Mathématiques pour Ingénieur

L. El Alaoui

email : elalaoui@math.univ-paris13.fr

https://www.math.univ-paris13.fr/ elalaoui/PageMPI/MPI.html

bureau : D318

Institut Galilée – Université Paris 13

Septembre 2016 – Janvier 2017

Déroulement

- Enseignements
  - 17 séances de cours magistraux de 1h30,
  - 24 séances de travaux dirigés de 1h30,
- Contrôle continu (interrogations en amphi et en td)
- Deux partiels :
  - lundi 24 octobre 2016,
  - lundi 16 janvier 2017.
- Note minimale : 09/20 !
- Présence obligatoire en Cours et Tds.

Plan du cours

1. Rappels
   1. Suites, Séries, Développement de Taylor
   2. Fonctions de plusieurs variables, calcul d'extrema

2. Approximation de fonctions
   2.1 Interpolation polynomiale
   2.2 Interpolation par splines

3. Résolution de systèmes linéaires
   3.1 Conditionnement
   3.2 Décomposition Cholesky, LU

4. Résolution numérique d'équations non linéaires
   4.1 Méthode de la dichotomie
   4.2 Méthode de point fixe
   4.3 Méthode de Newton

5. Intégration et Équations différentielles
   5.1 Méthodes d'approximation d'une intégrale
   5.2 Méthode de résolution approchés d'une équation différentielle

Références bibliographiques

- Analyse :
  - F. Monna et G. Monna, *Suites et séries de fonctions - Exercices corrigés avec rappels de cours*, Broché.
  - J-J. Colin, J-M. Morvan et R. Morvan, *Fonctions usuelles : Exercices corrigés avec rappels de cours*, Broché.
  - J-M. Monier, *Cours de mathématiques - Analyse PCSI-PTSI - Cours et exercices corrigés*,
  - www.bibmath.fr (exercices corrigés)
  - les livres de l'auteur J-M. Morvan http ://www.amazon.fr/Jean-Marie-Morvan/e/B004N21TGU et plus généralement dans la collection cepadues (www.cepadues.com)
- Analyse numérique :
  - A. Fortin, *Analyse numérique pour ingénieurs*, Broché.
  - F. Filbet, *Analyse numérique - algorithme et étude mathématique. Cours et exercices corrigés*, Dunod.
- Pour aller plus loin . . .
  - W. Rudin, *Principes d'analyse mathématique : cours et exercices*, Dunod.
  - M. Lefebvre, *Equations différentielles*, Collection Paramètres .
  - Allaire G. et Kaber S.M., *Algèbre linéaire numérique : Cours et exercices*, Ellipses.
  - Demailly J-P., *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble.
  - Quarteroni A., Sacco R. , Saleri F., *Méthodes numériques pour le calcul scientifique : programmes en MATLAB*, Springer.

1.1 Suites réelles

Où trouve-t-on des suites ?

- Approximation des nombres réels :
  Approcher des réels tels que $\sqrt{2}$, π ou de nombres définis comme solution d'une équation ($e^x = x - 3$). Le but est alors de trouver les "meilleures" suites de réels, c'est-à dire celles qui convergent le plus vite vers ces nombres ...
- Description du comportement de phénomènes dont l'état, à un moment donné (mois, année), est représenté par un nombre réel.
  "Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? "(Liber abaci, ouvrage de Leonardo Fibonacci écrit en 1202)

Définition 1

Une suite de nombre réels est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$,

$$(u_n) : \quad \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow u_n. \end{array}$$

- suite arithmétique de raison a : $u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$ avec $a, r \in \mathbb{R}$,
- suite géométrique de raison r : $u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = r\, u_n$ avec $a \in \mathbb{R}$,
- suite puissance : $u_n = n^\alpha$ avec $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

D'une suite donnée on peut prendre dans l'ordre certains de ses termes, on dit alors qu'on en extrait une sous-suite.

Définition 2

Soit $\Phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On dit que (v_n) est une suite extraite (ou une sous-suite) de (u_n) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\Phi(n)}$.

