

# INTRODUCTION À L'HOMOTOPIE

GRÉGORY GINOT

RÉSUMÉ. Nous allons présenter une introduction aux théories modernes de l'homotopie, en particulier basées sur les catégories de modèle. Ces notions proviennent des travaux de Daniel Quillen dans les années 1960-70. Nous verrons enfin comment ces idées ont abouti à (et permis de définir) la notion d' $\infty$ -catégories qui sont une notion en un sens plus universelle que celle de catégorie de modèle. Nous nous appuierons sur trois exemples que nous traiterons plus ou moins parallèlement : les espaces topologiques, l'algèbre homologique, et les algèbres commutatives. Ce dernier exemple nous permettra de caractériser le type d'homotopie rationnel des espaces en termes de dg-algèbres commutatives. Les techniques de catégorie de modèles, en plus de leur vertu unificatrice, permettent notamment de faire de l'algèbre homologique dans un cadre non-abélien et ont un rôle important dans les développements récents de la topologie algébrique mais aussi certains aspects de la géométrie algébrique.

## TABLE DES MATIÈRES

I. Notions d'homotopie, algèbre homologique et (r)appels	3
1.1. Homotopie entre fonctions, entre espaces	3
1.2. Groupes d'homotopie d'un espace topologique	4
1.3. Espaces topologiques à homotopie et à homotopie faible près	7
1.4. Algèbre Homologique, foncteurs dérivés	11
1.5. Résolutions, foncteurs exacts, construction de <i>Tor</i> et <i>Ext</i>	15
1.6. Les notions classiques de fibrations pour les espaces topologiques	23
1.7. Groupes d'homotopie relatifs et suites exactes longues en homotopie	28
1.8. La notion classique de cofibration pour les espaces topologiques	34
II. Catégories de Modèle	39
2.1. Définitions et axiomatique	39
2.2. Catégorie homotopique d'une catégorie de modèle	46
2.3. Exemples des complexes de chaînes et argument du petit objet	59
2.4. Catégories de modèles cofibrement engendrées	74
2.5. Foncteurs de Quillen, foncteurs dérivés	77
2.6. Colimites et limites homotopiques	85
III. Ensembles simpliciaux	92
3.1. Complexes simpliciaux et ensembles simpliciaux	92
3.2. Structure de modèle	100
3.3. Groupes d'homotopie simpliciaux	109
3.4. Généralisations et application aux colimites homotopiques	113
IV. Notions d' $\infty$ -catégories	118
4.1. Quelques motivations pour la théorie des $\infty$ -catégories	118
4.2. Le modèle donné par les quasi-catégories	121

4.2.1.	Le nerf d'une catégorie	121
4.2.2.	Quasicatégories	125
4.2.3.	Compositions faibles et catégorie homotopique d'une quasicatégorie	129
4.2.4.	Structure de modèle de Joyal sur les quasicatégories	135
4.3.	Le modèle des catégories enrichies simplicialement	137
4.4.	L' $\infty$ -catégorie associée à une catégorie de modèle	141
4.5.	Notion d' $\infty$ -(co)limites	151
V.	Homotopie Rationnelle	157
5.1.	Algèbres graduées différentielles commutatives, algèbres libres et semi-libres	157
5.2.	Structure de modèle des algèbres graduées différentielles commutatives et algèbres de Sullivan	161
5.3.	Homotopie des CDGAs	172
5.4.	Formes polyédrales	175
5.5.	Espaces et algèbres formelles	179
5.6.	Rationalisation et Équivalence homotopique entre espaces et cdgas	181
VI.	Appendice : (r)appels de topologie et théorie des catégories	191
6.1.	Quelques notions de topologie générale	191
6.1.1.	Espaces séparés, compacts et variantes	191
6.1.2.	Topologie compacte-ouverte pour les espaces de fonctions	193
6.1.3.	Espaces topologiques définis par des propriétés universelles	194
6.1.4.	Complexes cellulaires	199
6.2.	(R)appels et notations sur les catégories	201
6.2.1.	Limites et (co)limites dans des catégories	204
6.2.2.	Adjonction	208
	Références	211

# I. NOTIONS D'HOMOTOPIE, ALGÈBRE HOMOLOGIQUE ET (R)APPELS

Dans ce premier chapitre, nous donnons une vue d'ensemble rapide de la théorie de l'homotopie pour les espaces topologiques, de groupes d'homotopie et des concepts clés afférents, en particulier celui d'équivalence d'homotopie faible. En parallèle, nous donnerons également des bases d'algèbre homologique.

Commençons par préciser quelques

## Conventions et notations.

- (1) On désignera respectivement par **Top** la catégorie des espaces topologiques, dont les flèches sont les applications continues, et par **Top<sub>\*</sub>** celle des espaces topologiques pointés (dont les flèches sont les applications continues envoyant le point base de la source sur celui du but).
- (2) On notera, pour tout anneau  $R$ ,  **$R$ -Mod** la catégorie des  $R$ -modules (dont les flèches sont les applications  $R$ -linéaires) et  $Ch(R)$  la catégorie des complexes de  $R$ -modules (cf 2.3 pour des notations précises).
- (3) On notera  $I$  le segment compact  $[0, 1]$ ,  $\mathbb{S}^n$  la sphère de dimension  $n$ .
- (4) On notera **Cat** la catégorie (large) des catégories et **cat** la catégorie des petites catégories.
- (5) Sauf mention du contraire un (co)produit (quelconque) d'espaces topologiques sera muni de la topologie (co)produit (cf. 6.1.3).
- (6) Nous appellerons pullback un produit fibré et pushout un coproduit fibré dans toute catégorie (cf. 6.2) sans ressentir le besoin d'utiliser une terminologie française.

## 1.1. HOMOTOPIE ENTRE FONCTIONS, ENTRE ESPACES

**Définition 1.1.1.** Deux applications continues  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  entre espaces topologiques sont dites homotopes s'il existe une application continue  $F : X \times \underbrace{[0; 1]}_I \rightarrow Y$

telle que  $F|_{X \times \{0\}} = f_0$  et  $F|_{X \times \{1\}} = f_1$ .

**Définition 1.1.2.** Deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  sont dit homotopes s'il existe deux morphismes  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  tels que  $f \circ g$  est homotope à  $id_Y$  et  $g \circ f$  est homotope à  $id_X$ .

*Notation 1.1.3.* (1) Si deux morphismes  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  sont homotopes, on notera :  $f_0 \simeq f_1$ .

(2) Si deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  sont homotopes, on notera :  $X \simeq Y$ .

(3) Si deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  sont isomorphes (homéomorphes), on notera :  $X \cong Y$ .

La relation d'homotopie entre deux applications continues (et par suite entre espaces) est une relation d'équivalence. Par ailleurs, si  $f \simeq g$  alors  $p \circ f \circ q \simeq p \circ g \circ q$  pour toute paire d'applications continues  $p, q$  (telle que les composées existent bien sûr).

*Exercice 1.1.4.* Démontrer ces affirmations.

**Définition 1.1.5.** Un espace contractile est un espace homotope à un point.

*Exemple 1.1.6.* Un point, une boule,  $\mathbb{R}^n$ .

Contre-exemples : Deux points, un cercle,  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , l'ensemble vide ...

**Définition 1.1.7.** Soit  $X, Y$  deux espaces topologiques,  $A \subseteq X$  un sous-espace, et  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  tels que  $f_0|_A = f_1|_A$ . On dit que  $f_0$  est homotope à  $f_1$  relativement à  $A$  s'il existe une application continue  $F : X \times \underbrace{[0; 1]}_I \rightarrow Y$  telle que  $F|_{X \times \{0\}} = f_0$ ,  $F|_{X \times \{1\}} = f_1$ , et  $F|_A = f_0|_A = f_1|_A$ .

Les propriétés et notations précédentes s'étendent sans difficulté au cas relatif. On notera  $\simeq_A$  la relation être homotope relativement à  $A$ .

**Définition 1.1.8.** Un sous-espace  $A \xrightarrow{i} X$  est un rétracte par déformation (resp. déformation forte) s'il existe  $p : X \rightarrow A$  telle que  $p \circ i = id_A$  et  $i \circ p \simeq id_X$  (resp. relativement à  $A$ ).

*Exemple 1.1.9.* L'exemple standard est la sphère  $\mathbb{S}^n$  qui est un rétracte par déformation forte de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

## 1.2. GROUPES D'HOMOTOPIE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

**Définition 1.2.1.** Si  $X$  est un espace topologique, on note  $\pi_0(X)$  l'ensemble de ses composantes connexes par arcs. Si  $x_0 \in X$ , et  $n \geq 1$ , on note  $\pi_n(X, x_0)$  l'ensemble des classes d'homotopie relatives (au point base) d'applications  $(\mathbb{S}^n, *) \rightarrow (X, x_0)$  (autrement dit les applications continues de  $\mathbb{S}^n$  dans  $X$  qui envoient le point base  $*$  sur  $x_0$  modulo les homotopies  $H$  telles que  $H(*, -) = x_0$ ).

*Notation 1.2.2.* On note  $[X, Y]$  (resp.  $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ ) l'ensemble des classes d'homotopie (resp. relatives) de morphismes  $X \rightarrow Y$ .

*Remarque 1.2.3.* a) Si  $X \neq \emptyset$ , la définition reste valable pour  $\pi_0(X, x_0)$  quel que soit  $x_0 \in X$ .

b) On peut de manière équivalente définir  $\pi_n(X, x_0)$  comme étant les classes d'homotopie relative d'applications  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ , c'est à dire les classes d'homotopie d'applications envoyant le bord de  $I^n$  sur  $x_0$  (et on impose qu'en tout temps  $t \in [0, 1]$ , l'homotopie  $H(-, t) : I^n \times \{t\} \rightarrow X$  vérifie aussi cette propriété).

**Définition 1.2.4** (Suspension). La suspension d'un espace topologique  $X$  est l'espace topologique :

$$\Sigma X := X \times I /_{(x,0) \sim (x',0), (x,1) \sim (x',1)}$$

**Définition 1.2.5** (Suspension réduite). La suspension réduite d'un espace topologique *pointé*  $(X, x_0)$  est l'espace topologique pointé :

$$\Sigma(X, x_0) := (X \times I /_{(x,0) \sim (x',0), (x,1) \sim (x',1), (x_0,t) \sim (x_0,t'), [(x_0, 0)]})$$

où  $[(x_0, 0)]$  est la classe d'équivalence du point  $(x_0, 0)$ .

*Exemple 1.2.6.* Les sphères sont des suspensions réduites :

$$\Sigma(\mathbb{S}^n, *) \cong (\mathbb{S}^{n+1}, *).$$

Ainsi,  $(\mathbb{S}^n, *) \cong \Sigma^n(\mathbb{S}^0, 1)$ .

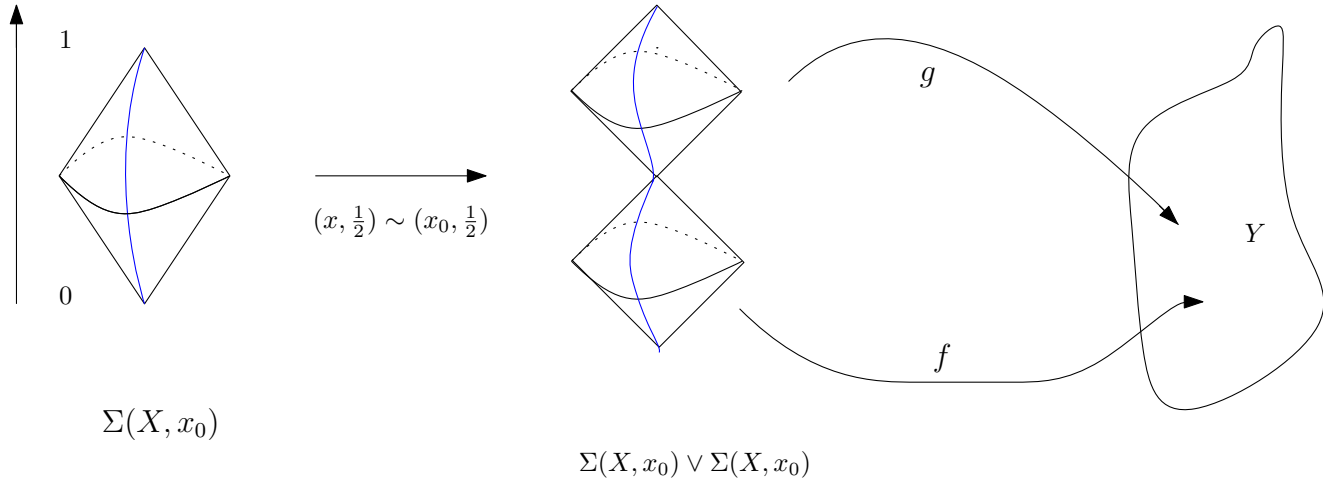


FIGURE 1. La suspension réduite, à gauche, la classe du point base étant représentée en bleu et la définition de  $f * g$ .

Lorsque  $X$  est pointé par un point  $x_0$ , on a une application quotient canonique  $SX \rightarrow \Sigma(X, x_0)$ . Cette application n'est *pas* toujours une équivalence d'homotopie. Elle l'est cependant dès que  $(X, x_0)$  est *bien pointé*<sup>1</sup>, voir la feuille de TD 1. C'est en particulier le cas si  $X$  est un CW-complexe ou une variété topologique quelconque.

**Définition 1.2.7** (Structure produit sur les morphismes de source une suspension). Soient  $f, g : \Sigma(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ . On définit  $f * g : \Sigma(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  comme étant la composée :

$$\Sigma(X, x_0) \twoheadrightarrow \Sigma(X, x_0) /_{X \times \{\frac{1}{2}\}} \cong \Sigma(X, x_0) \vee \Sigma(X, x_0) \xrightarrow{f \vee g} (Y, y_0)$$

voir figure 1. En termes de coordonnées on a donc

$$f * g(x, t) := \begin{cases} f(x, 2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ g(x, 2t - 1) & \text{si } t \geq 1/2. \end{cases}$$

**Proposition 1.2.8.** a) La classe d'homotopie de  $f * g$  ne dépend que des classes d'homotopie de  $f$  et de  $g$ .

b) Le produit  $*$  est associatif à homotopie près :

$$(f * g) * h \simeq f * (g * h)$$

c) L'application constante  $c : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  (définie par  $c(x) = y_0$ ) est une unité pour  $*$  à homotopie près :

$$f * c \simeq c * f \simeq f$$

d) Tout  $f \in [\Sigma(X, x_0), (Y, y_0)]$  admet un inverse pour  $*$  : Posons  $f^{-1}(x, t) := f(x, 1 - t)$ . Alors  $f * f^{-1} \simeq c \simeq f^{-1} * f$ .

