

METHODE DES VOLUMES FINIS

Ecole d'été: Modélisation en IFS - La Rochelle, 4-8/7/11

F. Benkhaldoun - LAGA Université Paris 13

5 Juillet 2011

VOLUMES FINIS POUR SYSTEMES HYPERBOLIQUES

Systèmes physiques considérés

On s'intéresse à des problèmes d'écoulements de fluides, représentés généralement par des systèmes d'EDP du type :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} + \frac{\partial H(W)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Exemples :

Equations d'Euler en une dimension d'espace

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + P)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial[u(E + P)]}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

avec la loi d'état pour les gaz parfaits : $p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right)$,
 où ρ est la densité du fluide, u la vitesse, E l'Energie, et p : la
 pression.

Ecoulement d'eau peu profonde - Modèle De Saint-Venant

On considère un écoulement d'eau où la profondeur est négligeable devant l'étendue (Modèle Shallow Water [1]). Si le fond du canal est plat (pente nulle), et les frottements négligeables, le problème est régi par le système simplifié :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

h étant la hauteur de l'eau, u : la vitesse, et g la constante de gravité.

Présentation de la méthode pour problèmes scalaires monodimensionnels

Introduction

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times]0, T[\\ u = u(x, t) \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{array} \right. \quad (4)$$

Dans la suite, on notera $X = \mathbb{R} \times [0, T[$.

Exemple, équation de Burger : $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$

Solution au sens des distributions et relations de saut

Résolution dans le cas où u est C^1

Si $u \in C^1(X)$, on a : (4) $\implies \frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial(u)}{\partial x} = 0$ u est alors constante sur la courbe caractéristique dans le plan (x, t) donnée par

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f' [u(x(t), t)] \\ x(t=0) = x_0 \end{cases} \quad (5)$$

On en déduit la solution u :

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$$

Solution au sens des distributions et relations de saut

Résolution dans le cas où u est C^1

Si $u \in C^1(X)$, on a : (4) $\implies \frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial(u)}{\partial x} = 0$ u est alors constante sur la courbe caractéristique dans le plan (x, t) donnée par

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f' [u(x(t), t)] \\ x(t=0) = x_0 \end{cases} \quad (5)$$

On en déduit la solution u :

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$$

Solution au sens des distributions et relations de saut

Résolution dans le cas où u est C^1

Si $u \in C^1(X)$, on a : (4) $\implies \frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial(u)}{\partial x} = 0$ u est alors constante sur la courbe caractéristique dans le plan (x, t) donnée par

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f' [u(x(t), t)] \\ x(t=0) = x_0 \end{cases} \quad (5)$$

On en déduit la solution u :

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$$

En notant $f'(u) = a(u)$, le système caractéristique considéré est alors :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(u_0(x_0)) \\ u(x, t) = u_0(x_0) \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x_0 = x - ta(u_0(x_0)) \\ u(x, t) = u_0(x_0) \end{cases} \quad (6)$$

Applications :

En notant $f'(u) = a(u)$, le système caractéristique considéré est alors :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(u_0(x_0)) \\ u(x, t) = u_0(x_0) \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x_0 = x - ta(u_0(x_0)) \\ u(x, t) = u_0(x_0) \end{cases} \quad (6)$$

Applications :

1. Cas linéaire

$$f(u) = cu : \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \implies a(u) = c$$

caractéristique : $x = x_0 + tc \Leftrightarrow x_0 = x - ct$

Solution : $u(x, t) = u_0(x - ct)$

Systèmes physiques considérés

Présentation de la méthode pour problèmes scalaires monodi

Validité physique de la solution : condition d'entropie

Bibliography

2. Equations de Burger

On considère l'équation non linéaire suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = 0,$$

Ici on a $f(u) = \frac{u^2}{2}$, donc $a(u) = f'(u) = u$

La caractéristique est donnée par : $x = x_0 + tu_0(x_0)$

Soient les différentes conditions initiales :

cas 1

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

cas $x_0 < 0$, $x = x_0$, $u_1(x, t) = u_0(x)$

cas $x_0 \geq 0$, $x = x_0 + tx_0$, $u_1(x, t) = u_0(x_0) = u_0\left(\frac{x}{1+t}\right) = \frac{x}{1+t}$

cas 2

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

cas $x_0 < 0$, $x = x_0 + t$, $u_2(x, t) = u_0(x - t) = u_0(x_0) = 1$

cas $x_0 \geq 0$, $x = x_0$, $u_2(x, t) = u_0(x) = 0$

Solutions discontinues et relations de saut :