EXEMPLE : $\Phi(n) = 2n, v_n = u_{2n}$; $\Phi(n) = 2^n, v_n = u_{2^n}$.

Définition 3

i) Une suite (u_n) est majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, \quad u_n \leq M.$$

ii) Une suite (u_n) est minorée si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, \quad u_n \geq m.$$

iii) Une suite (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée, i.e.

$$\exists M \geq 0, \forall n \geq 0, \quad |u_n| \leq M.$$

Définition 4

i) Une suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang si

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad u_{n+1} \geq u_n.$$

ii) Une suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang si

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad u_{n+1} \leq u_n.$$

iii) Une suite (u_n) est stationnaire si à partir d'un certain rang elle est constante.

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n = u_N.$$

iv) Une suite est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

v) Une suite (u_n) est périodique à partir d'un certain rang si

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N, \quad u_n = u_{n+p}.$$

EXEMPLE.

- $u_n = E(\frac{4}{n+1})$. La suite (u_n) est constante à partir du rang $n_0 = 4$.
- La suite des décimales de $\frac{1}{90}$ est constante à partir du rang $n_0 = 2$.
- $u_n = |n - 5|$. La suite (u_n) est croissante à partir du rang $n_0 = 5$.
- La suite des décimales de $\frac{53}{2475}$ est périodique, de période $p = 2$ à partir du rang $n_0 = 3$.

Les opérations (addition, multiplication par un scalaire, multiplication, comparaison) sur les réels s'étendent aux suites en des opérations terme à terme.

On dit que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ (sa limite) si tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient aussi tous les u_n pour n assez grand. Autrement dit, à partir d'un certain rang u_n est proche de ℓ.

Définition 5

On dit que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N(\epsilon), \ \forall n \geq N(\epsilon), \quad |u_n - \ell| < \epsilon.$$

On note $u_n \to \ell$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ou $\lim\limits_{n} u_n = \ell$.
Le réel ℓ s'appelle limite de la suite.

EXEMPLE. $u_n = 1 + \dfrac{\sin(n)}{n}$.

La suite (u_n) converge vers $\ell = 1$:

$$|u_n - \ell| \leq \left|\frac{\sin(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}.$$

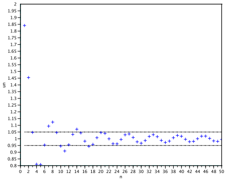

FIGURE: Les 50 premiers termes de la suite (u_n).

Définition 6

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si

$$\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \quad u_n > A.$$

La suite (u_n) tend vers $-\infty$ si

$$\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \quad u_n < -A.$$

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$)

Exemple.

- Suite arithmétique : $u_n = u_0 + an$.
  - Si $a > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  - Si $a = 0$, (u_n) est constante.
  - Si $a < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.
- Suite géométrique : $u_n = u_0 r^n$.
  - Si $u_0 = 0$, (u_n) est constante.
  - Si $r \leq -1$, et $u_0 \neq 0$, (u_n) ne converge pas.
  - Si $-1 < r < 1$, (u_n) tend vers 0.
  - Si $r = 1$, (u_n) est constante.
  - Si $r > 1$ et $u_0 > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  - Si $r > 1$ et $u_0 < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.
- Suite de Riemann $u_n = n^\alpha$.
  - Si $\alpha > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  - Si $\alpha = 0$, (u_n) est constante (tend vers 1).
  - Si $\alpha < 0$, (u_n) tend vers 0.

Proposition 1

- Si (u_n) est une suite convergente, alors sa limite est unique.
- Toute suite convergente est bornée.
- Une suite majorée et croissante est convergente.
- Une suite minorée et décroissante est convergente.
- Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Propriétés

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limite respective ℓ et ℓ'.

i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lim_n (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \ell + \mu \ell'$,

ii) $\lim_n (u_n v_n) = \ell \ell'$,

iii) si pour tout $n, u_n \neq 0$ et $x \neq 0$, $z_n = \dfrac{1}{u_n}$ alors $\lim_n z_n = \dfrac{1}{\ell}$,

iv) $\lim_n |u_n| = |\ell|$,

v) si $\ell \neq 0$, u_n est du signe de ℓ à partir d'un certain rang,

Point fixe

Théorème 1

Soient (u_n) une suite convergente d'éléments d'un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ dont la limite ℓ appartient à $\mathcal{I}$, et ϕ une fonction continue en ℓ. Alors la suite $(\phi(u_n))$ est convergente et a pour limite $\phi(\ell)$.

