Exercice 1. Soit $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Calculer le polynôme de Taylor de degré inférieur ou égal à 4 de la fonction $\ln(1+x)$ au voisinage de 0. On note P_4 ce polynôme. En déduire le polynôme de Taylor de degré inférieur ou égal à 4 de la fonction $f(x)$ au voisinage de 0. On note $\tilde{P}_4$ ce polynôme.
2. Donner une majoration de l'erreur $|\ln(1+x) - P_4(x)|$ lorsque $x \in [0;1]$. Et, donner une majoration de l'erreur $|f(x) - \tilde{P}_4(x)|$ lorsque $x \in [0;\frac{1}{2}]$.
3. On rappelle que $\ln 2 \approx 0.6931471806$. Calculer deux approximations de $\ln 2$ à l'aide de P_4 et $\tilde{P}_4$ respectivement. Pourquoi la précision obtenue avec ces deux approximations n'est-elle pas la même ? Les résultats obtenus sont-ils en accord avec la question 2. ?

Exercice 2.(Vrai ou faux ?) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Le polynôme de Lagrange interpolant $\{2,-1,3\}$ aux nœuds $\{-1,0,2\}$ est de degré 3.
2. Soient $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ et $y_0 = -1, y_1 = 0, y_2 = 1$. Le polynôme interpolant $\{y_i\}_{i=0,1,2}$ aux nœuds $\{x_i\}_{i=0,1,2}$ est $x-1$.
3. Soient $(x_i, y_i), (n+1)$ points. Soit Π_n le polynôme de Lagrange interpolant $\{y_i\}$ aux nœuds $\{x_i\}$. Soit Q_n le polynôme interpolant $\{y_i\}$ aux nœuds $\{x_i\}$ écrit dans la base des polynômes nodaux. Alors, $P_n = Q_n$.
4. Le polynôme de Taylor d'une fonction est un polynôme d'interpolation de cette fonction.
5. Soient x_0, x_1, x_2 et x_3 quatre nœuds d'interpolation, alors $f[x_0,x_1,x_2,x_3] = f[x_1,x_0,x_2,x_3]$.
6. Soit $f(x) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{4}{9}x^2 + x$ et soit $\Pi_3 f$ le polynôme d'interpolation de f aux nœuds $\{-2,0,1,2\}$.
   Alors $E_3(x) = |f(x) - \Pi_3 f(x)| = 1,5.10^{-3}$.

Exercice 3.(Forme de Newton du polynôme d'interpolation) Considérons une fonction f dont le graphe passe par les points $P_0 = (0,0), P_1 = (1,2), P_2 = (2,16)$ et $P_3 = (3,36)$.

1. Déterminer le polynôme de Lagrange $\Pi_1 f$ coïncidant avec f aux points P_0 et P_1.
2. Déterminer la forme de Newton du polynôme d'interpolation coïncidant avec f aux points P_0 et P_1.
3. En ré-utilisant les calculs faits en 2., déterminer le polynôme d'interpolation $\Pi_2 f$ coïncidant avec f aux points P_0, P_1 et P_2. Commenter.
4. En ré-utilisant les calculs faits en 3., déterminer le polynôme d'interpolation $\Pi_3 f$ coïncidant avec f aux points P_0, P_1, P_2 et P_3.
5. En supposant que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$, donner l'expression de l'erreur d'interpolation $E_2(x) = f(x) - \Pi_2 f(x)$ et de l'erreur $E_3(x) = f(x) - \Pi_3 f(x)$.
6. Donner une estimation de la valeur $f(1.5)$ à l'aide du polynôme $\Pi_2 f$ puis du polynôme $\Pi_3 f$.

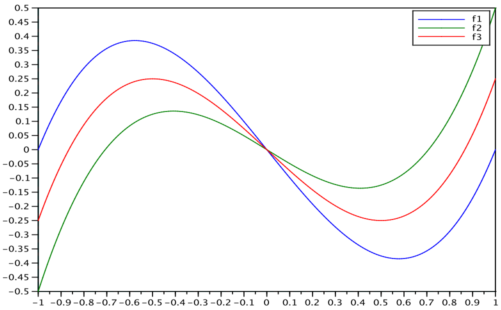
Exercice 4.(Erreur d'interpolation) Avec quelle précision peut-on calculer $\sqrt{115}$ à l'aide du polynôme interpolant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ aux nœuds $x_0 = 100, x_1 = 121$ et $x_2 = 144$?

Exercice 5.(Choix des nœuds d'interpolation) Soit une fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1;1]$ telle que pour tout $x \in [-1,1]$, $|f''(x)| \leq M$ et soit $\Pi_1 f$ le polynôme d'interpolation de f aux nœuds $\{x_0, x_1\}$.

1. Donner l'expression de l'erreur d'interpolation $E_1(x) = f(x) - \Pi_1 f(x)$.
2. Étudier la fonction $x \to (x-1)(x+1)$ pour $x \in [-1,1]$.
3. Même question pour la fonction $x \to (x - \frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$.
4. Quels nœuds $\{x_0, x_1\}$ doit-on choisir $\{x_0, x_1\} = \{-1, 1\}$ ou $\{x_0, x_1\} = \{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$?
5. Calculer le polynôme d'interpolation de degré 1 de x^3 qui interpole f en $\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ et donner une majoration de l'erreur pour tout $x \in [-1,1]$.

5. Parmi les nœuds donnés ci-dessous, lequel choisiriez-vous pour une interpolation à trois points de f (on pourra utiliser la figure ci-contre) ?

$a.$ $\{-1, 0, 1\}$ $\quad$ $b.$ $\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\}$ $\quad$ $c.$ $\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$.



$f_1(x) = x(x-1)(x+1)$; $f_2(x) = x(x - \frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$; $f_3(x) = x(x - \frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Exercice 6.(Un exemple) Le tableau ci-dessous indique l'évolution de la population française entre 1940 et 1980.

Année	1940	1950	1960	1970	1980
Population (en millions)	40	42	45	52	55

Calculer une approximation de la population en 1930, 1965 et 1990, en utilisant des polynômes d'interpolation de Lagrange d'ordre 1,3 et 4 respectivement.