance:

THÉORÈME 2.27. *Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien E et $u \in E$. Alors la fonction*

$$x \mapsto \|x - u\|$$

sur F admet un unique minimum global, atteint en $x = \pi_F(u)$.

DÉMONSTRATION. On a

$$u = \pi_F(u) + \pi_{F^\perp}(u).$$

Par le théorème de Pythagore, si $x \in F$,

$$\|u - x\|^2 = \|\pi_F(u) - x\|^2 + \|\pi_{F^\perp}(u)\|^2.$$

On voit que cette quantité est minimale quand $\|\pi_F(u) - x\|$ est minimal, c'est à dire quand $x = \pi_F(u)$. □

3. Travaux dirigés

EXERCICE 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit φ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \lambda(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

a. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.

b. Pour $\lambda = 0$, puis $\lambda = 2$, puis $\lambda = 1$, φ est-il un produit scalaire?

c. Déterminer l'ensemble des réels λ pour lesquels φ est un produit scalaire.

EXERCICE 2. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n des polynômes réels de degré au plus n, $\mathbb{R}_n[X]$. On fixe $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts.

a. Démontrer que

$$\langle P, Q\rangle := \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Est-ce toujours un produit scalaire si les x_k ne sont plus deux à deux distincts?

Exercice 3. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\Big(({}^tA)B\Big)$. Montrer que cela définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à des vecteurs bien choisis, démontrer les inégalités suivantes. Discuter les cas d'égalité.

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{13}$$

$$\forall f \in C^0([-1, 1], \mathbb{R}), \quad \left|\int_{-1}^{1} f(t)dt\right| \leq \sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{+1} f^2(t)dt}. \tag{14}$$

Exercice 5. Soit E un espace euclidien.

a. Démontrer l'équivalence:

$$u \perp v \iff \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|u + \lambda v\| \geq \|u\|.$$

b. Illustrer cette propriété par un dessin.

Exercice 6. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 2\pi]$ à valeurs réelles. Pour $(f, g) \in E^2$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Pour $k = 1, \ldots, n$, on pose

$$e_k(x) = \sin(kx), \quad x \in [0, 2\pi].$$

a. Montrer que la famille $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ est orthonormale.

b. Soit E_n l'espace vectoriel engendré par cette famille. Quelle est la dimension de E_n? Montrer

$$\forall f \in E_n, \quad \int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \sin(kx)f(x)dx\right)^2.$$

Exercice 7. Soit F et G deux sous-ensembles de l'espace euclidien E. Exprimer $(F \cup G)^{\perp}$ en fonction de $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$.

Exercice 8. Soit $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire euclidien usuel.

a. La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est-elle une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$?

b. Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$. Donner les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

c. Soit $F = \mathrm{vect}(u_1, u_2)$. Soit f la projection orthogonale sur F. Calculer $f\big((x_1, x_2, x_3)\big)$ en fonction de x_1, x_2 et x_3. Déterminer la distance de $x = (x_1, x_2, x_3)$ à F.

d. Donner une base orthonormée de $F^\perp$, et g la projection orthogonale sur $F^\perp$. Calculer $g\big((x, y, z)\big)$ en fonction de x, y et z.

Exercice 9. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dont les deux premiers vecteurs appartiennent au plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 10. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ défini par:

$$\langle x, y \rangle_a = x_1 y_1 + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2).$$

En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, Construire une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ pour ce produit scalaire à partir de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + 2z = 0$.

a. Déterminer une base orthonormée de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^\perp$.

b. Déterminer une expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose

$$F := \Big\{ (x_j)_j \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \Big\}.$$

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire euclidien usuel.

a. Déterminer des bases orthonormales de F et de $F^\perp$.

b. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

c. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F.

d. Pour tout $u = (u_j)_{1 \le j \le 4}$, déterminer la distance $d(u, F)$ de u à F.

Exercice 13. Soit E un espace euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pout tout (x, y) de E^2, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$. Démontrer que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)^\perp$.