On déduit de ce théorème que si une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \phi(u_n)$ est convergente et a pour limite ℓ et si est ϕ est continue en ℓ, on a alors : $\ell = \phi(\ell)$.

Définition 7

Un tel point ℓ est dit point fixe de ϕ.

Remarque.

- Si la fonction continue n'a pas de point fixe alors une suite, qui vérifie la relation $u_{n+1} = \phi(u_n)$, ne peut avoir de limite ;
- en revanche si ϕ a un point fixe cela n'entraîne pas que la suite admette ce point comme limite.
- Un point fixe, de coordonnées (ℓ, ℓ), est le point d'intersection du graphe de ϕ et de la première bissectrice.

Proposition 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels convergentes.

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, alors : $\lim\limits_n u_n \leq \lim\limits_n v_n$.
- Soit v_n tendant vers 0. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$, alors (u_n) tend vers 0.

Corollaire 1

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels telles que (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Alors (v_n) converge vers ℓ.

Exemple. $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n+2}, \quad \lim\limits_n u_n = 1.$

Proposition 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que pour tout $n \in N$, $u_n \leq v_n$.

- Si u_n tend vers $+\infty$ alors v_n tend vers $+\infty$.
- Si v_n tend vers $-\infty$ alors u_n tend vers $-\infty$.

Définition 8

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels.

- On dit que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n) si :
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M|v_n|.$$
On écrit $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, qui se lit "u_n est un grand $\mathcal{O}$ de v_n".
- On dit que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ |u_n| \leq \varepsilon|vn|.$$
On écrit $u_n = o(v_n)$, qui se lit "u_n est un petit o de v_n".
- On dit que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - v_n| \leq \varepsilon|v_n|.$$
On écrit $u_n \sim v_n$, qui se lit "u_n est équivalent à v_n".

Proposition 4

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels et on suppose que les v_n sont tous non nuls.

- La suite (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement si la suite $(\dfrac{u_n}{v_n})$ est bornée.
- La suite (u_n) est négligeable devant (v_n) si la suite $(\dfrac{u_n}{v_n})$ converge vers 0.
- Les suites (u_n) et (v_n) sont dites équivalentes si la suite $(\dfrac{u_n}{v_n})$ tend vers 1.

EXEMPLE. $\sqrt{4n^2+1} = \mathcal{O}(n), \quad \sqrt{4n^2+1} = o(n^2), \quad \sqrt{4n^2+1} \sim 2n.$

Proposition 5

Soient $(u_n), (v_n), (u'_n), (v'_n)$ des suites de réels.

i) $u_n \sim v_n$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des suites réelles.

ii) Si $u_n \sim v_n$ et v_n est convergente, alors u_n est convergente et $\lim_n u_n = \lim_n v_n$.

iii) Si $u_n \sim v_n$ et v_n est ne converge pas, alors u_n est ne converge pas.

iv) Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n - v_n = o(u_n) = o(v_n)$.

v) Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$ et $\dfrac{u_n}{u'_n} \sim \dfrac{v_n}{v'_n}$ si $u'_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$.

vi) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n + v_n \sim z_n$.

Attention ! En général, $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$ **n'implique pas** $u_n + v_n \sim u'_n + v'_n$.

EXEMPLE. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{8n^3+n^2}}, \quad \lim_n u_n = \dfrac{1}{2}.$

$u_n = n + (-1)^n$, $v_n = -n + (-1)^n$, mais $u_n + v_n$ n'est pas équivalent à 0 !