Ainsi,  $([\Sigma(X, x_0), (Y, y_0)], *)$  est un groupe, et, en particulier, pour tout  $n \geq 1$ , on a que  $\pi_n(Y, y_0)$  est un groupe.

On a une représentation graphique pratique standard pour un élément de  $\pi_n(X, x_0)$  donné par la figure 2 où l'on représente également le produit.

1. c'est à dire que l'inclusion du point dans  $X$  est une cofibration au sens de la définition 1.8.1

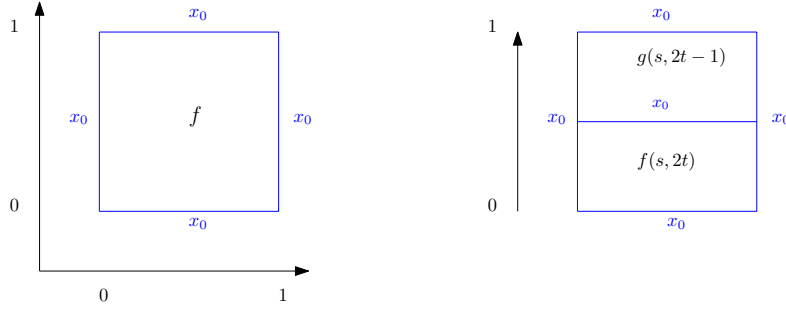


FIGURE 2. La représentation graphique d'une application dans  $\pi_2(X, x_0)$  à gauche, et la représentation graphique du produit  $f * g$  à droite.

**Proposition 1.2.9.** a) Si  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(Y, y_0)$  est abélien. Plus généralement, si  $(X, x_0) = \Sigma(X', x'_0)$ , alors  $*$  est commutatif sur  $[\Sigma(X, x_0), (Y, y_0)]$ .  
b) Si  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ , on définit un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} f_* : \pi_n(X, x_0) &\rightarrow \pi_n(Y, y_0) \\ [\gamma] &\mapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

De plus, si  $f$  est une équivalence d'homotopie, alors  $f_*$  ci-dessus est un isomorphisme. On définit de même une application  $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ ,  $[x] \mapsto [f(x)]$ .

*Exercice 1.2.10.* Démontrer les deux propositions précédentes. On peut faire un dessin (cf figure 3) pour illustrer la preuve de la commutativité des groupes d'homotopie supérieurs (ou double suspensions).

*Remarque 1.2.11.* On a représenté dans la figure 3 une homotopie  $H$  entre  $f * g$  et  $g * f$  pour des applications  $f, g : (\mathbb{S}^2, *) \rightarrow (X, x_0)$  obtenue en faisant passer  $f$  au dessus de  $g$  en “contractant et en les faisant tourner dans le sens anti-trigonométrique”  $f$  et  $g$ . On aurait pu construire une autre homotopie  $H'$  entre  $f * g$  et  $g * f$  en tournant dans l'autre sens, c'est à dire le sens trigonométrique. Les applications  $H, H' : (\mathbb{S}^2, *) \times I \rightarrow (X, x_0)$  ne sont pas homotopes l'une à l'autre en général, et donc une telle homotopie est un choix non canonique même à homotopie près.

Notons qu'en dimension supérieure  $n \geq 3$ , la même construction peut se faire en faisant le produit  $H \times \text{id}_{I^{n-2}} : (I^n, \partial I^n) \times I \rightarrow (X, x_0)$ . Dans ce cas  $H \times \text{id}$  et  $H' \times \text{id}$  deviennent homotopes (car on peut prendre une homotopie similaire, mais en jouant sur les coordonnées dans la direction supplémentaire, pour passer de  $H$  à  $H'$ ). Mais il y a plusieurs choix non-homotopes de telles homotopies! De manière générale, l'existence de ces choix donne une structure très riche et intéressante en homotopie, ayant donné naissance à la notion de  $E_n$ -algèbre (aussi appelée algèbre sur les cubes de dimension  $n$ ) cruciale en homotopie et qui a des ramifications dans de nombreuses autres branches des mathématiques; elle sera étudiée dans le cours de Y. Harpaz.

*Remarque 1.2.12.* Si  $x_0$  et  $x'_0$  sont dans la même composante connexe par arcs, alors on a des isomorphismes  $\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x'_0)$  pour tout  $n \geq 1$ . Un tel isomorphisme est induit en conjuguant des lacets (ou sphères) par un chemin de  $x_0$  à  $x'_0$ . Cet isomorphisme n'est pas canonique en général. Il le devient, pour  $n = 1$ , si par

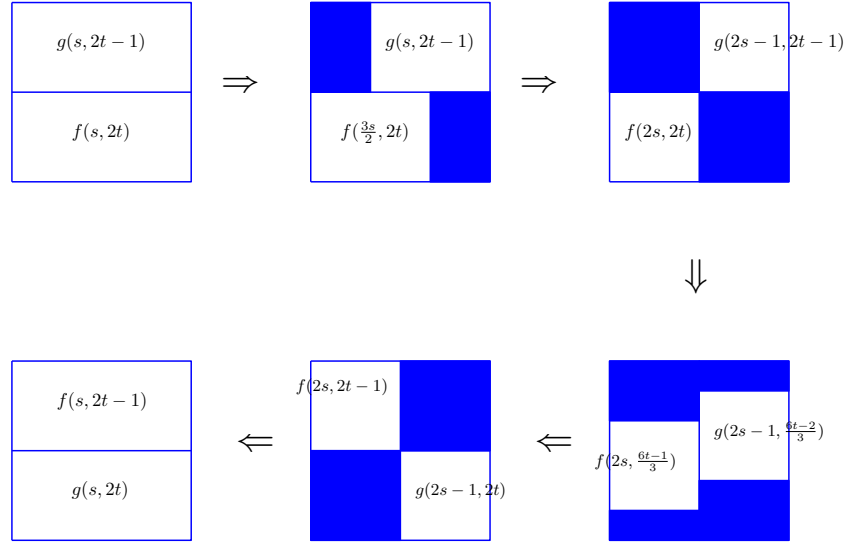


FIGURE 3. La représentation graphique d'une homotopie entre  $f * g$  (en haut) et  $g * f$  (en bas), les symboles  $\Rightarrow$  désignant des homotopies modifiant affinement l'une des coordonnées ( $s$  ou  $t$ ) de chaque fonction. Les parties bleues désignent l'application constante qui vaut  $x_0$ .

exemple  $\pi_1(X, x_0)$  est abélien, et pour  $n \geq 1$  si l'action induite de  $\pi_1(X, x_0)$  sur  $\pi_n(X, x_0)$  est triviale<sup>2</sup>.

### 1.3. ESPACES TOPOLOGIQUES À HOMOTOPIE ET À HOMOTOPIE FAIBLE PRÈS

La topologie algébrique étudie certainement les espaces topologiques à équivalence d'homotopie près, mais elle s'intéresse encore plus à celle d'espace topologique à équivalence d'*homotopie faible* près. Cette notion est en fait celle qui donne lieu à plus de généralisations et analogues en mathématiques<sup>3</sup>.

**Définition 1.3.1 (équivalence d'homotopie faible).** Une application  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie faible si  $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  est une bijection et si pour tout  $x_0 \in X$  et tout  $n \geq 1$ ,  $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$  est un isomorphisme.

*Notation 1.3.2.* On notera  $X \xrightarrow{\sim} Y$  une équivalence d'homotopie faible.

*Remarque 1.3.3.* Une équivalence d'homotopie est une équivalence faible d'homotopie. La réciproque n'est pas vraie, en effet, *a priori*, une équivalence faible n'a par exemple pas d'inverse homotopique, c'est à dire qu'il n'y a pas d'application continue  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $g_*$  est l'inverse de  $f_*$  sur les groupes d'homotopie.

*Exemple 1.3.4.*  $X = \mathbb{N}$  et  $Y = \{\frac{1}{n}, n > 0\} \cup \{0\}$  sont faiblement homotopiquement équivalents mais pas homotopiquement équivalents.

*Exercice 1.3.5.* Démontrer le résultat énoncé.

2. un espace pour lequel les actions induites sont toutes triviales est dit simple. C'est évidemment le cas si l'espace est simplement connexe.

3. comme nous le verrons avec le modèle purement combinatoire donné par les ensemble ssim-  
pliciaux, ou les algèbres différentielles graduées commutatives

La relation  $X$  et  $Y$  sont reliés par *une* équivalence d'homotopie faible n'est pas une relation d'équivalence, puisque rien ne garantit qu'une application inverse existe et donc la symétrie de cette relation (l'exemple précédent le démontre...). On va donc considérer la relation engendrée par cette relation.

**Définition 1.3.6.** Deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  seront dits faiblement homotopes si il existe une suite finie

$$X \xrightarrow{\sim} Z_1 \xleftarrow{\sim} Z_2 \xrightarrow{\sim} Z_3 \xleftarrow{\sim} Z_4 \dots Z_n \xrightarrow{\sim} Y$$

dont toutes les flèches sont des équivalences d'homotopie faible.

*Remarque 1.3.7.* On prendra garde qu'être faiblement homotope implique évidemment avoir des groupes d'homotopie isomorphes (sur les composantes connexes par arcs) mais que la réciproque n'est pas vraie en général. En effet, deux espaces topologiques peuvent avoir des groupes d'homotopie deux à deux isomorphes sans être faiblement équivalents. Par exemple,  $\mathbb{R}P^2$  et  $\mathbb{R}P^\infty \times S^2$  ont les mêmes groupes d'homotopie. Il ne peut en revanche pas exister de morphisme  $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^\infty \times S^2$  qui induise un isomorphisme en homotopie, car sinon, le théorème 1.3.10 assurerait que  $f$  est un quasi-isomorphisme, ce qui ne peut être le cas, car ces deux espaces n'ont pas les mêmes groupes d'homologie.

Nous disposons donc de deux notions naturelles que l'on souhaite étudier :

- les espaces topologiques à homotopie près, donnant lieu à la catégorie homotopique forte  $\mathbf{Ho}^{strong} := \mathbf{Top}[\mathcal{H}^{-1}]$
- les espaces topologiques à homotopie faible près, donnant lieu à la catégorie homotopique forte  $\mathbf{Ho} := \mathbf{Top}[\mathcal{WH}^{-1}]$ .

Ici on a noté  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{WH}$  les équivalences d'homotopie, respectivement les équivalences d'homotopie faibles ; les catégories homotopiques sont donc les catégories obtenues en rajoutant formellement des inverses aux équivalences d'homotopie (respectivement d'homotopie faible). Voir la définition 2.2.1 ci-dessous pour une définition plus précise. Que de telles constructions donnent lieu à des catégories n'est pas évident a priori ; et par ailleurs l'étude de ces catégories, ne serait-ce que de leurs morphismes, n'est pas aisée. En effet, n'importe quel zigzag  $X \rightarrow Z_1 \xleftarrow{\sim} Z_2 \rightarrow Z_3 \xleftarrow{\sim} Z_4 \dots Z_n \rightarrow Y$  de longueur finie définit un morphisme entre  $X$  et  $Y$  dans  $\mathbf{Ho}$  (puisque les équivalences faibles ont par définition un inverse dans cette catégorie) et plusieurs zigzags de longueurs distinctes peuvent définir des morphismes égaux dans cette catégorie. Il n'est pas évident qu'une telle construction donne une catégorie au sens usuel (c'est à dire que les morphismes entre objets forment des ensembles). Nous verrons dans le chapitre 2.2 que c'est bien le cas et que les structures de modèle donnent une description de ces morphismes.

*Remarque 1.3.8.* En général, les espaces que l'on rencontrera seront relativement "gentils". Par exemple, ce seront des complexes cellulaires ; ces derniers ont pour propriété que les notions d'homotopie et d'homotopie faibles sont équivalentes pour eux comme démontré par Whitehead.

**Théorème 1.3.9** (Whitehead, 1949). Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue (non-nécessairement cellulaire) entre deux CW-complexes, alors  $f$  est une équivalence faible d'homotopie si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie.

*Démonstration.* Voir la feuille de TD 1 et sa solution. □



Notons que les équivalences d'homotopies faibles sont cependant suffisantes pour identifier les invariants homologiques de deux espaces topologiques :

**Théorème 1.3.10.** Si  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence faible d'homotopie, alors, pour tout groupe abélien  $G$ , les applications induites :

$$f : H_n(X, G) \rightarrow H_n(Y, G)$$

sont des isomorphismes.

On renvoie à [18, 3, 10, 21] pour une preuve. Le résultat est vrai en cohomologie et pour toute théorie (co)homologique extraordinaire (au sens des axiomes d'Eilenberg-Steenrod ou donnée par un spectre) et pour la (co)homologie à coefficient local (voir la remarque 1.3.15). Ce dernier résultat est une autre manifestation de l'importance de la notion d'homotopie faible.

Un autre très beau résultat de Whitehead affirme que

**Théorème 1.3.11.** Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue entre espaces *simplement connexes*<sup>4</sup> telle que  $f_* : H_i(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(Y, \mathbb{Z})$  est un isomorphisme pour tout  $i < n$  et un épimorphisme pour  $i = n$ , alors il en va de même pour  $f_* : \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$  (quel que soit  $x \in X$ ).

En particulier, si  $f_* : H_n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(Y, \mathbb{Z})$  est un isomorphisme pour tout  $n \geq 0$ , alors  $f$  est une équivalence d'homotopie faible.

