

Exercice 1. Pour chaque fonction f , 2π -périodique, définie ci-dessous,

- représenter la fonction sur l'intervalle $[-4\pi; 4\pi]$,
- à partir du graphique, déterminer les points où la fonction n'est pas continue ou n'est pas dérivable,
- calculer les coefficients de Fourier des fonctions ci-dessous,
- écrire le développement en série de Fourier de f .

1. $f(x) = \pi - x$ sur $[0; \pi[$ et f paire.

5. $f(x) = x^2$.

2. $f(x) = \pi - x$ sur $[0; \pi[$ et f impaire.

3. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

6. $f(x) = |x|$.

4. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

Exercice 2. Calculer le développement en série de Fourier de la fonction f définie par

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad f(x+4) = f(x).$

2. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 4 \end{cases} \quad f(x+8) = f(x).$

Exercice 3. Pour chacune de fonctions 2π -périodiques définies ci-dessous,

1. représenter la fonction sur trois périodes,
2. calculer les coefficients de Fourier,
3. écrire la développement en série de Fourier de la fonction,
4. étudier sa convergence,
5. démontrer les égalités énoncées.

1. f impaire et $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases} \quad f(x+4) = f(x).$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. $f(x) = \pi - x$.

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

3. $f(x) = x$.

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 4. Développer en série de Fourier la fonction f 2π -périodique définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$.

En déduire, la somme des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

Exercice 5. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π -périodique, définie en posant pour tout x dans $[-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2 + \pi x$.

1. Développer f en série de Fourier.
2. Calculer $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.
3. Déduire le développement en série de Fourier de la fonction 2π -périodique F définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
4. En déduire $\sum \frac{1}{n^6}$.