Vitesse de convergence

Définition 9

Soit (u_n) une suite de réels convergeant vers un réel ℓ. Si la suite $\left(\dfrac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|}\right)$ est convergente de limite λ, on dit que la convergence de la suite (u_n) vers ℓ est :

- lente, lorsque $\lambda = 1$,
- géométrique de rapport λ, lorsque $\lambda \in]0, 1[$,
- rapide, lorsque $\lambda = 0$.

Le réel λ, lorsque qu'il existe, est appelé coefficient de convergence de la suite.

Remarque. Si la suite $\left(\dfrac{|u_{n+1} - \ell|}{u_n - \ell}\right)$ converge, sa limite λ est nécessairement dans $[0, 1]$.

Exemple. $u_n = \dfrac{1}{n^b}$, $b > 0$. La suite (u_n) converge lentement.

$u_n = a^n$, $0 < a < 1$. La suite (u_n) converge géométriquement de rapport a.

- Paradoxe de Zenon d'Elée : Achille ne rattrape jamais la tortue après laquelle il court ! Supposons qu'Achille et la tortue courrent le long d'une ligne droite, Achille avançant à $10\text{m}.s^{-1}$, la tortue à $1\text{m}.s^{-1}$ et la tortue partant avec 100m d'avance.
  Le temps (en seconde) nécessaire est :

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$$

  Il s'agit d'une somme comportant une infinité de termes ... qui vaut un nombre fini !
- les séries réelles permettent de construire des nombres comme e qui ne sont ni rationnels ni même algébriques et d'en calculer des valeurs approchées.
  Les séries de fonctions conduisent à définir de nouvelles fonctions. Les séries entières et les séries de Fourier, en particulier.

Définition 10

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On associe à cette suite la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k .$$

La suite (S_n) s'appelle la **série de terme général** u_n et S_n est appelée la **somme partielle d'ordre** n de la série.
On notera simplement $(\sum u_n)$ cette suite.

Définition 11

- La série $(\sum u_n)$ converge si la suite (S_n) converge et diverge sinon. Si la série converge alors $s = \lim_n S_n$ est appelée la **somme** de la série et on note $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Soit $(\sum u_n)$ une série convergente de somme s. On appelle **le reste d'ordre n** de la série $(\sum u_n)$, $R_n = s - S_n$.

Remarque : La suite peut-être définie pour $n \geq 1$, auquel cas on utilisera le même vocabulaire.

Définition 12

La série de terme général $u_n = x^n$ est appelée **série géométrique de raison x**.

Proposition 6

- Si $|x| \geq 1$, la série géométrique $\sum x^n$ diverge.
- Si $|x| < 1$, la série géométrique $\sum x^n$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{1-x}$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Proposition 7 (Linéarité)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes. Alors la série $\sum(u_n + v_n)$ est convergente et

$$\sum(u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n.$$

Théorème 2 (Critère de Cauchy.)

La série $(\sum u_n)$ est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall m \geq n \geq N, \quad \left| \sum_{k=n}^{m} u_k \right| < \epsilon.$$

Corollaire 2

Si $(\sum u_n)$ converge alors $\lim_n u_n = 0$.

Remarque : La réciproque est fausse.

Définition 13

Si le terme général u_n ne tend pas vers 0 on dit que la série $(\sum u_n)$ diverge grossièrement.

Théorème 3 (de comparaison.)

Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries.

i) Si à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq v_n$ et si la série $(\sum v_n)$ est convergente, alors la série $(\sum u_n)$ est convergente.

ii) Si à partir d'un certain rang, $0 \leq v_n \leq u_n$ et si la série $(\sum v_n)$ est divergente, alors la série $(\sum u_n)$ est divergente.

Proposition 8

- Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries de terme général **positif**. Alors si $v_n = \mathcal{O}(u_n)$ et si $(\sum u_n)$ converge alors $(\sum v_n)$ converge.
- En particulier, si $u_n \sim v_n$ les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature.

Théorème 4 (Règle de Cauchy.)

Soit $(\sum u_n)$ une série de terme général u_n **positif**. S'il existe $l < 1$ tel qu'à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{u_n} \leq l$ alors la série $(\sum u_n)$ converge.
En particulier si $\lim_n \sqrt[n]{u_n} = l$ alors

- si $l < 1$ la série converge,
- si $l > 1$ la série diverge grossièrement,
- si $l = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

Théorème 5 (Règle de d'Alembert.)