*Démonstration.* Voir [3, Théorème 11.2]. □

*Remarque 1.3.12.* On peut remarquer que le premier point est une sorte de réciproque *partielle* du théorème de Hurewicz

*Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue entre espaces connexes par arcs et que  $\pi_i(f) : \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$  est un isomorphisme pour tout  $i < n$  et un isomorphisme ou épimorphisme pour  $i = n$ , alors il en va de même pour  $f_* : H_i(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(Y, \mathbb{Z})$ .*

*Remarque 1.3.13.* Le théorème 1.3.11 n'est pas vrai si on ne suppose pas  $X$  et  $Y$  simplement connexes en général, voir [21] pour un contre-exemple (par exemple  $S^2 \vee S^1$ !). On peut cependant modifier les hypothèses pour gérer néanmoins ce cas.

Toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  induit une application continue  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  au niveau des revêtements universels de  $X$  et  $Y$  (s'ils existent) par propriété des revêtements.

**Théorème 1.3.14.** Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue telle que pour tout  $x \in X$ ,  $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$  est un isomorphisme et que  $\tilde{f}_* : H_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\tilde{Y}, \mathbb{Z})$  est un isomorphisme pour tout  $n \geq 0$ , alors  $f$  est une équivalence d'homotopie faible.

*Esquisse de la preuve :* L'isomorphisme  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}[\pi_0(X)] \xrightarrow{\cong} H_0(Y) \cong \mathbb{Z}[\pi_0(Y)]$  implique que  $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  est une bijection. Ceci permet de se ramener à démontrer le résultat sur les composantes connexe par arcs. La condition sur le  $\pi_1$  fait partie de l'énoncé. En passant aux revêtements universels, la longue suite exacte d'homotopie d'un revêtement (cas particulier de celle d'une fibration de Serre) cf

---

4. c'est à dire que  $\pi_0(X) = \{0\} = \pi_1(X)$

Théorème 1.6.14 permet de se ramener à démontrer que  $\tilde{f}_* : \pi_*(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_*(\tilde{Y}, \tilde{f}(\tilde{x}))$  est un isomorphisme. Ce qui est exactement le Théorème 1.3.11.

Cet énoncé nécessite de pouvoir prendre des revêtements universels; ce n'est en fait pas un problème car tout espace est faiblement homotope à un CW-complexe (cf la Remarque 3.2.19), et donc à équivalence d'homotopie faible près, tout espace à un tel revêtement universel (évidemment le calcul de cet espace peut être compliqué...).

*Remarque 1.3.15.* L'hypothèse que les applications induites sur l'homologie des revêtements universels est un isomorphisme peut se tester au niveau de l'homologie à coefficient local de  $X, Y$ ; c'est d'ailleurs l'énoncé correct lorsque les espaces n'ont pas un tel revêtement universel.

Si  $X$  est un espace connexe par arcs, un système local de groupes abéliens est une représentation  $\mathbb{Z}$ -linéaire de  $\pi_1(X, x_0)$ , autrement dit un  $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ -module.

Un résultat standard est que la catégorie de ces représentations linéaires du groupe fondamental est équivalente à la catégorie des faisceaux de groupes abéliens localement constant sur  $X$  (et est indépendante du choix du point base  $x$  à équivalence près). Pour tout système local  $\mathcal{M}$ , la (co)homologie (singulière) à coefficient local<sup>5</sup> est la (co)homologie du complexe  $C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]} \mathcal{M}$ ; on peut donner une construction directe de ce complexe sans passer par le revêtement universel et qui est définie pour tout espace topologique. Un système local non-trivial canonique est donné par  $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]$ .

Pour un espace non connexe par arcs, on peut généraliser la notion de système local, définie alors comme foncteur du groupoïde fondamental  $\pi(X)$  dans **Ab** la catégorie des groupes abéliens, et de sa cohomologie.

*Théorème 1.3.16.* Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue telle que pour tout  $x \in X$ ,  $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$  est un isomorphisme et que  $\tilde{f}_* : H_n(X, \mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]) \rightarrow H_n(Y, \mathbb{Z}[\pi_1(X, x)])$  est un isomorphisme pour tout  $n \geq 0$ , alors  $f$  est une équivalence d'homotopie faible.

L'équivalence entre les théorèmes 1.3.16 et 1.3.14 se déduit d'un argument standard de suite spectrale (appliqué à celle de Leray-Serre du revêtement universel).

Les constructions usuelles (quotient, tiré en arrière, ...) ne préservent pas en général les homotopies ou les homotopies faibles.

*Exemple 1.3.17.* Considérons les deux poussés en avant définis par les diagrammes  
a)

$$\begin{array}{ccc} \{*, *\} & \longrightarrow & \{*\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{*\} & \longrightarrow & \{*\} \amalg_{\{*, *\}} \{*\} \simeq \{*\} \end{array}$$

5. il est également standard que pour des espaces paracompacts cette cohomologie est celle du faisceau localement constant associé

b) Mais

$$\begin{array}{ccc} \{0, 1\} & \longrightarrow & \{*\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{S}^1. \end{array}$$

On constate que ces poussés en avant ne sont pas homotopes (ni faiblement homotopes) alors que pourtant  $[0, 1]$  est homotope au point. Ainsi, on voit que les poussés en avant d'applications homotopes ne sont *pas* homotopes en général, c'est donc à fortiori le cas des quotients<sup>6</sup>. En particulier le quotient de l'application  $X \rightarrow \{*\}$  est trivial et ne contient aucune information sur  $X$ . On pourrait facilement faire des constructions similaires avec toutes sortes de limites et colimites (y compris le cas d'une réunion) pour montrer que ces (co)limites ne se comportent pas bien vis à vis de l'invariance par homotopie ou homotopie faible.

Cet exemple se généralise bien sûr aux tirés en-arrière et à la plupart des (co)limites.

Pour palier ce défaut, et pour étudier les recollements d'espace topologiques à homotopie près, en d'autres termes pour comprendre la structure de  $\mathbf{Ho}$ ,  $\mathbf{Ho}^{strong}$ , on doit construire des versions "homotopiques" de ces (co)limites. Ces constructions permettent de relier les groupes d'homotopie, de (co)homologie et autres invariants topologiques de la (co)limite homotopique à ceux des différentes composantes. On donnera un exemple de poussé en avant homotopique ci-dessous 1.8.9 et la théorie des catégories de modèle permettra de définir et étudier ces notions de manière générale (cf 2.6).

#### 1.4. ALGÈBRE HOMOLOGIQUE, FONCTEURS DÉRIVÉS

On fixe un anneau  $R$  commutatif.

**Définition 1.4.1.** Un complexe de chaînes est un diagramme de  $R$ -modules :

$$\dots \xrightarrow{d} C_i \xrightarrow{d} C_{i-1} \xrightarrow{d} C_{i-2} \dots$$

tel que  $d \circ d = 0$ .

Un complexe de cochaînes est un diagramme de  $R$ -modules :

$$\dots \xleftarrow{\partial} C_i \xleftarrow{\partial} C_{i-1} \xleftarrow{\partial} C_{i-2} \dots$$

tel que  $\partial \circ \partial = 0$ .

**Définition 1.4.2.** un morphisme de complexes de chaînes  $f : A \rightarrow B$  est une suite de morphismes  $f_n : A_n \rightarrow B_n$  compatible avec la différentielle :  $d \circ f_n = f_{n-1} \circ d$ .

*Notation 1.4.3.* On notera  $Ch(R)$  la catégorie des complexes de chaînes de  $R$ -modules et  $Ch_{\geq 0}(R)$ ,  $Ch_{\leq 0}(R)$  ses sous-catégories pleines des complexes concentrés en degrés positifs ou négatifs (c'est à dire tels que  $C_{i < 0} = 0$  ou  $C_{i > 0} = 0$ ).

**Définition 1.4.4** (Suspension d'un complexe de chaînes). Soit  $(C, d)$  un complexe de chaînes de  $R$ -modules. On définit sa suspension, notée  $C[1]$  comme la suite de  $R$ -modules  $(C[1]_i := C_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$  munie de la différentielle  $-d$ .

---

6. qui ne sont qu'un cas particulier de poussé en avant où  $Y = \{*\}$

La suspension itérée  $C[n] = C[1] \cdots [1]$  est donc le complexe  $C[n]_i = C_{i-n}$  muni de la différentielle  $(-1)^n d$ . On peut voir tout  $R$ -module  $M$  comme un complexe concentré en degré 0, c'est à dire de la forme  $\cdots 0 \rightarrow M \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$ , que l'on notera tout simplement  $M$  sans autre forme de procès, et donc aussi comme un complexe concentré en degré  $i$  noté bien évidemment comme la suspension  $M[i]$ . Le foncteur  $R\text{-Mod} \rightarrow Ch(R)$  ainsi obtenu est pleinement fidèle.

**Définition 1.4.5** (quasi-isomorphisme). Un morphisme de complexes de chaînes  $f : A \rightarrow B$  est appelé un quasi-isomorphisme, (ou une équivalence faible), s'il induit des isomorphismes en tout degré en homologie. On notera parfois  $\xrightarrow{\sim}$  les quasi-isomorphismes.

Cette notion est fondamentale; par exemple l'équivalence entre les différentes théories homologiques entre les complexes simpliciaux, leurs triangulations ou l'homologie singulière est induite par des quasi-isomorphismes. De manière générale, l'algèbre homologique est l'étude des complexes de chaînes à quasi-isomorphisme près.

**Définition 1.4.6.** Une homotopie de chaînes entre deux morphismes  $f, g : A \rightarrow B$  est une suite d'applications  $H_n : A_n \rightarrow B_{n+1}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on ait

$$d \circ H_n + H_{n-1} \circ d = f_n - g_n.$$

On dira que  $f$  est homotope à  $g$ .

**Lemme 1.4.7.** Si  $f, g : A_* \rightarrow B_*$  sont des morphismes de complexes de chaînes homotopes, alors  $f_*, g_* : H_*(A_*) \rightarrow H_*(B_*)$  sont *égales*.

On déduit facilement du lemme précédent que si  $f$  est homotope à l'identité (ou tout isomorphisme ou tout quasi-isomorphisme), c'est un quasi-isomorphisme.

**Définition 1.4.8.** On dit que deux complexes de chaînes sont quasi-isomorphes s'il existe un zigzag de quasi-isomorphismes entre eux. On dit que deux complexes  $A, B$  sont homotopes s'il existe des morphismes de complexes  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow A$  tels que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  soient homotope au sens des chaînes à  $\text{id}_B$  et  $\text{id}_A$ .

Tout comme pour les espaces topologiques, on a deux catégories "homotopiques" induites par ces notions.

- on a la catégorie  $\mathcal{K}(R) := Ch(R)/\simeq$  obtenue en quotientant les morphismes de  $Ch(R)$  par la relation d'homotopie de chaînes, appelée parfois catégorie homotopique de  $R$ ;
- la *catégorie dérivée*  $\mathcal{D}(R) := Ch(R)[qiso^{-1}]$  où on a formellement inversé les quasi-isomorphismes.

On a donc défini deux catégories  $\mathcal{K}(R)$  et  $\mathcal{D}(R)$  dont les objets sont les complexes de chaînes de  $R$ -modules, et telles que pour tous complexes  $M$  et  $N$ ,  $Hom_{\mathcal{K}(R)}(M, N) = Hom_R(M, N)/\simeq$ , (où  $\simeq$  est la relation d'homotopie entre morphismes,) et où  $Hom_{\mathcal{D}(R)}$  est obtenue en ajoutant formellement à  $Hom_R$  un inverse à chaque quasi-isomorphisme.

Notons que l'on a une "factorisation"  $\mathcal{D}(R) \cong \mathcal{K}(R)[qiso^{-1}]$ .

*Terminologie 1.4.9.* On dit qu'un complexe de chaînes est *acyclique* si son homologie est nulle en tout degré.

Autrement dit un complexe de chaînes  $(C_*, d)$  est acyclique si et seulement si la suite  $\cdots C_i \xrightarrow{d} C_{i-1} \rightarrow \cdots$  est exacte.

*Exemple 1.4.10.* Si  $X$  est un espace topologique contractile, alors son complexe des chaînes singulières réduites  $\ker(C_*(X) \rightarrow C_*(\{*\}))$  est acyclique.

On réunit dans le lemme suivant les deux lemmes fondamentaux/fondateurs de l'algèbre homologique :

**Lemme 1.4.11.** a) (*Lemme du serpent*) Si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  est une suite exacte courte de complexes de chaînes<sup>7</sup>, on obtient une suite exacte longue *naturelle*<sup>8</sup> en homologie :

$$\dots H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(B) \dots$$

b) (*Propriété 2 pour 3*) Étant donné un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \twoheadrightarrow & C' \end{array}$$

Si les deux lignes sont exactes, et si deux des morphismes verticaux sont des quasi-isomorphismes, le troisième l'est aussi.

Tout comme dans **Top**, les constructions de (co)limites dans les complexes ne sont pas préservées par les équivalences faibles.

*Exemple 1.4.12.* Soit  $M$  un  $R$ -module. On a un complexe concentré en degré  $\geq 0$

$$M_*^+ := \dots \longrightarrow M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id} M \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

qui vérifie donc  $M_i^+ = M$  pour tout  $i \geq 0$ . L'homologie de ce complexe est nulle en tout degré et le morphisme canonique vers le complexe nul  $0$  est donc un quasi-isomorphisme. De même on a le complexe

$$M_*^- := \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id} M \longrightarrow \dots$$

qui vérifie donc  $M_i^- = M$  pour tout  $i \leq 0$  et est aussi quasi-isomorphe à  $0$ .

On a aussi un morphisme de complexe  $\phi : M_*^- \rightarrow M_*^+$  donné par

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & M & \xrightarrow{0} & M & \xrightarrow{id} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{id} & M & \xrightarrow{0} & M & \xrightarrow{id} & M & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

et on en déduit un diagramme commutatif de quasi-isomorphismes  $M_*^- \xrightarrow{\phi} M_*^+$ .

$$\begin{array}{ccc} M_*^- & \xrightarrow{\phi} & M_*^+ \\ 0 \downarrow & & \downarrow 0 \\ 0 & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}$$

On a que le noyau et le conoyau de  $0 \rightarrow 0$  sont encore  $0$ . En revanche le noyau de  $\phi$  est  $\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id} M \longrightarrow \dots$  où le premier  $0$  est en degré  $0$  dont l'homologie est  $M$  en degré  $-1$  et triviale en tout autre degré.