Theorem

Les 3 énoncés suivants sont équivalents :

i) u est une solution au sens des distributions, ou solution faible de (4), i.e

$$\int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0,$$

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$$

ii) $\forall R = [x_1, x_2] \times [t_1, t_2] \subset \Omega = \mathbb{R} \times [0, T]$,

$$\int_{\partial R} [u \cdot n_t + f(u) \cdot n_x] d\sigma = 0$$

Theorem

iii) là où u est C^1 , $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$ au sens classique, et sur

$\Gamma(u_l, u_r)$ d'équation $\frac{dx}{dt} = s$, courbe de discontinuité entre les états u_l et u_r , on a la relation de saut : $[f(u)] = s[u]$, où $[u] = u_r - u_l$.

La relation de saut est appelée relation de Rankine-Hugoniot en dynamique des gaz.

Exemple : Soit l'équation de Burger :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = 0 \quad (7)$$

et la condition initiale : $u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Première solution faible : On cherche une solution avec le choc $\Gamma(0, 1)$, on utilise alors les relations de saut :

$$[f(u)] = s[u] \implies \left[\frac{u_r^2}{2} - \frac{u_l^2}{2} \right] = s[u_r - u_l] \implies s = \frac{1}{2} \implies$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x}{t} < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{x}{t} \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exemple : Soit l'équation de Burger :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = 0 \quad (7)$$

et la condition initiale : $u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Première solution faible : On cherche une solution avec le choc $\Gamma(0, 1)$, on utilise alors les relations de saut :

$$[f(u)] = s[u] \implies \left[\frac{u_r^2}{2} - \frac{u_l^2}{2} \right] = s[u_r - u_l] \implies s = \frac{1}{2} \implies$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x}{t} < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{x}{t} \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Deuxième solution faible : } u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x}{t} < 0 \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 \leq \frac{x}{t} < 1 \\ 1 & \text{si } \frac{x}{t} \geq 1 \end{cases}$$

Il conviendrait donc d'avoir un critère de sélection entre ces deux solutions au sens des distributions. Ceci fera l'objet de la section suivante.

$$\text{Deuxième solution faible : } u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x}{t} < 0 \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 \leq \frac{x}{t} < 1 \\ 1 & \text{si } \frac{x}{t} \geq 1 \end{cases}$$

Il conviendrait donc d'avoir un critère de sélection entre ces deux solutions au sens des distributions. Ceci fera l'objet de la section suivante.

Validité physique de la solution : condition d'entropie

Solution entropique

Definition

Une fonction convexe U , assez régulière, est dite entropie du problème, s'il existe une fonction F appelée flux d'entropie vérifiant : $U'(u)f'(u) = F'(u)$.

Definition

u solution faible du problème (4) est dite entropique si

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R} \times]0, T]) : \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(U(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt \geq 0, \text{ où } U$$

est une entropie du problème, et F le flux d'entropie.

Remarque 1 : On montre qu'une solution entropique vérifie la condition d'entropie avec la fonction convexe (mais non dérivable au sens classique), $U(u) = |u - k|$, et le flux d'entropie associé $F(u) = \text{sgn}(u - k)(f(u) - f(k))$, où $k \in \mathbb{R}$

Remarque 2 : Réciproquement, comme toute fonction convexe appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble des fonctions affines, et des fonctions de la forme $x \mapsto |x - k|$, une solution qui vérifie la condition d'entropie avec la fonction convexe $U(u) = |u - k|$, est une solution entropique.

Theorem

(Kruzkov 1970) Sous certaines hypothèses de régularité de u_0 , il existe une unique solution entropique du problème (4).

Remarque 1 : On montre qu'une solution entropique vérifie la condition d'entropie avec la fonction convexe (mais non dérivable au sens classique), $U(u) = |u - k|$, et le flux d'entropie associé $F(u) = \text{sgn}(u - k)(f(u) - f(k))$, où $k \in \mathbb{R}$

Remarque 2 : Réciproquement, comme toute fonction convexe appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble des fonctions affines, et des fonctions de la forme $x \rightarrow |x - k|$, une solution qui vérifie la condition d'entropie avec la fonction convexe $U(u) = |u - k|$, est une solution entropique.