Soit $(\sum u_n)$ une série de terme général u_n **positif**. S'il existe

- $l < 1$ tel qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq l$ alors $(\sum u_n)$ converge.
- $l \geq 1$ tel qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq l$ alors $(\sum u_n)$ diverge.

En particulier, si $\lim\limits_n \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ et

- si $l < 1$, alors $(\sum u_n)$ converge,
- si $l > 1$, alors $(\sum u_n)$ diverge,
- si $l = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

Théorème 6 (Règle d'Abel.)

Si $u_n = \alpha_n v_n$ est le terme général d'une série tel que :

- $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\sum_{k=0}^{n} \alpha_k| \leq M$,
- si la suite (v_n) est positive décroissante,
- si $\lim_n v_n = 0$,

alors la série $(\sum \alpha_n v_n)$ converge.

Corollaire 3 (Critère des séries alternées.)

Soit (v_n) une suite décroissante vers 0, alors la série $(\sum (-1)^n v_n)$ converge.

Définition 14

- La série $(\sum u_n)$ est **absolument convergente** si la série $(\sum |u_n|)$ est convergente.
- Une série convergente qui ne converge pas absolument est dite **semi-convergente**.

EXEMPLE : Les séries de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\frac{\cos n}{n\sqrt{n}}$ sont absolument convergentes.

Proposition 9 (Séries de Riemann et de Bertrand.)

- La série, dite de Riemann, $(\sum \frac{1}{n^p})$ converge si et seulement si $p > 1$.
- La série, dite de Bertrand, $(\sum \frac{1}{n(\ln n)^p})$ converge si et seulement si $p > 1$.

Définition 15 (Produit de deux séries)

Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries. On appelle **série produit** la série de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} u_b v_{n-k}$ avec $n \geq 0$.

Théorème 7

Si $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont deux séries convergentes de somme respective A et B et si au moins l'une des deux séries est absolument convergente alors la série produit $(\sum c_n)$ converge vers $C = AB$.
Si les deux séries sont absolument convergentes, alors la série $(\sum c_n)$ est absolument convergente.

1.3 Séries entières

Le domaine d'application des séries entière est très vaste :

- Calcul numérique d'intégrales,
- Calcul approché de valeurs numériques de certaines fonctions (exponentielle, logarithme, ...)
- Résolution de certaines équations différentielles,
- $\cdots$

Définition 16

Une **série entière** (complexe ou réelle) est une série dont le terme général est de la forme $a_n z^n$.
$a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots$ (complexes ou réels) sont appelés coefficients de la série et z est une variable complex ou réelle.

La convergence d'une série entière dépend de la variable z.

Définition 17

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe ou réelle. On appelle **rayon de convergence** de la série entière, la quantité $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que

- si $|z| < R$ alors $(\sum a_n z^n)$ converge absolument,
- si $|x| > R$ alors $(\sum a_n x^n)$ diverge.

Si $R > 0$, l'ensemble ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}, (\{x \in \mathbb{R}, |x| < R\})$ s'appelle le **disque de convergence** (intervalle ouvert de convergence).

Théorème 8

Soit $(\sum a_n x^n)$ est une série entière.

- S'il existe $\lambda = \lim_n \sqrt[n]{a_n}$ alors $R = \frac{1}{\lambda}$.
- S'il existe $\lambda = \lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ alors $R = \frac{1}{\lambda}$.

Développement en série entière d'une fonction

Définition 18

Soient $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ et x_0 dans $\mathcal{I}$. On dit que f est développable en série entière en x_0 s'il existe une série entière $\sum a_n x_n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un voisinage de x_0, $\mathcal{V}(x_0)$ tels que

$$\forall x \in \mathcal{I} \cap \mathcal{V}(x_0), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Proposition 10

Une fonction f définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ est développable en série entière en x_0 si, et seulement si, la fonction $w \to f(x_0 + w)$ est développable en série entière à l'origine.