7. par définition cela veut dire que  $f, g$  sont des morphismes de complexes et que en tout degré  $n$  les suites induites de modules sont exactes

8. autrement dit on a un foncteur de la catégorie des suites exactes courtes de complexes dans celle des suites exactes longues de modules

De même le conoyau a une homologie qui vaut  $M$  en degré 1 et 0 ailleurs. Dans les deux cas le noyau et le conoyau de  $\phi$  ne peuvent pas être quasi-isomorphes à celui de  $0 \rightarrow 0$  ce qui montre que même dans un cas simple, le noyau et le conoyau ne sont pas préservés par quasi-isomorphisme.

Cet exemple se généralise au poussé en avant et tiré en arrière bien entendu.

*Remarque 1.4.13.* Soit  $N$  un  $R$ -module et  $(A, d)$  un complexe. On peut étendre la différentielle  $d$  linéairement en  $d \otimes_R \text{id}_N$  sur chaque  $A_i \otimes_R N$ . Il est clair que la suite obtenue  $(A_i \otimes_R N, d \otimes_R \text{id}_N)$  est un complexe de chaînes.

Si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme de complexe de  $R$ -modules, alors l'application induite  $f \otimes_R \text{id}_N$  est un morphisme de complexe. De même, une homotopie  $H$  entre deux morphismes de complexes  $f, g$  induit une homotopie  $H \otimes_R \text{id}_N$  entre les applications  $f \otimes_R \text{id}_N$  et  $g \otimes_R \text{id}_N$ .

En revanche, un quasi-isomorphisme  $f : A \rightarrow B$  n'induit *pas* un quasi-isomorphisme  $A \otimes_R \text{id}_N \rightarrow B \otimes_R \text{id}_N$  en général (sauf si  $N$  est plat). Ce phénomène est dû au fait que le produit tensoriel  $- \otimes_R \text{id}_N$  ne préserve pas les suites exactes courtes en général et est responsable du théorème des coefficients universels.

De même les foncteurs  $\text{Hom}_R(-, N)$  et  $\text{Hom}_R(N, -)$  ne sont pas invariants par quasi-isomorphisme. Il convient d'étudier quelques exemples et exercices d'algèbre homologique sur ce sujet dans votre référence préférée (ou consulter celles données sur la page web du cours).

La construction du cône d'un morphisme de complexe est importante en algèbre homologique. Nous verrons (proposition 2.6.21) qu'ils sont un modèle très simple pour les colimites homotopiques de complexes de chaînes.

**Définition 1.4.14.** Soit  $f : (P_*, d_P) \rightarrow (Q_*, d_Q)$  un morphisme de complexes de chaînes. Le cône de  $f$  est le complexe de chaînes  $C(f)$  qui en degré  $n$  est donné par  $C(f)_n = P_{n-1} \oplus Q_n$  et est muni de la différentielle  $d(x, y) = (-d(x), d(y) + f(x))$  (pour  $x \in P_{n-1}, y \in Q_n$ ).

L'inclusion canonique et la projection canonique donne une suite exacte courte de complexes de chaînes

$$0 \rightarrow Q_* \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{p} P_*[1]$$

(où on a suivi la définition 1.4.4 pour la convention sur la suspension d'un complexe de chaînes). Un calcul rapide montre que la longue suite exacte associée en homologie (lemme 1.4.11) est

$$\dots \rightarrow H_n(P_*) \xrightarrow{f_*} H_n(Q) \xrightarrow{i_*} H_n(C(f)) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(P_*) \rightarrow \dots$$

En particulier, on a

**Lemme 1.4.15.** Soit  $f : P \rightarrow Q$  un morphisme de complexes de chaînes. Alors  $f$  est un quasi-isomorphisme si et seulement si le cône  $C(f)$  est acyclique.

*Remarque 1.4.16.* On appellera cocône d'un morphisme  $f : P \rightarrow Q$  le complexe  $coC(f)$  qui en degré  $n$  vaut  $P_n \oplus Q_{n+1}$  et est muni de la différentielle  $d(x, y) = (d(x), -d(y) + f(x))$  pour  $x \in P_n, y \in Q_{n+1}$ . On a que  $H_i(coC(f)) \cong H_{i+1}(C(f))$  (bien que  $C(f)$  ne soit pas exactement la désuspension du cône). On a évidemment une suite exacte courte de complexes

$$0 \rightarrow Q_*[-1] \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{p} P_*.$$

*Exercice 1.4.17.* Reprendre l'exemple 1.4.12 et vérifier que le cône de  $M \xrightarrow{id} M$  est trivial. Calculer l'homologie du cône et du cocône de  $M \xrightarrow{0} N$  pour deux  $R$ -modules  $M$  et  $N$ .

### 1.5. RÉOLUTIONS, FONCTEURS EXACTS, CONSTRUCTION DE $Tor$ ET $Ext$

On a vu que les (co)limites usuelles ou les opérations de prendre  $\text{Hom}$  ne sont pas invariantes par quasi-isomorphisme. En algèbre homologique, on a une façon standard de réparer ce problème par l'utilisation de *résolutions*. Nous (r)appelons ces notions maintenant qui seront en un sens généralisé dans le cadre de catégories de modèle plus loin.

Dans cette section, nous énonçons des résultats pour des catégories abéliennes (cf [20] ou toute autre référence). Le lecteur qui ne sait pas ce que c'est peut n'avoir en tête que deux types d'exemples : les catégories des  $R$ -modules ou leurs catégories opposées ou  $R$  est un anneau associatif unitaire quelconque. Les catégories de complexes, l'homologie et toutes les notions précédentes ont un sens dans ce cadre plus général mais il suffit de garder l'intuition précédente en tête si on ne connaît pas ces notions. Notons que les morphismes entre  $R$ -modules forment un groupe abélien et que ceci se généralise à toute catégorie abélienne.

**Définition 1.5.1.** Un foncteur  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  entre deux catégories abéliennes est

- (1) additif si  $F(f + g) = F(f) + F(g)$  et  $F(0) = 0$  ;
- (2) exact à gauche (resp. à droite) si pour toute suite exacte  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ , la suite  $0 = F(0) \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C)$  (resp.  $F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$ ) est exacte ;
- (3) est *exact* si il envoie toute suite exacte courte sur une suite exacte courte (autrement dit est exact à gauche et à droite).

Le lemme suivant fournit des exemples fondamentaux de ces notions.

**Lemme 1.5.2.** Soit  $M$  un  $R$ -module, alors le foncteur  $M \otimes_R -$  est exact à droite, et  $\text{Hom}_R(-, M)$  et  $\text{Hom}_R(M, -)$  sont exacts à gauche.

Ceci conduit à regarder des modules rendant ces suites toujours exactes. Il s'agit respectivement des modules plats, projectifs et injectifs.

**Définition 1.5.3.** (1) Un  $R$ -module  $P$  est dit projectif si, pour tout morphisme  $f : P \rightarrow N$  de  $R$ -modules et tout morphisme surjectif  $p : M \twoheadrightarrow N$  de  $R$ -modules, il existe un morphisme  $\tilde{f}$  tel que  $f = p \circ \tilde{f}$  :

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \tilde{f} \swarrow & \downarrow f & \\ M & \xrightarrow{p} & N. \end{array}$$

- (2) Un  $R$ -module  $I$  est dit injectif si, pour tout morphisme  $f : N \rightarrow I$  de  $R$ -modules et tout morphisme injectif  $i : N \hookrightarrow M$  de  $R$ -modules, il existe un

morphisme  $\tilde{f}$  tel que  $f = \tilde{f} \circ i$  :

$$\begin{array}{ccc} & & I \\ & \nearrow f & \uparrow \tilde{f} \\ N & \xrightarrow{i} & M. \end{array}$$

- (3) un  $R$ -module est dit plat si pour toute suite exacte  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ , la suite  $0 \rightarrow P \otimes_R A \rightarrow P \otimes_R B \rightarrow P \otimes_R C \rightarrow 0$  est exacte.
- (4) Un objet  $P$  d'une catégorie abélienne  $\mathbf{C}$  est dit projectif (resp. injectif) si il vérifie les mêmes conditions de relèvement que (1) (resp. (2)) dans la catégorie  $\mathbf{C}$  (ou surjectif est remplacé par épimorphisme, injectif par monomorphisme)

Les modules projectifs et injectifs vérifient bien la propriété annoncée.

**Proposition 1.5.4.** (1) Un  $R$ -module  $P$  est projectif si et seulement si pour toute suite exacte  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ , la suite  $0 \rightarrow \text{Hom}_R(P, A) \xrightarrow{f \circ -} \text{Hom}_R(P, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}_R(P, C) \rightarrow 0$  est exacte.

(2) Un  $R$ -module est injectif si et seulement si pour toute suite exacte  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ , la suite  $0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, P) \xrightarrow{- \circ g} \text{Hom}_R(B, P) \xrightarrow{- \circ f} \text{Hom}_R(A, P) \rightarrow 0$  est exacte.

Notons que cette proposition est vraie dans toute catégorie abélienne.

*Démonstration.* Soit  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  une suite exacte courte. Pour tout module  $P$ , on a un complexe

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, A) \xrightarrow{f \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, C)$$

où la première application est  $(\phi : M \rightarrow A) \mapsto (f \circ \phi; P \rightarrow B)$  et la deuxième est  $(\psi : P \rightarrow B) \mapsto (g \circ \psi; P \rightarrow C)$ . Comme  $f \circ g = 0$ , on a bien que la composée de deux applications linéaires est nulle. Montrons que le premier morphisme  $f \circ -$  est injectif. En effet si  $f \circ \phi : P \rightarrow B$  est nulle, alors  $\phi$  est nulle puisque  $f$  est injective. Montrons maintenant que  $\ker(g \circ -) = \text{Im}(f \circ -)$ . Puisque on sait déjà qu'on a un complexe, il suffit de montrer l'inclusion du noyau de  $g \circ -$  dans l'image de  $f \circ -$ . Soit  $g \circ \psi = 0$ , alors pour tout  $m \in P$ , on a que  $\phi(m) \in \ker(g)$ , donc il existe  $a \in A$  tel que  $\phi(m) = f(a)$  car la suite  $A \rightarrow B \rightarrow C$  est exacte. Mais comme en plus  $f$  est injective, ce  $y$  est unique. On le note  $\psi(m)$ . L'unicité garantit que l'application  $m \mapsto \psi(m)$  est bien linéaire et par construction on a  $\phi = f \circ \psi$ .

Jusqu'à présent nous n'avons pas utilisé d'hypothèse sur  $P$  et nous avons que pour que la suite  $\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, A) \xrightarrow{f \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, C)$  soit exacte il faut et il suffit que le dernier morphisme  $\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, C)$  soit surjectif. Or ce morphisme est surjectif précisément si pour tout morphisme  $\psi : P \rightarrow C$ , il existe un morphisme  $\tilde{\psi}$  rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \tilde{\psi} \swarrow & \downarrow \psi & \\ B & \xrightarrow{g} & C. \end{array}$$



Donc si  $P$  est projectif, on a bien que ce dernier morphisme est surjectif pour toute suite exacte  $A \rightarrow B \rightarrow C$ . Réciproquement, si ce résultat est vrai pour toute suite exacte, alors pour toute surjection  $p : M \twoheadrightarrow N$ , on a une suite exacte  $\ker(p) \hookrightarrow M \twoheadrightarrow N$  et la condition de surjectivité assure donc que pour toute  $f : P \rightarrow N$ , on a l'existence de  $\tilde{f}$  telle que  $p \circ \tilde{f} = f$ .

Le résultat pour les modules injectifs est complètement dual et se démontre *mutatis mutandis*.  $\square$

*Exemple 1.5.5.* Un module libre est toujours projectif, car pour construire une application linéaire issue d'un module libre, il suffit de choisir les images de sa base librement. Plus généralement :

*Lemme 1.5.6.* Un  $R$ -module  $P$  est projectif si et seulement si il est facteur direct d'un module libre : il existe  $Q$  tel que  $P \oplus Q$  soit libre. par ailleurs, un module projectif est plat.

Il est malheureusement plus compliqué de caractériser les modules injectifs. mais on a le critère suivant

*Lemme 1.5.7.* Un  $R$ -module  $E$  est injectif si et seulement si il satisfait à la condition (1) :

(1) pour tout idéal  $I$  de  $R$ ,  $\text{Hom}_R(R, E) \longrightarrow \text{Hom}_R(I, E)$  est surjective.

*Exemple 1.5.8.* Si  $R$  est un corps, tous les modules sont projectifs et injectifs.

*Exercice 1.5.9.* Démontrer le résultat énoncé dans l'exemple précédent.

*Exercice 1.5.10.* Démontrer que  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  n'est pas projectif sur  $\mathbb{Z}$ . Puis que  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  est projectif dans  $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$  lorsque  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux.

*Exercice 1.5.11.* Soit  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow 0$  une suite exacte avec  $P$  projectif. Montrer que la suite est scindée. Si de plus  $B$  est aussi projectif, montrer que  $A$  est également projectif.

*Exemple 1.5.12* (Les cas de  $\mathbb{Q}$ ). *Les nombres rationnels  $\mathbb{Q}$  sont un  $\mathbb{Z}$ -module plat mais qui n'est pas projectif. C'est aussi un module injectif.*

En effet par le Lemme de Baer 1.5.7, il suffit de montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'application  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$  est surjective. Soit donc  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$  et posons  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  définie par  $g(k) = k \frac{f(n)}{n}$ . Clairement  $g|_{n\mathbb{Z}} = f$ . Notons que cette preuve s'applique à tout  $\mathbb{Z}$ -module  $M$  dans lequel on peut diviser par tout entier.

Que  $\mathbb{Q}$  n'est pas projectif découle du fait que l'application surjective  $g : \bigoplus_{\mathbb{N}^*} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^*)} \rightarrow \mathbb{Q}$  définie par  $g((n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{n_k}{k}$  n'admet pas de section.

