Institut Galilée -Université Paris 13
Cours communs ingénieur
Année 2016-2017

Fiche n°4. Résolution numérique d'équations non linéaires.

---

**Exercice 1.** Soit $f(x) = x^2 - 2$.

1. Montrer que $f(x)$ a un unique zéro dans $[1, 2]$.
2. Appliquer deux itérations de la méthode de la dichotomie pour trouver une approximation de $\sqrt{2}$.
3. Combien faut-il d'itérations de cette méthode pour obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ à $10^{-5}$ près ?

**Exercice 2.** Une variante de la méthode de bissection appelée *méthode de la fausse position*, consiste à remplacer le point milieu $x_m$ de l'intervalle $[x_1, x_2]$ par le point d'intersection $x_m^*$ de la droite joignant les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, avec l'axe des abcisses.

a) Illustrer à l'aide d'un graphique cette méthode.

b) Obtenir l'équation de la droite et calculer son point d'intersection $x_m^*$ avec l'axe des abcisses.

c) Modifier l'algorithme de la bissection en remplaçant $x_m$ par $x_m^*$.

d) Faire une itération de l'algorithme ainsi obtenu pour la fonction $f(x) = \frac{1-0.61x}{x}$ dans l'intervalle $[1.5, 2]$. Préciser quel serait l'intervalle de départ pour la deuxième itération.

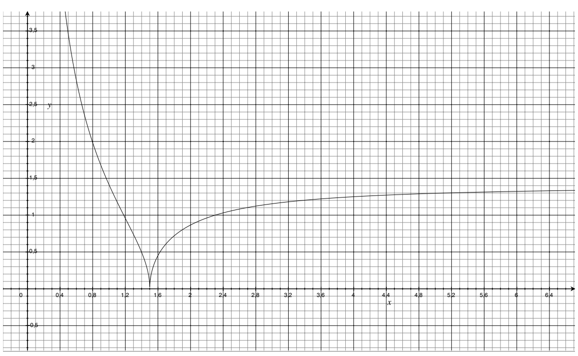
**Exercice 3.** Le polynôme $p(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ possède 4 racines simples. Pour ce polynôme, déterminer vers quelle racine la méthode de la bissection convergera, s'il y a lieu, en partant de chacun des intervalles suivants :

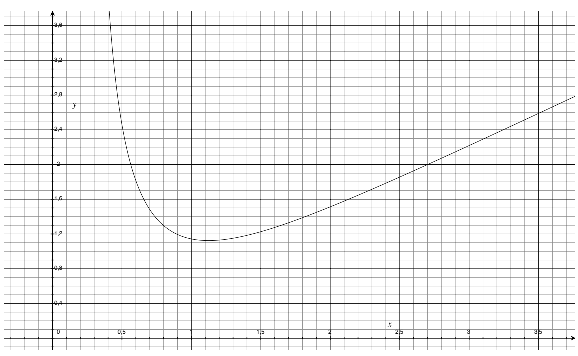
$$i)\ [-1.5, 3] \qquad ii)\ [-3, 3].$$

**Exercice 4.** On considère la fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$. Vérifier que la fonction possède une racine dans l'intervalle $[2, 2.4]$ et déterminer (sans faire les itérations) le nombre de chiffres significatifs minimum que l'on obtiendrait si $10$ itérations de la méthode de la bissection étaient effectuées à partir de l'intervalle $[2, 2.4]$.

**Exercice 5.** On cherche à approcher la solution de $f(x) = 0$ sur $[1, 2]$ lorsque $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$.

1. Montrer que chercher $x$ dans $[1, 2]$ tel que $f(x) = 0$ est équivalent à chercher le point fixe de $\Phi_1(x) = \left(\left|\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} - 2\right|\right)^{\frac{1}{2}}$.
2. Même question avec $\Phi_2(x) = x - \frac{x^4+2x^2-x-3}{4x^3+4x-1}$
3. Utiliser les graphes ci-dessous pour appliquer les 4 premières itérations de l'algorithme du point fixe avec $\Phi_1$ (à gauche) et $\Phi_2$ (à droite) en prenant la donnée initiale égale à $0.5$.