Autrement dit, tout problème de développement en série entière se ramène à un problème de développement en série entière à l'origine.

Proposition 11

Soit $\sum a_n(x-x_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Alors la fonction

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

est dérivable sur l'intervalle $]x_0-R,x_0+R[$ et

i) $f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$,

ii) $\int f(x)\mathrm{d}x=C+a_0(x-x_0)+a_1\frac{(x-x_0)^2}{2}+a_2\frac{(x-x_0)^3}{3}\cdots=C+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$.

Le rayon de convergence des séries définies en $i)$ et $ii)$ est R.

Proposition 12

Si f est une fonction développable en série entière en x_0, i.e.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad |x - x_0| < R,$$

alors

i) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de x_0,

ii) les coefficients sont donnés par

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Ce développement est unique et est appelé série de Taylor de f en x_0.

Remarque. Attention ! Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de x_0 qui ne sont pas développables en série entière en x_0.

Proposition 13

Si une fonction f est développable en série entière en x_0, alors il en est de même de toutes ses dérivées et de toutes ses primitives.

Définition 19

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ contenant un point a, dérivable $n-1$ fois sur $\mathcal{I}$, et dont la dérivée n-ième en a existe. On appelle polynôme de Taylor d'ordre n en a de f, le polynôme :

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

On appelle reste de Taylor d'ordre n en a de f, la fonction R_n qui à $x \in \mathcal{I}$ associe :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Proposition 14 (Inégalité de Taylor)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $\mathcal{I}$, telle que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour $|x-a| \leq \delta$. Alors le reste de Taylor d'ordre n de f en a satisfait

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}, \qquad \text{pour } |x-a| \leq \delta.$$

Proposition 15 (Taylor Lagrange)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a,b]$, dont la dérivée $(n-1)$ième est dérivable. Il existe $c \in]a,b[$ tel que le reste de Taylor d'ordre n de f en a satisfait

$$R_n(c) = (b-a)^n \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Proposition 16 (Taylor avec reste intégral)

Soit $\mathcal{I}$ un intervalle ouvert contenant 0. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathcal{I}$. Alors le reste de Taylor d'ordre n de f en a satisfait

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Développements limités (DL)

Les DL sont un outil permettant de :

- calculer des limites,
- étudier localement une courbe.

Définition 20

Soient $\mathcal{I}$ un intervalle ouvert, a un point de $\mathcal{I}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a lorsqu'il existe un polynôme P_n, de degré inf'erieur ou égal à n, tel que le reste soit négligeable devant $(x-a)^n$,i.e :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = o((x-a)^n), \text{ quand } x \to a.$$

Proposition 17

Soient $\mathcal{I}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de $\mathcal{I}$. Soit f une fonction définie sur $\mathcal{I}$. Soit g la fonction qui à h associe $g(h) = f(a+h)$. La fonction f admet un développement limité d'ordre n en a, si et seulement si g admet un développement limité d'ordre n en 0.

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n) \iff g(h) = f(a+h) = P_n(a+h) + o(h^n).$$

Proposition 18

Un développement limité, s'il existe, est unique

Théorème 9 (Taylor-Young)

Soient $\mathcal{I}$ un intervalle ouvert contenant x_0. Soit f une fonction dérivable $n-1$ fois sur $\mathcal{I}$, et dont la dérivée n-ième en x_0 existe. Alors,

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n), \text{ quand } x \to x_0.$$

Proposition 19

- La fonction f admet le développement limité à l'ordre 0 en x_0 :

$$f(x) = a_0 + o(1),$$

si et seulement si f est continue en x_0 et $f(x_0) = a_0$.

- La fonction f admet le développement limité à l'ordre 1 en x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + o((x-x_0)),$$

si et seulement si f est dérivable en x_0 et $f(x_0) = a_0$, $f'(x_0) = a_1$.

Pour tous les ordres supérieurs, il n'y a pas d'équivalence de cette forme. Par exemple $f(x) = x^3\cos(1/x)$ n'admet pas de dérivées seconde en 0.