Pour la platitude on renvoie à l'exercice 1.5.21

*Exemple 1.5.13.* Le quotient  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  est un  $\mathbb{Z}$ -module injectif mais n'est pas plat (ni projectif donc). En effet, la preuve de l'injectivité se fait comme dans l'exemple 1.5.12. Montrons que  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  n'est pas plat. Considérons l'application  $f : \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}$  qui est injective. L'application  $f \otimes \text{id} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$  n'est autre que l'application  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  qui n'est pas injective car  $f(1/n) = 1 = 0$  dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

Un des intérêts de ces notions est que tout module peut être approché par de tels modules, c'est à dire est quasi-isomorphe à un complexe formé de tels modules.

**Définition 1.5.14.** Soit  $M$  un  $R$ -module.

- (1) Une résolution *projective* la même chose qu'un quasi-isomorphisme de complexes de chaînes  $\eta : P_* \rightarrow M$  où chaque  $P_i$  est projectif. Autrement dit c'est la donnée d'un complexe de chaînes concentré en degré positif  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que chaque  $P_n$  est projectif et vérifiant  $H_{i>0}(P_*) = 0$ ,  $H_0(P_*) = M$ .
- (2) Une résolution *injective* de  $M$  est un quasi-isomorphisme de complexes de cochaînes concentré en degré positif  $\beta : M \rightarrow I^*$  où chaque  $I^j$  est injectif. Autrement dit c'est la donnée d'un complexe de cochaînes  $(I^n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que chaque  $I^n$  est injectif et vérifiant  $H^{i>0}(I^*) = 0$ ,  $H^0(I^*) = M$ .

**Proposition 1.5.15.** Tout module admet des résolutions projectives et injectives.

*Démonstration.* On commence par choisir une surjection  $f_0 : P_0 \rightarrow M$  où  $P_0$  est projectif (on peut même prendre  $P_0$  libre : il suffit de prendre  $P_0 = \bigoplus_S R$  où  $S$  est un système de générateurs de  $M$ ). Soit alors  $M_0 = \ker(P_0 \xrightarrow{f_0} M)$ . Soit alors  $P_1 \xrightarrow{f_1} M_0$  une surjection avec  $P_1$  projectif et on note  $d_0 : P_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \hookrightarrow P_0$ . On a par construction que  $P_0/\text{Im}(d_0) \cong M$ . On continue la construction comme suit. Supposons avoir construit inductivement une suite exacte  $P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} P_{n-2} \xrightarrow{d_{n-3}} \dots P_0$  tel que les  $P_i$  soient projectifs. On note  $M_{n-1} = \ker(d_{n-1})$  et on choisit  $P_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1}$  une surjection  $R$ -linéaire. On a alors que la composée  $d_n : P_n \rightarrow M_{n-1} \hookrightarrow P_{n-1}$  vérifie que  $\text{Im}(d_n) = \ker(d_{n-1})$  de telle sorte que l'on a étendu la suite exacte précédente. On obtient ainsi en itérant une résolution projective  $(P_*, d)$ .

Pour les résolutions injectives, on remarque tout d'abord que pour tout anneau  $R$ , on a que  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, I)$  est injectif pour tout  $\mathbb{Z}$ -module injectif (par exemple  $I = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ) ce qui découle du fait que le foncteur  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, I)$  est adjoint à droite du foncteur oubli  $R\text{-mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-mod}$  (tout comme un  $R$ -module libre est adjoint à gauche du foncteur oubli). On en déduit une inclusion canonique  $M \hookrightarrow \prod_{\phi: M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ .

De plus le membre de droite est injectif car produit d'injectif. On a construit  $\beta_0 : M \rightarrow I^0$  avec  $I^0$  injectif et le reste de la preuve est dual du cas projectif.  $\square$

*Exemple 1.5.16.* Le complexe  $\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{*m} \mathbb{Z}$  est une résolution projective (car libre) de  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .

**Lemme 1.5.17** (Relèvement des morphismes à une résolution projective). Soient  $M, N$  des  $R$ -modules,  $\eta : P_* \rightarrow M$  une résolution projective de  $M$  et  $\alpha : Q_* \rightarrow N$  un quasi-isomorphisme quelconque. Pour tout morphisme de  $R$ -modules  $f : M \rightarrow N$ , il existe un morphisme de complexes de chaînes de  $R$ -modules  $\tilde{f} : P_* \rightarrow Q_*$  rendant le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P_* & \xrightarrow{\tilde{f}} & Q_* \\ \simeq \downarrow \eta & & \simeq \downarrow \alpha \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

commutatif. De plus le morphisme  $\tilde{f}$  est unique à homotopie de chaînes près.

*Démonstration.* On construit  $\tilde{f}_n : P_n \rightarrow Q_n$  par récurrence sur  $n$ . On pose par convention  $\tilde{f}_{-1} = f : M \rightarrow N$ . On suppose que l'on a construit, pour tout  $i$  tel que  $-1 \leq i \leq n-1$  un morphisme  $\tilde{f}_i : P_i \rightarrow Q_i$  tel que  $d\tilde{f}_i = \tilde{f}_{i-1}d$ .

Par définition, le module  $P$  est projectif si et seulement si, pour tout morphisme  $f : P \rightarrow B$  et tout épimorphisme  $p : A \rightarrow B$ , il existe un morphisme  $\tilde{f}$  tel que  $f = p \circ \tilde{f}$

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \tilde{f} \swarrow & \downarrow f & \\ A & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

Or, par hypothèse,  $d\tilde{f}_{n-1} = \tilde{f}_{n-2}$ , ce qui implique que  $\tilde{f}_{n-1}(Z_{n-1}(P)) \subseteq Z_{n-1}(Q) := \text{Ker}(d : Q_{n-1} \rightarrow Q_{n-2})$ . On a donc un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} P_n & \longrightarrow & Z_{n-1}(P) & \hookrightarrow & P_{n-1} \\ & & \downarrow \tilde{f}_{n-1}|_{Z_{n-1}(P)} & & \downarrow \tilde{f}_{n-1} \\ Q_n & \longrightarrow & Z_{n-1}(Q) & \hookrightarrow & Q_{n-1} \end{array}$$

De plus,  $d : Q_n \rightarrow Z_{n-1}(Q)$  est surjective, car  $\psi : Q_* \rightarrow N$  est une résolution. Donc, puisque  $P_n$  est projectif, il existe une application  $\tilde{f}_n : P_n \rightarrow Q_n$  qui fait commuter le diagramme précédent.

Étant donné deux relèvements, on construit une homotopie entre eux par récurrence de la même manière.  $\square$

*Exercice 1.5.18.* On peut en réalité reformuler le lemme précédent de la façon suivante : Soient  $P_*$  un complexe dont les modules sont tous projectifs, et  $f : Q_* \rightarrow N_*$  un quasi-isomorphisme surjectif en tout degré. Alors on a la propriété de relèvement :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Q_* \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ P_* & \longrightarrow & N_* \end{array}$$

On a aussi un résultat dual avec les complexes de modules injectifs et les quasi-isomorphismes injectifs en tout degré.

En appliquant la proposition à  $f = \text{id} : M \rightarrow M$  et à deux résolutions projectives on obtient

**Corollaire 1.5.19.** Deux résolutions projectives  $P_*$ ,  $Q_*$  d'un même module  $M$  sont homotopes et deux résolutions injectives sont également homotopes.

*Exercice 1.5.20.* Montrer que si  $M$  est projectif alors son dual  $\text{Hom}_A(M, A)$  est injectif.

*Exercice 1.5.21.* Si  $M$  est un  $\mathbb{Z}$ -module, on note  $S^{-1}M$  le  $\mathbb{Z}$ -module formé des éléments  $\frac{x}{n}$  avec  $x \in M$  et  $n \in S$  et dans lequel  $\frac{x}{n} = \frac{y}{m}$  si et seulement si  $\exists k \in S : k(mx - ny) = 0$  (c'est à dire si et seulement si  $mx - ny$  est un élément de torsion de  $M$ ). En particulier  $\frac{x}{n} = 0 (= \frac{0}{1})$  si et seulement si  $x$  est un élément de torsion.

(1) Vérifier que  $\mathbb{Q} = S^{-1}\mathbb{Z}$ .

- (2) Démontrer que tout élément de  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$  s'écrit sous la forme  $\frac{1}{n} \otimes x$  avec  $x \in M$ , et en déduire un isomorphisme  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$ .
- (3) Démontrer que si  $M' \xrightarrow{f} M$  une application injective alors  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M' \xrightarrow{\text{id} \otimes f} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$  est également injective et en déduire que  $\mathbb{Q}$  est plat.

Le lemme de comparaison 1.5.17 permet d'associer des complexes de (co)chaînes canoniques à au produit tensoriel ou aux foncteurs de morphismes. Et plus généralement à tout foncteur exact à droite ou gauche.

Notons que si  $F$  est un foncteur additif,  $F$  envoie un complexe de (co)chaînes  $(C, d)$  sur le complexe de (co)chaînes  $(F(C), F(d))$ .

Pour simplifier, dans le théorème qui suit on suppose que  $\mathbf{C} = R\text{-}\mathbf{Mod}$  ou  $R\text{-}\mathbf{Mod}^{op}$ , mais le résultat se généralise sans difficulté à toute catégorie abélienne qui admet des résolutions projectives et injectives pour tout objet.

**Théorème 1.5.22.** Soit  $F : \mathbf{C} \rightarrow S\text{-}\mathbf{Mod}$  un foncteur exact à droite (resp. à gauche).

- (1) Si  $P_*$ ,  $Q_*$  sont deux résolutions projectives (resp. injectives) de  $M$ , alors il existe un quasi-isomorphisme canonique (à homotopie de chaînes près)  $F(P_*) \rightarrow F(Q_*)$ .
- (2) La construction  $M \mapsto F(P_*(M))$  où  $P_*(m)$  est une résolution projective (resp. injective) de  $M$  induit un foncteur  $\mathcal{D}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{D}(S)$  et en particulier les  $i$ -ièmes groupes de (co)homologie  $M \mapsto H_i(F_*(P_*(M)))$ , s'étendent en un foncteur  $\mathbf{C} \rightarrow S\text{-}\mathbf{Mod}$ .

Par  $\mathcal{D}(\mathbf{C})$  on entend la catégorie dérivée de  $\mathbf{C}$ , c'est à dire  $Ch(\mathbf{C})[\text{q-iso}^{-1}]$ .

*Démonstration.* Nous faisons le cas des foncteurs exacts à droite.

- (1) D'après le lemme de relèvement 1.5.17, il existe un morphisme  $P_* \xrightarrow{f} Q_*$  tel

$$\begin{array}{ccc} P_* & \xrightarrow{f} & Q_* \\ \simeq \downarrow \eta & & \simeq \downarrow \alpha \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array}$$

$Q_*$  est un autre tel morphisme, alors il existe une homotopie de chaînes (définition ??) entre  $f$  et  $f'$ . En inversant les rôles de  $P_*$  et  $Q_*$ , on obtient  $g : Q_* \rightarrow P_*$  un morphisme de complexes relevant  $\text{id}_M$  (également unique à homotopie de chaînes près). Il suit que les composées  $f \circ g : Q_* \rightarrow Q_*$  et  $g \circ f : P_* \rightarrow P_*$  sont des morphismes de complexes relevant  $\text{id}_M$  :

$$\begin{array}{ccc} P_* & \xrightarrow{g \circ f} & P_* \\ \simeq \downarrow \eta & & \simeq \downarrow \eta \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array}$$

l'identité  $\text{id}_{P_*}$  en est un autre relèvement. Il suit encore et toujours de l'unicité à homotopie de chaînes près dans le théorème 1.5.17 que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont homotopes à l'identité :  $f \circ g = \text{id}_{Q_*} + dh + hd$ ,  $g \circ f = \text{id}_{P_*} + ds + sd$ . Il suit de l'additivité ?? et de la fonctorialité de  $F$  que  $F(f) \circ F(g) = F(\text{id}_{Q_*}) + F(d)F(h) + F(h)F(d)$  et  $F(g) \circ F(f) = F(\text{id}_{P_*}) + F(d)F(s) + F(s)F(d)$  sont homotopes à  $F(\text{id}) = \text{id}$  et donc induisent des isomorphismes en homologie. Autrement dit ce sont des quasi-isomorphismes.

Ceci nous donne l'existence d'un quasi-isomorphisme  $F(f) := F(P_*) \rightarrow F(Q_*)$  et par ailleurs, ce dernier est indépendant du choix de  $f$  à homotopie près par le même argument.

- (2) Soit  $M \xrightarrow{f} N$  et  $N \xrightarrow{g} P$  deux morphismes dans  $\mathbf{C}$ . Soient  $P_*(M)$ ,  $P_*(N)$  et  $P_*(P)$  des résolutions projectives respectives de  $M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $\tilde{f} : P_*(M) \rightarrow P_*(N)$  et  $\tilde{g} : P_*(N) \rightarrow P_*(P)$  données par le théorème 1.5.17 tout comme  $g \circ f : P_*(M) \rightarrow P_*(P)$ . On note comme dans le point (1)  $\mathbb{L}F(f) := F(\tilde{f})$  et  $\mathbb{L}F(g) := F(\tilde{g})$ . Comme les composées  $\tilde{g} \circ \tilde{f}$  et  $g \circ f$  sont deux relèvements de  $g \circ f$  entre les mêmes résolutions, ils sont reliés par une homotopie de chaînes et donc leur image par  $F$  également. L'argument s'applique à l'identité de même.

Puisque des morphismes homotopes induisent exactement le même morphisme sur les groupes d'homologie, il suit que si  $f : P_* \rightarrow Q_*$  est homotope à  $f'$  on a que  $H_i(F(f)) = H_i(F(f')) : H_i(\mathbb{L}(F(P_*))) \rightarrow H_i(\mathbb{L}(F(Q_*)))$ . Ainsi  $H_i(\mathbb{L}F(f))$  est indépendant du choix du relevé  $f$  (dans le point (2)) et il découle des points (1) et (2) que  $H_i(\mathbb{L}F(-))$  est bien un foncteur.