**Exercice 6.** On cherche à approcher la solution de l'équation

$$x^2 - 2 = 0$$

au moyen de la méthode de point fixe

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \rho(x_n^2 - 2),$$

où $\rho$ est une constante.

a) Pour quelles valeurs de $\rho$ cette méthode de points fixe convergente-t-elle à l'ordre 1 (au moins) ?

b) Quel est l'ordre de convergence lorsque $\rho = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ?

c) Quel est l'ordre de convergence lorsque $\rho = 3\sqrt{2}$ ?

**Exercice 7.** Calcul approché de $\sqrt{a}$

a) Écrire l'algorithme de Newton pour la résolution de $x^2 - a = 0$, où $a$ est un réel strictement positif.

b) Lorsque $a = 2$ et que l'itéré initial est $x^{(0)} = 2$, calculer les trois premiers itérés de cette suite sous forme fractionnaire et sous forme décimale approchée ; comparez avec $\sqrt{2}$ dont une valeur approchée à $10^{-10}$ près est $1,4142135624$. Comparez avec la précision donnée par l'algorithme de dichotomie (voir Exercice 1).

c) Montrer que $(x^{(n+1)} - \sqrt{a}) = \frac{1}{2x^{(n)}}(x^{(n)} - \sqrt{a})^2$. En déduire que si $x^{(0)} \geq 0$, alors $x^{(n)} \geq \sqrt{a}$ pour tout $n \geq 1$ puis montrer que la suite est décroissante à partir de $n = 2$.

d) En déduire que la suite converge quadratiquement vers $\sqrt{a}$. Est-ce le résultat attendu en appliquant le théorème vu en cours ?

**Exercice 8.** (Vrai-Faux)

1. La méthode de dichotomie fournit une approximation de plus en plus précise de la solution d'une équation non-linéaire.
2. La méthode de dichotomie permet de trouver les zéros de n'importe quelle fonction.
3. Les itérées de la méthode de Newton appliquée à la fonction $x \mapsto x^2$ convergent quadratiquement vers $0$.
4. La suite définie par $x^{(0)} = 0$ et $x^{(n+1)} = \frac{\exp(x^{(n)})}{3}$ converge vers la solution de l'équation $\exp(x) = 3x$ située dans $[0,1]$. En revanche, cette méthode itérative ne permet pas de s'approcher de la solution de cette équation située dans $[\frac{3}{2}, 2]$.

**Exercice 9.** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

a) Quelles sont les racines de l'équation $f(x) = 0$ ?

Nous allons illustrer les résultats vus en cours sur la convergence de la méthode de Newton appliquée à la résolution de cette équation.

b) Calculer $f'(x)$ et écrire la relation de récurrence liant deux itérés successifs de la méthode de Newton sous la forme $x^{(k+1)} = F\left(x^{(k)}\right)$ avec une fonction $F$ que l'on précisera.

c) Selon les résultats vus en cours, qu'attend on comme convergence de la suite de Newton autour des racines calculées à la question a)

d) Calculer $F(x) - 2$ et en déduire la convergence de la suite vers $2$, et la nature de cette convergence, dès que l'on choisit $x^{(0)} > 1$. Cela correspond-il au résultat attendu ?

e) Calculer $F(x) + 1$ et en déduire que $x^{(n)} < -1$ pour $n \geq 1$ dès que l'on choisit $x^{(0)} < -1$ ou $x^{(0)} \in ]\frac{1}{2}, 1[$. Montrer que $\frac{3}{4} < \frac{x - \frac{1}{2}}{x - 1} < 1$ lorsque $x < -1$, et en déduire la convergence linéaire de la suite vers $-1$ lorsque $x^{(0)} < -1$ ou $x^{(0)} \in ]\frac{1}{2}, 1[$.

f) Montrer que $]-1, \frac{1}{2}[$ est stable par $F$ et que si $x^{(0)} \in ]-1, \frac{1}{2}[$ alors la suite converge vers $-1$, asymptotiquement comme une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Cela correspond il au résultat attendu ?