Proposition 20 (Développement limités des fonctions usuelles)

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}),\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n+1))}{n!}x^n + o(x^n), \alpha \in \mathbb{R}^\star.
\end{aligned}
$$

Proposition 21 (Opérations sur les développement limités)

Soient f, g deux fonctions définies au voisinage d'un point x. Si f et g admettent chacune un développement limité d'ordre n voisinage de x_0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \\ g(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n + (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$

Alors λf, $f + g$, et fg admettent des développement limités du même ordre qui s'écrivent

$$\begin{aligned} \lambda f(x) &= (\lambda a_0) + (\lambda a_1)(x - x_0) + \cdots + (\lambda a_n)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \\ (f + g)(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)(x - x_0) + \cdots + (a_n + b_n)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \\ (fg)(x) &= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x - x_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} \\ &\quad + \cdots + a_n b_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$

Remarque. La partie polynomiale du DL de la fonction $f\,g$ s'obtient en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des partie polynomiale des DL de f et g.

Proposition 22 (Composition des développement limités)

Soient $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ et $g : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Supposons que f admet un développement limité d'ordre p au voisinage du point $x_0 \in \mathcal{I}$. Si g admet un DL d'ordre p au voisinage de $y_0 = f(x_0)$. Alors $g \circ f$ admet un DL d'ordre p au voisnage de x_0. On écrit le DL de f au voisinage de x comme suit

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)P(x - x_0) + o((x - x_0)^p),$$

avec P un polynôme de degré $p - 1$, et on écrit le DL de g au voisinage de y comme suit

$$g(y_0) = Q((y - y_0)) + o((y - y_0)^p),$$

avec Q un polynôme de degré p.
On a

$$g(f(x_0)) = Tr_p\{Q((x - x_0)P((x - x_0)))\} + o(x - x_0)^p,$$

où l'opérateur de troncature Tr_p consiste à ne conserver que les termes de degré inférieurs à p du polynôme.

Théorème 10 (Intégration et dérivation terme à terme d'un DL)

Soit $f\ :\ \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

- Si sa dérivée f' admet un DL d'ordre p au voisinage de $x_0 \in \mathcal{I}$:

$$f'(x)\ = c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_p(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p),$$

  alors f admet un DL d'ordre $p + 1$ au voisinage de $x_0 \in \mathcal{I}$ qui s'écrit

$$f(x)\ = f(x_0) + c_0(x - x_0) + c_1\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + c_p\frac{(x - x_0)^{p+1}}{p + 1} + o((x - x_0)^{p+1}).$$

- Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 et si f' admet un un développement limité d'ordre $n - 1$ au voisinage de x_0 alors la partie polynomiale de ce dernier s'obtient en dérivant celle du développement limité de f.

Proposition 23 (position de la courbe par rapport à sa tangente en un point)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant un DL en a : $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + o((x-a)^k)$ où k est le plus petit entier ≥ 2 tel que le coefficient de x^k soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en a est :

$$y = c_0 + c_1(x-a),$$

et la position de la courbe par rapport à la tangente pour <u>x proche de a</u> est donnée par le signe $f(x) - y$, c'est-à-dire le signe de $c_k(x-a)^k$.

Définition 21 (DL en l'infini)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]x_0, +\infty[$. On dit que f admet un DL en $+\infty$ à l'ordre n s'il existe des réels $c_0, c_1, \cdots, c_n$ tels que

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + o(\frac{1}{x^n}).$$

Proposition 24 (Position de la courbe par rapport à une asymptote)

On suppose que f admet un DL en $+\infty$ (ou en $-\infty$) : $f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_k}{x^k} + o(\frac{1}{x^k})$ où k est le plus petit entier ≥ 2 tel que le coefficient de $\frac{1}{x^k}$ soit non nul. Alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (c_0 x + c_1) = 0$ (resp. $x \to -\infty$). La droite $y = c_0 x + c_1$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$ (ou $-\infty$) et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $f(x) - y$, c'est-à-dire le signe de $\frac{c_k}{x^{k-1}}$.