□

Ces constructions s'appellent les foncteurs dérivés de  $F$  et seront étudiés dans un cadre général plus loin 2.6. On note donc dans la suite  $\mathbb{L}F(M) \sim F(P_*(M))$  et  $\mathbb{R}F(N) = F(I^*(N))$  les foncteurs donnés par le point (2) du théorème 1.5.22 dans les cas où  $F$  est exact à droite ou à gauche respectivement.

Le “foncteur dérivé” d'un foncteur exact à droite devient exact

**Proposition 1.5.23.** Soit  $F$  un foncteur exact à droite. Si  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  est une suite exacte, alors on peut choisir une résolution projective de  $B$  telle que  $0 \rightarrow \mathbb{L}F_*(A) \xrightarrow{\mathbb{L}F(f)} \mathbb{L}F_*(B) \xrightarrow{\mathbb{L}F(g)} \mathbb{L}F_*(C) \rightarrow 0$  est une suite exacte de complexes de chaînes. En particulier on a une suite exacte longue *naturelle* en (co)homologie :

$$(2) \quad \cdots \rightarrow H_i(\mathbb{L}F(A)) \xrightarrow{\mathbb{L}F(f)} H_i(\mathbb{L}F(B)) \xrightarrow{\mathbb{L}F(g)} H_i(\mathbb{L}F(C)) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(\mathbb{L}F(A)) \\ \xrightarrow{\mathbb{L}F(f)} H_{i-1}(\mathbb{L}F(B)) \rightarrow \cdots \rightarrow H_1(\mathbb{L}F(B)) \xrightarrow{\mathbb{L}F(g)} H_1(\mathbb{L}F(C)) \xrightarrow{\delta} F(A) \xrightarrow{F(f)} B \xrightarrow{F(g)} C \rightarrow 0$$

Ce résultat est encore vrai pour les foncteurs dérivés  $\mathbb{R}F$  d'un foncteur exact à gauche.

*Exercice 1.5.24.* Démontrer la proposition 1.5.23 et sa version duale.

Si on spécialise le théorème 1.5.22 à nos deux exemples fondamentaux : le produit tensoriel et les homomorphismes, on retrouve les foncteurs  $Tor_i$  et  $Ext^j$  classiques qui apparaissent dans le théorème des coefficients universels.

**Définition 1.5.25.** Soit  $M$  un  $R$ -module.

- (1) On note  $M \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_R -$  le foncteur dérivé à gauche de  $M \otimes_R -$  et  $Tor_i^R(M, -) = H_i(P_*(M) \otimes_R -)$  ses  $i$ -ièmes groupes d'homologie.
- (2) On note  $\mathbb{R}Hom_R(-, M)$  le foncteur dérivé à gauche de  $Hom_R(-, M)$  et  $Ext_R^i(N, M) = H^i(Hom_R(N, I^*(M))) \cong H^i(Hom_R(P_*(N), M))$  ses  $i$ -ièmes groupes de cohomologie.

Les foncteurs  $\text{Tor}_*$  sont des foncteurs d'homologie alors que les  $\text{Ext}^i$  sont des foncteurs de cohomologie.

Le mot  $\text{Tor}$  vient de l'expression “produit de torsion” (car ces groupes n'apparaissent et ne mesurent que la torsion) alors que  $\text{Ext}$  vient de extension car ces groupes encodent le nombre d'extensions de  $M$  par  $N$ .

*Exemple 1.5.26* ( $\text{Ext}$  et  $\text{Tor}$  de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ). La résolution projective de l'exemple 1.5.16 permet de calculer facilement  $\text{Tor}_i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, M)$  et  $\text{Ext}^i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, M)$ . En effet, par définition nous obtenons que

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} M = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow M \xrightarrow{*n} M$$

puisque  $\mathbb{Z} \otimes M \cong M$  et que  $n \otimes m = 1 \otimes nm$ . De même

$$\mathbb{R}\text{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, M) = M \xrightarrow{*n} M \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

car  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, M) \cong M$  où l'isomorphisme est donné par  $f \mapsto f(1)$ .

Ainsi, ces groupes de (co)homologie sont nuls en degré  $\geq 2$ .

Regardons maintenant le cas de  $M = \mathbb{Z}$ , puis de  $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Pour  $M = \mathbb{Z}$ , comme celui-ci est projectif, on a immédiatement que

$$\text{Tor}_{i \geq 1}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \text{ et } \text{Tor}_0(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

En revanche on a que

$$\text{Ext}^0(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \text{ mais } \text{Ext}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \text{ est non-nul.}$$

Regardons maintenant  $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Alors toutes mes flèches dans les complexes dérivées deviennent nulles et il suit

$$\text{Tor}_{i \geq 2}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong 0, \text{ et } \text{Tor}_{i \leq 1}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z};$$

$$\text{Ext}^{i \geq 2}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong 0, \text{ et } \text{Ext}^{i \leq 1}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z};$$

*Remarque 1.5.27.* De manière plus générale, les arguments donnés au-dessus donnent directement que si  $P_*$  est un complexe gradué positivement de modules  $R$ -projectifs, alors le foncteur  $P_* \otimes_R -$  est exact.

En particulier, une suite exacte courte  $L \hookrightarrow M \twoheadrightarrow N$  de  $R$ -modules induit une suite exacte courte de complexes  $P_* \otimes_R L \hookrightarrow P_* \otimes_R M \twoheadrightarrow P_* \otimes_R N$  et, si  $P_*$  est une résolution projective de  $Q$ , par le lemme 1.4.11 une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \text{Tor}_2^R(Q, M) \longrightarrow \text{Tor}_2^R(Q, N) \longrightarrow \text{Tor}_1^R(Q, L) \\ \longrightarrow \text{Tor}_1^R(Q, M) \longrightarrow \text{Tor}_1^R(Q, N) \longrightarrow Q \otimes_R L \longrightarrow Q \otimes_R M \longrightarrow Q \otimes_R N \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Les constructions précédentes suggèrent qu'on a envie d'identifier des résolutions d'un même objet, et, plus généralement, des complexes quasi-isomorphes.

*Remarque 1.5.28.* On a donc défini des “objets globaux” :

$$M \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_R N \text{ et } \mathbb{R}\text{Hom}_R(M, N),$$

qui sont des foncteurs définis sur les catégories dérivées ci-dessus, dont les groupes de (co)-homologie sont les  $\text{Tor}_i^R(M, N)$  et  $\text{Ext}_R^i(M, N)$ . Pour se faire on définit les deux foncteurs dérivés :

$$\cdot \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_R \cdot, \mathbb{R}\text{Hom}_R(\cdot, \cdot) : \mathcal{D}(R) \otimes \mathcal{D}(R) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{Z}).$$

Nous verrons que ces constructions classiques de l'algèbre homologique sont des cas particuliers des foncteurs dérivés des catégories de modèles.

La propriété suivante est souvent utile.

**Proposition 1.5.29.**

$$\operatorname{Ext}_R^n(M, N) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(R)}(M, N[n])$$

où  $N[n]$  est le complexe concentré en degré  $-n$

On pourra consulter [20, 17] pour des rappels/preuves plus détaillés d'algèbre homologique.

## 1.6. LES NOTIONS CLASSIQUES DE FIBRATIONS POUR LES ESPACES TOPOLOGIQUES

A-t-on des notions analogues de “suite exacte longue associée à une suite exacte courte en homotopie” et de “résolution projective” pour les espaces topologiques ? La réponse est oui, et nous allons présenter ces objets, fondamentaux dans l'étude des espaces topologiques à homotopie près, notions qui sont cependant un petit peu plus compliqué que pour les complexes de chaînes, notamment car ces objets en sont plus linéaires<sup>9</sup>.

**Définition 1.6.1.** Une fibration de Hurewicz<sup>10</sup> est une application continue  $p : E \rightarrow B$  vérifiant la propriété de relèvement :

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \longrightarrow & E \\ \downarrow \simeq & \nearrow & \downarrow p \\ X \times I & \longrightarrow & B \end{array}$$

Cela signifie que, pour tout espace topologique  $X$ , pour tous morphismes,  $X \times \{0\} \rightarrow X \times I$  et  $X \times I \rightarrow B$  faisant commuter le cadre du diagramme précédent, (où  $X \times \{0\} \rightarrow X \times I$  est l'inclusion,) il existe un morphisme  $X \times I \rightarrow E$  faisant commuter le diagramme précédent.

**Définition 1.6.2.** Une fibration de Serre est une application continue  $p : E \rightarrow B$  vérifiant la condition de relèvement précédente pour  $X = I^n$ ,  $n \geq 0$ .

*Remarque 1.6.3.* Une fibration de Hurewicz est une fibration de Serre, mais la réciproque est fausse.

*Exemple 1.6.4.*

- a) Un revêtement est évidemment une fibration de Serre. L'unicité des relèvements des homotopies permet même de montrer que c'est en fait une fibration de Hurewicz(cf. [18]).
- b) Une projection  $F \times B \rightarrow B$ ,  $(f, b) \mapsto b$ , est une fibration de Hurewicz (et donc de Serre).

9. par exemple une application linéaire surjective  $X \rightarrow Y$  vérifie que  $f^{-1}(y) \cong f^{-1}(y')$  pour tout couple de points  $y, y'$ , mais ce n'est évidemment pas le cas, pas même à homotopie faible près, pour une application continue

10. on dira souvent fibration sans autre adjectif

- c) Soit  $p : E \rightarrow B$  une fibration (de Hurewicz ou de Serre), et  $g : X \rightarrow B$ . L'application  $g^*(p) : X \times_B E \rightarrow X$  du pullback de  $p$  et  $g$  vers  $X$  est une fibration.

Pour rappel, le pullback de deux applications continues  $f : B \rightarrow A$  et  $g : C \rightarrow A$  est l'ensemble  $\{(b, c) \in B \times C : f(b) = g(c)\}$ . Il est souvent noté  $B \times_A C$  et est muni de deux applications de projection :  $f^* : B \times_A C \rightarrow B$  et  $g^* : B \times_A C \rightarrow C$ . Il vérifie la propriété universelle que toute paire d'applications  $i : Z \rightarrow B$ ,  $j : Z \rightarrow C$  telle que  $f \circ i = g \circ j$  il existe une unique application  $Z \rightarrow B \times_A C$  rendant commutatifs les diagrammes évidents.

**Proposition 1.6.5.**

- a) “Être une fibration de Serre” est une propriété locale, c'est-à-dire :  
 $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Serre si et seulement si il existe un recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  de  $B$  par des ouverts tels que  $p|_{p^{-1}(U_i)}$  est une fibration de Serre pour tout  $i \in I$ .
- b)  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Hurewicz si et seulement si il existe un recouvrement *dénombrable*  $(U_i)_{i \in I}$  de  $B$  par des ouverts tels que  $p|_{p^{-1}(U_i)}$  est une fibration de Hurewicz pour tout  $i \in I$ .

*Démonstration.* Pour la première propriété, voir la feuille de TD 1. Pour la deuxième, voir [18, Chapitre II, Section 7].  $\square$

*Exemple 1.6.6* (Espaces fibrés). La proposition précédente permet d'obtenir les exemples importants suivants.

- d) Un espace fibré<sup>11</sup> (appelé aussi fibré localement trivial), est une fibration de Serre.
- e) Un espace fibré  $p : E \rightarrow B$  au dessus d'une base  $B$  paracompacte et Hausdorff (=séparé) est une fibration de Hurewicz.

La dernière propriété provient du fait qu'un espace paracompact séparé vérifie précisément l'hypothèse que de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement dénombrable. On rappelle qu'elle est évidemment satisfaite si  $B$  est une variété topologique.

*Exemple 1.6.7* (Espace des chemins). L'exemple suivant est *fondamental* et en un sens universel.

- f) Soit  $f : X \rightarrow Y$ . On définit  $\mathcal{P}_f = Y^{[0,1]} \times_Y X = \{(\gamma, x) \in Y^{[0,1]} \times X : \gamma(0) = f(x)\}$ . On appelle  $\mathcal{P}_f$  l'espace des chemins au dessus de  $f$ . L'application :

$$\begin{aligned} ev_1 : \mathcal{P}_f &\rightarrow Y \\ (\gamma, x) &\mapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

11. c'est à dire une application continue  $p : E \rightarrow B$  telle qu'il existe un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $B$  tel que la restriction de  $p|_{p^{-1}(U_i)}$  à  $U_i$  est homéomorphe à la projection canonique, c'est à dire qu'il existe un diagramme commutatif :  $p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times F_i$ .

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\cong} & U_i \times F_i \\ p \downarrow & \swarrow \text{proj}_0 & \\ U_i & & \end{array}$$



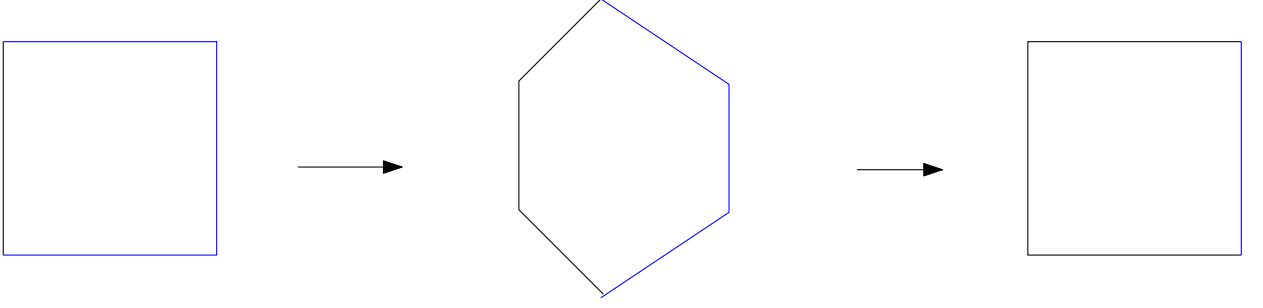


FIGURE 4. Un homéomorphisme entre paires (quitte à composer par la symétrie évidente à droite)

est une fibration de Hurewicz. En effet, supposons que l'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{z \mapsto (\gamma_z, x_z)} & \mathcal{P}_f \\ \downarrow & & \downarrow ev_1 \\ Z \times I & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Alors, pour tout  $z \in Z$ ,  $\gamma_z(1) = \varphi(z, 0)$ . On pose alors  $\tilde{\varphi}(z, t) = (\gamma_z * \varphi|_{\{z\} \times [0, t]}, x_z)$ , où  $*$  désigne la concaténation des chemins.