4. Complément: polynômes de Legendre

On considère sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P(x) Q(x) dx.$$

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée, i.e.

$$\|P\|^2 = \int_{-1}^{+1} P^2(x) dx.$$

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes unitaires de degré n obtenu à partir de la base canonique $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ en lui appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

a. Déterminer P_0, P_1, P_2.

b. En utilisant que $P_n \in \big(\mathbb{R}_{n-1}[X]\big)^\perp$, montrer

$$\forall n \ge 1, \quad \langle X^n, P_n \rangle = \langle X P_{n-1}, P_n \rangle = \|P_n\|^2.$$

c. Soit E_n l'orthogonal de $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Quelle est la dimension de E_n? Donner une base de E_n. Montrer que $P_n(-X) \in E_n$. En déduire $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

d. Justifier que $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, XP_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En écrivant le développement de P_n dans cette base, montrer qu'on a, pour tout $n \geq 2$,

$$P_n = XP_{n-1} - \frac{\|P_{n-1}\|^2}{\|P_{n-2}\|^2} P_{n-2}. \tag{15}$$

e. Soit Q_n le polynôme défini par

$$Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left((1-x^2)^n\right).$$

Quel est le degré de Q_n? Montrer par récurrence sur k que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, pour toute fonction de classe C^k f sur $[-1, +1]$, on a

$$\int_{-1}^{+1} Q_n(x) f(x) dx = (-1)^k \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left((1-x^2)^n\right) f^{(k)}(x) dx,$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de f.

f. Montrer que $Q_n \in E_n$. En déduire qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n = \alpha_n Q_n$. Déterminer α_n.

g. Soit $I_n = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx$. On donne

$$I_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}. \tag{16}$$

Calculer $\int_{-1}^{+1} Q_n(x) x^n dx$. En déduire $\|P_n\|^2$ en utilisant les questions **e** et **b**.

h. Expliciter la formule (15) à l'aide de la question précédente. Calculer P_3 et P_4.

i. Déterminer le polynôme A_2, de degré 2 tel que

$$\|A_2 - X^3\| = \min_{P \in \mathbb{R}_2[X]} \|P - X^3\|.$$

j. On peut définir un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et une norme $\|\cdot\|$ sur $C^0([-1, +1], \mathbb{R})$ par les mêmes formules que précédemment. Soit $f \in C^0([-1, +1], \mathbb{R})$. A l'aide des polynômes P_n, et en utilisant une projection, déterminer:

$$\min_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|P - f\|$$

et le polynôme $P(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\|P(f) - f\| = \min_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|P - f\|.$$

k. Montrer que P_n a n racines simples, et qu'elles sont toutes localisées sur $]-1, 1[$. On pourra démontrer ce résultat sur Q_n, en montrant par récurrence sur k que $\frac{d^k}{dx^k}\left((1-x^2)^n\right)$ a exactement k racines sur $]-1, 1[$.

l. Appendice: calcul de I_n. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n. En déduire la formule (16) proposée pour I_n. En déduire également l'*intégrale de Wallis*:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1}(x) dx.$$

Chercher (en ligne ou dans un livre d'analyse mathématique) les valeurs de ces intégrales, et vérifier que ces valeurs coïncident avec ce que vous avez trouvé.

Commentaire. Les polynômes de Legendre sont un cas particulier de polynômes orthogonaux. Le cadre général est le suivant: on considère une fonction ω positive ou nulle, continue, non identiquement nulle, à support compact (ou décroissant plus vite que toutes les puissances de x à l'infini). On définit le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle P, Q\rangle_\omega = \int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x)\omega(x)dx.$$

Une suite de polynôme orthogonaux pour le poids ω est une suite de polynôme réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que P_n est de degré n et qui est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$. L'existence d'une telle suite se démontre à l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Les polynômes orthogonaux sont définis a priori à une constante multiplicative près, et il faut toujours faire un choix de normalisation. Dans l'exercice précédent, on a choisi cette constante pour que les polynômes P_n soient unitaires. Signalons toutefois que la normalisation la plus courante pour les polynômes de Legendre est de choisir la constante devant X^n pour que $P_n(1) = 1$.

Les propriétés que l'on a démontrées ici pour les polynômes de Legendre (relation de récurrence, formule explicite avec une dérivée n-ième, propriétés des racines, etc...) ont des analogues pour les polynômes orthogonaux.

Le lecteur intéressé pourra faire des recherches sur les polynômes d'Hermite, de Laguerre, de Tchebychev qui sont tous des polynômes orthogonaux.