Theorem

(Kruzkov 1970) Sous certaines hypothèses de régularité de u_0 , il existe une unique solution entropique du problème (4).

Remarque 1 : On montre qu'une solution entropique vérifie la condition d'entropie avec la fonction convexe (mais non dérivable au sens classique), $U(u) = |u - k|$, et le flux d'entropie associé $F(u) = \text{sgn}(u - k)(f(u) - f(k))$, où $k \in \mathbb{R}$

Remarque 2 : Réciproquement, comme toute fonction convexe appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble des fonctions affines, et des fonctions de la forme $x \rightarrow |x - k|$, une solution qui vérifie la condition d'entropie avec la fonction convexe $U(u) = |u - k|$, est une solution entropique.

Theorem

(Kruzkov 1970) Sous certaines hypothèses de régularité de u_0 , il existe une unique solution entropique du problème (4).

Notion d'entropie

Lemme : Il existe une quantité U qui est convectée partout où u est C^1 i.e. $\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0$

preuve : là où u est C^1 : $U'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$, s'il existe F
tel que $U'(u)f'(u) = F'(u)$, alors $\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0$

Notion d'entropie

Lemme : Il existe une quantité U qui est convectée partout où u est C^1 i.e. $\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0$

preuve : là où u est C^1 : $U'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$, s'il existe F

tel que $U'(u)f'(u) = F'(u)$, alors $\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0$

Considérons le problème régularisé du problème (4)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (8)$$

Proposition

Il existe une unique solution régulière u^ε du problème (8)

Proposition

La solution du problème (4) est limite au sens des distributions quand ε tend vers 0 de la solution du problème (8)

Considérons le problème régularisé du problème (4)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (8)$$

Proposition

Il existe une unique solution régulière u^ε du problème (8)

Proposition

La solution du problème (4) est limite au sens des distributions quand ε tend vers 0 de la solution du problème (8)

Considérons le problème régularisé du problème (4)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (8)$$

Proposition

Il existe une unique solution régulière u^ε du problème (8)

Proposition

La solution du problème (4) est limite au sens des distributions quand ε tend vers 0 de la solution du problème (8)

Proposition

Une fonction u , C^1 par morceaux, est solution faible entropique de (4) si et seulement si :

i) u est solution classique là où u est C^1

ii) Sur une courbe de choc Γ , u satisfait $[F(u)] \leq s[U(u)]$, \forall (U, F) couple d'entropie et de flux d'entropie.

Corollaire

1) Si f est strictement convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $f'(u_r) < s < f'(u_l)$

Corollaire

: 2) Si f est convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $u_r < u_l$

Proposition

Une fonction u , C^1 par morceaux, est solution faible entropique de (4) si et seulement si :

i) u est solution classique là où u est C^1

ii) Sur une courbe de choc Γ , u satisfait $[F(u)] \leq s[U(u)]$, \forall (U, F) couple d'entropie et de flux d'entropie.

Corollaire

1) Si f est strictement convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $f'(u_r) < s < f'(u_l)$

Corollaire

: 2) Si f est convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $u_r < u_l$

Proposition

Une fonction u , C^1 par morceaux, est solution faible entropique de (4) si et seulement si :

i) u est solution classique là où u est C^1

ii) Sur une courbe de choc Γ , u satisfait $[F(u)] \leq s[U(u)]$, \forall (U, F) couple d'entropie et de flux d'entropie.

Corollaire

1) Si f est strictement convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $f'(u_r) < s < f'(u_l)$

Corollaire

: 2) Si f est convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $u_r < u_l$

Proposition

Une fonction u , C^1 par morceaux, est solution faible entropique de (4) si et seulement si :

i) u est solution classique là où u est C^1

ii) Sur une courbe de choc Γ , u satisfait $[F(u)] \leq s[U(u)]$, \forall (U, F) couple d'entropie et de flux d'entropie.

Corollaire

1) Si f est strictement convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $f'(u_r) < s < f'(u_l)$

Corollaire

: 2) Si f est convexe, alors un choc est entropique si et seulement si : $u_r < u_l$

Application : la première solution de l'exemple (7) n'est pas entropique, donc non admissible.



J. J. Stoker : *Water waves* , Interscience Publishers, New york,
(1957),