*Remarque 1.6.8.* On a factorisé  $f : X \rightarrow Y$  :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{P}_f & \xrightarrow{ev_1} & Y \\ x & \mapsto & (c_{f(x)}, x) & \mapsto & f(x) \end{array}$$
 en une équivalence d'homotopie et une fibration (de Hurewicz). La première flèche est bien une homotopie car on peut contracter tout chemin sur son point base par l'homotopie évidente  $H(f, t)(u) = f((1-t)u)$ .

**Lemme 1.6.9** (Propriété de relèvement des fibrations par rapport aux rétracts forts de paires cellulaires). Si  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Serre, alors pour tout rétract par déformation forte  $i : L \hookrightarrow K$  où  $L$  est un sous-CW-complexe de  $K$  il existe un relèvement du diagramme :

(3) 
$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow p \\ K & \xrightarrow{\quad} & B \end{array}$$

*Remarque 1.6.10.* On a un homéomorphisme de paires

$$(I^{n+1}, I^n \times \{0\}) \cong (I^{n+1}, \overline{\partial I^{n+1} \setminus I^n \times \{0\}})$$

Voir figure 4

*Preuve du Lemme.* Soit  $r : K \rightarrow L$  une rétraction de  $i$ , et  $H : K \times I \rightarrow K$  une homotopie relativement à  $L$  entre  $id_K$  et  $i \circ r$ . On a une factorisation du diagramme

3 :

$$\begin{array}{ccccccc}
L & \hookrightarrow & L \times [0, 1] \cup K \times \{1\} & \xrightarrow{\text{Proj} \cup r} & L & \longrightarrow & E \\
\downarrow i & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow f & \downarrow \\
K & \longrightarrow & K \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & K & \longrightarrow & B
\end{array}$$

Il suffit de montrer qu'il existe un  $f$  qui fasse commuter ce diagramme. L'existence de  $f$  vient du fait que  $L$  est un sous-complexe cellulaire de  $K$ . On peut construire  $f$  par récurrence sur la filtration du CW-complexe  $K \times [0, 1] \setminus (L \times [0, 1] \cup K \times \{1\})$ , c'est-à-dire qu'il suffit de construire un  $f$  faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
I^{n-1} \times [0, 1] \cup I^n \times \{1\} & \longrightarrow & E \\
\downarrow & \nearrow f & \downarrow p \\
I^{n+1} & \longrightarrow & B
\end{array}$$

Qui est homéomorphe à :

$$\begin{array}{ccc}
I^n \times \{0\} & \longrightarrow & E \\
\downarrow & \nearrow f & \downarrow p \\
I^{n+1} & \longrightarrow & B
\end{array}$$

Or,  $p$  étant une fibration de Serre, ce diagramme admet bien un relèvement.  $\square$

*Notation 1.6.11.* Si  $p : E \rightarrow B$  est une fibration (de Hurewicz), on notera souvent  $F$  ou  $E_b$  la fibre de  $b \in B$  le long de l'application  $p$ , c'est-à-dire le sous-ensemble  $p^{-1}(\{b\}) \subseteq E$ .

**Lemme 1.6.12.** Si  $p : E \rightarrow B$  est une fibration (de Hurewicz), et si  $B$  est connexe par arcs, alors pour tous  $b, b' \in B$ ,  $E_b \simeq E_{b'}$ .

Autrement dit, à homotopie près, les fibres d'une fibration de Hurewicz sont les mêmes partout.

*Démonstration.* Voir [18] chapitre 2 section 8 corollaire 13.

On peut relier  $b$  à  $b'$  par un chemin  $\gamma : I \rightarrow B$ . Puisque  $p$  est une fibration, on a un relèvement  $\tilde{\gamma}$  du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
E_b & \longrightarrow & E \\
\downarrow & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow p \\
E_b \times I & \xrightarrow{\gamma \circ \text{proj}_1} & B
\end{array}$$

où la flèche du haut est l'inclusion. Puisque  $p(\tilde{\gamma}(e, 1)) = \gamma(1) = b'$  pour tout  $e \in E_b$ , on en déduit que l'image de l'application  $\tilde{\gamma}(\cdot, 1)$  est contenue dans  $E_{b'}$ . On note  $\tilde{\gamma}_1 : E_b \rightarrow E_{b'}$  l'application continue ainsi obtenue.

Montrons, qu'à homotopie près, l'application  $\tilde{\gamma}_1$  ainsi obtenue ne dépend de la classe d'homotopie de  $\gamma$  (dans les chemins à extrémités fixées). Soit  $H : I \times I \rightarrow B$  une

homotopie entre  $\gamma$  et  $\beta$ , deux chemins entre  $b$  et  $b'$  (avec  $H(0, -) = b$  et  $H(1, -) = b'$ ). Puisque  $p$  est une fibration, on trouve un relèvement  $\tilde{H}$  du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E_b \times (I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ E_b \times I^2 & \xrightarrow{H \circ (proj_1 \times proj_3)} & B \end{array}$$

où la flèche du haut est donnée par  $\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}$  et la projection  $E_b \times I \rightarrow E_b$  suivie de l'inclusion. (qui a servi pour construire  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{\beta}$ . Pour tout  $t$ , on a donc que  $\tilde{H}(1, t) \in E_{b'}$  et  $\tilde{H}(1, -)$  est une homotopie entre  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\beta}_1$ .

Soit alors maintenant une application  $E_{b'} \rightarrow E_b$  obtenue en partant de  $\gamma^{-1}$ . Puisque  $\gamma * \gamma^{-1} \simeq c_b$  (où  $c_b$  est le chemin constant en  $b$ ), le résultat précédent implique qu'il existe une homotopie entre  $\gamma * \tilde{\gamma}^{-1}_1$  et n'importe quel relevé de  $c_b$ . On peut évidemment choisir un tel relevé constant égal à l'identité de  $E_b$ . Il suit que  $(\gamma * \tilde{\gamma}^{-1}_1)_1$  est homotope à l'identité. Par ailleurs, par construction,  $(\gamma * \tilde{\gamma}^{-1}_1)_1$  est homotope à la composition  $\tilde{\gamma}_1 \circ \gamma^{-1}_1$ . On démontre de même l'équivalence d'homotopie dans l'autre sens.

□

**Exemple 1.6.13.** Soit  $X$  connexe par arcs,  $x_0 \in X$  et  $P_*X := \mathcal{P}_{\{x_0\} \hookrightarrow X} = \{x_0\} \times_X X^{[0,1]}$  l'espace des chemins de  $X$  qui partent de  $x_0$ . Pour tout  $x \in X$ , et tout choix de chemin  $\gamma_{x_0, x}$  reliant  $x_0$  à  $x$ , la fibre  $P_*X_x = ev_1^{-1}(\{x\})$  de la fibration standard  $ev_1 : P_*X \rightarrow X$  est homéomorphe à l'espace  $\Omega_x(X) := \{f : S^1 \xrightarrow{C^0} X, /f(1) = x\}$  des lacets en  $x$ . L'homéomorphisme est obtenu en recollant le chemin ainsi obtenu, parcouru dans le sens contraire avec  $\gamma_{x, x_0}$ . Le lemme 1.6.12 nous donne alors que les espaces de chemins  $\Omega_x$  sont tous homotopes entre eux. Ceci entraîne (et même renforce) le fait que les groupes d'homotopie de  $X$  ne dépendent, à isomorphisme près, pas du choix du point base.

Le résultat suivant est fondamental et en un sens énonce qu'une fibration est un analogue pour les espaces topologiques d'une suite exacte courte de complexes de chaînes.

**Théorème 1.6.14.** Soit  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Serre, avec  $B$  connexe par arcs,  $b_0$  un point de  $B$ ,  $F := p^{-1}(b_0)$  la fibre de  $b_0$ , et  $f_0 \in F$ . On a alors une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \cdots$$

*Remarque 1.6.15.* Les  $\pi_0$  ne sont pas des groupes. On peut néanmoins définir les noyaux de  $\pi_0(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, f_0)$  et de  $\pi_0(E, f_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0)$  comme étant les égalisateurs de  $i_*$  et  $p_*$  avec les applications constantes.

**Lemme 1.6.16.** Si  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Serre avec  $B$  connexe par arcs, alors les fibres de  $p$  sont faiblement homotopiquement équivalentes.

*Démonstration.* Rappelons que  $\mathcal{P}_p$  dénote l'espace des chemins de  $p$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}_p = E \times B^I = \{(e, \gamma : I \rightarrow B) : \gamma(0) = p(e)\}$$

On factorise l'application  $p$  comme dans l'exemple 1.6.7 :

$$f : E \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_p \xrightarrow{\text{fibration}} B$$

Pour tout  $b \in B$ , on obtient donc un morphisme :

$$E_b \rightarrow (\mathcal{P}_p)_b$$

Puisque  $\mathcal{P}_p \rightarrow B$  est une fibration, on en déduit, d'après le lemme précédent, que, si  $b' \in B$ ,  $(\mathcal{P}_p)_b \simeq (\mathcal{P}_p)_{b'}$ . Il ne reste alors plus qu'à prouver que  $f$  est une équivalence faible d'homotopie. En effet, on aura alors le zigzag :

$$E_b \xrightarrow{\sim} (\mathcal{P}_p)_b \simeq (\mathcal{P}_p)_{b'} \xleftarrow{\sim} E_{b'}$$

On dispose du diagramme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_n(B, b) & \longrightarrow & \pi_n(E_b, *) & \longrightarrow & \pi_n(E, *) \longrightarrow \dots \\ & & \simeq \downarrow & & \downarrow & & \simeq \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & \pi_n(B, b) & \longrightarrow & \pi_n((\mathcal{P}_p)_b, *) & \longrightarrow & \pi_n(\mathcal{P}_p, *) \longrightarrow \dots \end{array}$$

On déduit du Lemme des cinq (1.4.11.b) que le morphisme  $\pi_n(E_b, *) \rightarrow \pi_n((\mathcal{P}_p)_b, *)$  est un isomorphisme.  $\square$

*Exemple 1.6.17.* On prendra garde, qu'une submersion surjective entre variétés n'est pas forcément une fibration de Serre (ni donc d'Hurewicz). Par exemple, considérons l'application  $p : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par la projection  $(x, y) \mapsto x$ . Les fibres en tout point  $x \neq 0$  sont données par une droite alors que la fibre en 0 n'est pas connexe par arcs. Par conséquent, les fibres n'ont pas les mêmes groupes d'homotopie et donc  $p$  n'est pas une fibration de Serre en vertu du lemme 1.6.16.

## 1.7. GROUPES D'HOMOTOPIE RELATIFS ET SUITES EXACTES LONGUES EN HOMOTOPIE

**Définition 1.7.1** (groupes d'homotopie relatifs). Soit  $(X, A)$  une paire d'espaces topologiques, et  $a_0 \in A$  un point base. Pour  $n \geq 1$ , on définit  $\pi_n(X, A, a_0)$ , l'ensemble des classes d'homotopie d'applications  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, A)$  qui envoient  $I^{n-1} \times \{0, 1\} \cup I^{n-2} \times \{1\} \times [0, 1] = \overline{\partial I^n \setminus (\{0\} \times I^{n-1})}$  (le “ $n$ -cornet”), sur le singleton  $\{a_0\}$ . Les homotopies doivent également respecter les conditions précédentes sur le bord (autrement dit leur restriction au bord  $\partial I^n$  doit rester à image dans  $A$  et celle à l'adhérence de  $\partial I^n \setminus (\{0\} \times I^{n-1})$  doit être constante, égale à  $a_0$ ).

*Remarque 1.7.2.*  $\pi_0(X, A, a_0)$  n'a pas, en général, de structure de monoïde.

Pour  $n = 0$ , on peut définir<sup>12</sup>  $\pi_0(X, A)$  comme l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $X$  qui ne rencontrent pas  $A$ .

**Proposition 1.7.3.** Pour  $n \geq 2$ , on munit  $\pi_n(X, A, a_0)$  d'une structure de groupe, qui est abélienne si  $n \geq 3$ .

<sup>12</sup>. on prendra garde qu'il n'y a pas de définition universellement acceptée et que certains préfèrent ne pas considérer le cas  $n = 0$  tout simplement.

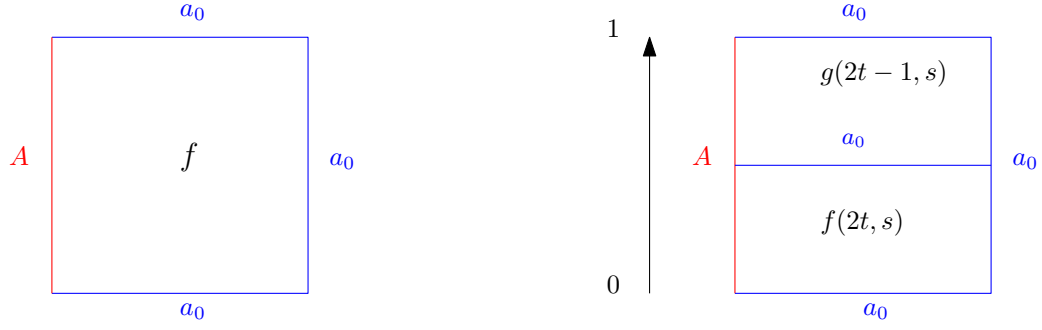


FIGURE 5. La représentation graphique d'une application dans  $\pi_1(X, A, a_0)$  à gauche, et la représentation graphique du produit  $f * g$  à droite.

On va définir le produit (cf. figure 5). Posons :

$$\begin{aligned} \alpha : I^{n-1} \times \{1\} &\rightarrow I^{n-1} \times \{0\} \\ (t_1, \dots, t_n, 1) &\mapsto (t_1, \dots, t_n, 0) \end{aligned}$$

remarquons que  $I^n \cong I^n \coprod_{\alpha} I^n$ , que cet homéomorphisme envoie  $\partial I^n$  sur  $[(\partial I^n \coprod \partial I^n) \setminus (I^{n-1} \times \{1\} \coprod I^{n-1} \times \{0\})]$ , et qu'on peut le choisir de manière à ce que  $\{0\} \times I^{n-1}$  soit envoyé sur  $\{0\} \times I^{n-1} \coprod \{0\} \times I^{n-1}$ .

Si  $[f], [g] \in \pi_n(X, A, a_0)$ , alors pour tout  $t \in I^{n-1}$ ,  $f(t, 1) = a_0 = g(t, 0)$ . On peut donc définir une application continue  $f \coprod_{\alpha} g : I^n \rightarrow X$  par recollement. Elle vérifie :

$$f \coprod_{\alpha} g(\partial I^n) = f(\partial I^n \coprod \partial I^n \setminus I^{n-1} \times \{1\}) \cup g(I^{n-1} \times \{0\}) \subseteq A$$

et :

$$\begin{aligned} f \coprod_{\alpha} g(\partial I^n \setminus (\{0\} \times I^{n-1})) &= f(\partial I^n \setminus (I^{n-1} \times \{1\} \cup \{0\} \times I^{n-1})) \cup g(\partial I^n \setminus (I^{n-1} \times \{0\} \cup \{0\} \times I^{n-1})) \\ &\subseteq f(\partial I^n \setminus \cup \{0\} \times I^{n-1}) \cup g(\partial I^n \setminus \{0\} \times I^{n-1}) \subseteq \{a_0\} \end{aligned}$$

On vérifie que l'application :

$$\begin{aligned} * : \pi_n(X, A, a_0) \times \pi_n(X, A, a_0) &\rightarrow \pi_n(X, A, a_0) \\ ([f], [g]) &\mapsto [f \coprod_{\alpha} g] \end{aligned}$$

est bien un produit associatif muni d'un élément neutre (l'application constante au point base), commutatif si  $n \geq 3$ , de la même manière que pour les groupes d'homotopie absolus.

Le lemme suivant est fort utile pour comprendre les applications dont la classe est nulle dans  $\pi_n(X, A, a_0)$ .

**Lemme 1.7.4.** Soit  $[f] \in \pi_n(X, A, a_0)$ . Alors :

$$[f] = 0 \iff f \text{ est homotope relativement à } \partial I^n \text{ à une application à valeur dans } A$$

*Démonstration.* Montrons le sens  $\Leftarrow$  de l'équivalence. Supposons qu'il existe  $g : I^n \rightarrow A$  telle que  $f \simeq_A g$ . Alors la classe de  $f$  dans  $\pi_n(X, A, a_0)$  est la même que celle de  $g$ , qui est à valeur dans  $A$ , et on a que nécessairement  $g\partial I^n \setminus \{0\} \times I^{n-1}$  est

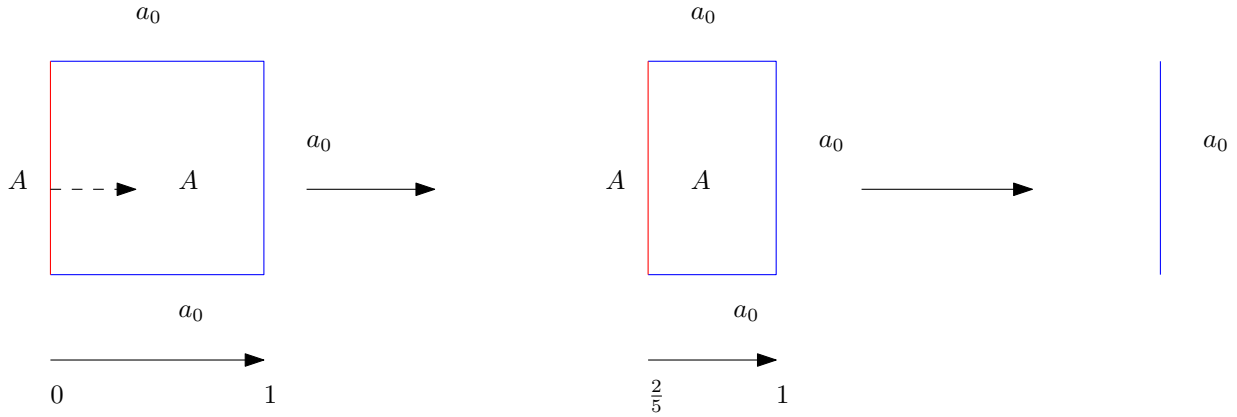


FIGURE 6. L'homotopie dans  $\pi_n(X, A, a_0)$  déformant une application à valeur dans  $A$  sur l'application constante.

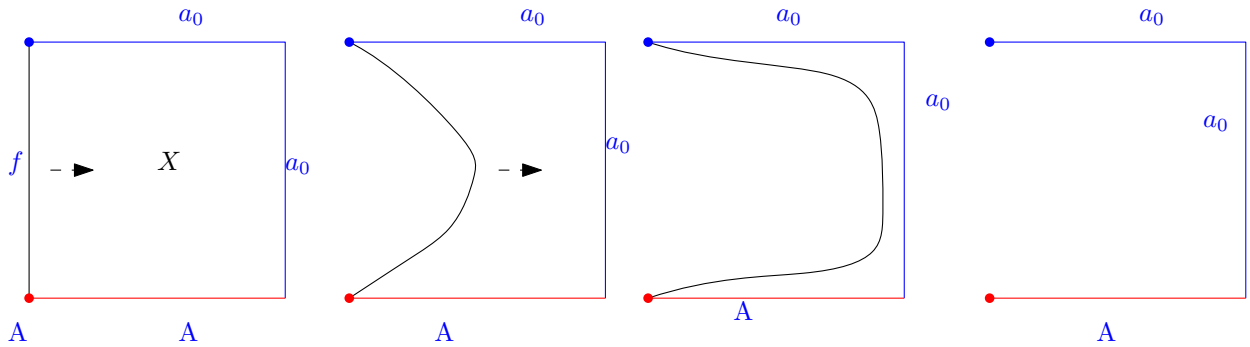


FIGURE 7. La représentation graphique (à gauche) d'une homotopie entre  $f$  représentant la classe nulle dans  $\pi_0(X, A, a_0)$  et le chemin constant  $a_0$ , et, sa déformation, via une homotopie relativement au bord  $\partial I$  (les points bleus et rouges), vers une application à valeur dans  $A$ .

l'application constante  $a_0$ . Mais une telle application est homotope à l'application constante qui vaut  $a_0$  (c'est à dire l'élément neutre de  $\pi_n(X, A, a_0)$ ). En effet on peut la déformer simplement sur  $a_0$  en rétractant  $I^n$  sur  $\{1\} \times I^{n-1}$ , voir figure 5.

Montrons maintenant le sens  $\Rightarrow$  de l'équivalence. Soit  $H : I^{n+1} \rightarrow X$  une homotopie relative entre  $f$  et l'application constante en  $a_0$ . L'adhérence  $\overline{\partial I^{n+1} \setminus (\{0\} \times I^n)}$  est un rétract par déformation (forte) de  $I^{n+1}$ , il existe donc une homotopie  $R$  entre  $I^{n+1}$  et  $\overline{\partial I^{n+1} \setminus (\{0\} \times I^n)}$  relativement à ce dernier. Ainsi,  $H \circ R|_{\{0\} \times I^n}$  est une homotopie entre  $f$  et  $H|_{\overline{\partial I^{n+1} \setminus (\{0\} \times I^n)}}$  relativement à  $\partial I^n$ . Or  $H|_{\overline{\partial I^{n+1} \setminus (\{0\} \times I^n)}}$  est à valeur dans  $A$ .  $\square$

Les groupes d'homotopie relatives sont reliés entre eux par une longue suite exacte, analogue à celle de l'homologie d'une paire.

**Théorème 1.7.5.** Soit  $(X, A)$  une paire d'espace topologique,  $a_0 \in A$  un point base. On a une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, a_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, a_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(X, A).$$

En pratique, on sera intéressé par le cas où toutes les composantes connexes par arcs de  $X$  rencontrent  $A$ . Dans ce cas le dernier terme est nul.

*Démonstration.* La dernière flèche est simplement induit par la décomposition de  $\pi_0(X)$  entre les composantes connexes qui rencontrent  $A$  (et la flèche  $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(X)$  est une surjection sur ce sous-ensemble) et les autres (qui sont en bijection avec  $\pi_0(X, A)$  par définition). On regarde maintenant le reste de la suite. Le morphisme  $\partial : \pi_n(X, A, a_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, a_0)$  est défini par :

$$\partial([f]) = [f|_{\{0\} \times I^{n-1}}].$$

Par définition, l'application  $f$  restreinte à  $\{0\} \times I^{n-1}$  est à valeur dans  $A$  et son bord<sup>13</sup> et dans  $a_0$ ; ainsi  $\partial([f])$  est bien un élément de  $\pi_{n-1}(A, a_0)$  (qui ne dépend que de la classe d'homotopie de  $f$  par construction). Que cette flèche soit un morphisme de groupes est immédiat par définition du produit, voir la figure 6

Montrons que la suite est exacte : si  $[f] \in \pi_n(X, a_0)$ , alors  $f|_{\{0\} \times I^{n-1}}$  est l'application constante. Donc  $\text{Im}(p_*) \subseteq \text{Ker}(\partial)$ . Réciproquement, si  $\partial([f]) = 0$ , cela signifie qu'il existe une homotopie  $H : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, A)$  entre  $f|_{\{0\} \times I^{n-1}}$  et le chemin constant en  $a_0$ . Supposons par exemple que  $H|_{\{0\} \times I^{n-1}}$  est le chemin constant et que  $H|_{\{1\} \times I^{n-1}} = f|_{\{0\} \times I^{n-1}}$ . En posant :

$$\begin{aligned} \alpha : \quad \{0\} \times I^{n-1} &\rightarrow \{1\} \times I^{n-1} \\ (0, t_1, \dots, t_n) &\mapsto (1, t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

On peut recoller  $H$  et  $f$  de la façon suivante :

$$I^n \cong I^n \coprod_{\alpha} I^n \xrightarrow{H \amalg f} X$$

De plus,  $\{1\} \times I^{n-1}$  est un rétract par déformation (forte) de  $I^n$ , donc il existe une homotopie  $r$  de  $I^n$  vers  $\{1\} \times I^{n-1}$  relativement à ce dernier.  $H \circ r \amalg_{\alpha} f$  est une homotopie entre  $f$  et  $H \amalg_{\alpha} f$  relative à  $\partial I^n$ , et  $H \amalg_{\alpha} f$  envoie  $\partial I^n$  sur  $a_0$ . Donc  $[f] = p_*([H \amalg_{\alpha} f])$ .

Par le lemme 1.7.4, on obtient que la composée  $p_* \circ i_*$  est nulle (puisque elle envoie un représentant d'une classe de  $\pi_n(A, a_0)$  sur une application à valeur dans  $A$ , qui a eu  $a_0$  sur le bord). Par ailleurs, par le même lemme, si  $p_*([f]) = 0$ , alors  $f$  est homotope relativement au bord à une application  $g$  à valeur dans  $A$ . Comme sur son bord,  $f$  est constante et égale à  $a_0$ , il suit que  $g$  définit bien un élément de  $\pi_n(A, a_0)$  et  $i_*[g] = [f]$ .

Enfin, on a  $i_* \circ \partial([f])$  est la classe, relativement au bord, dans  $\pi_{n-1}(X, a_0)$  de  $f|_{\{0\} \times I^{n-1}}$ . Or  $f : I^n \rightarrow X$  définit précisément une homotopie entre  $f|_{\{0\} \times I^{n-1}}$  et son bord opposé  $a_0$ . Ainsi cette composée est nulle. Réciproquement, si  $i_*([g]) = 0$ , cela veut dire que  $g$  est homotope dans  $X$  à une application  $I^{n-1} \times I \rightarrow X$  qui, sur la composante  $\partial I^{n-1} \times I$  du bord est  $a_0$  et vaut  $g$  sur  $I^{n-1} \times \{0\}$  et  $a_0$  sur  $I^{n-1} \times \{1\}$ . Cela définit précisément un élément de  $\pi_n(X, A, a_0)$  dont l'image par  $\partial$  est  $[g]$ .  $\square$

On peut maintenant démontrer le théorème de la longue suite exacte associée à une fibration de Serre.

<sup>13.</sup> on fait attention que cela définit encore pour  $n = 1$  un élément de  $\pi_0(A)$

*Preuve du Théorème 1.6.14* . Il faut commencer par définir  $\partial : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, f_0)$ . Prenons  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$  une application représentant une classe dans  $\pi_n(B, b_0)$ . Montrons qu'on peut relever  $f$  en une application de  $I^n$  dans  $E$ . Comme  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Serre, d'après le lemme 1.6.9, le diagramme suivant admet un relèvement  $\tilde{f}$  :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\partial I^n \setminus \{0\}} \times \partial I^{n-1} & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ I^n & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \end{array}$$

où la flèche du haut est l'application constante sur le point base  $f_0$ . Par commutativité du diagramme la restriction de  $\tilde{f}$  au bord  $\mathbb{S}^{n-1} \cong \partial I^n$  est dans  $F$  et envoie  $\overline{\partial\{0\}} \times I^{n-1}$  sur le point base  $f_0$ . On définit alors

$$\partial([f]) = [\tilde{f}|_{\overline{\{0\}} \times I^{n-1}}].$$

On vérifie que l'application ne dépend pas du choix du représentant de la classe  $\alpha = [f]$ . C'est la même preuve que celle vérifiant que le relèvement d'un chemin est indépendant des choix dans le lemme 1.6.12 (ou ici on ne travaille que sur des cubes et rétractes de cubes à gauche). Que l'application  $p : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, f_0)$  soit un morphisme de groupes, découle des définitions des produits : On a  $[f] * [g] = [f * g]$  où pour tout  $(t, s) \in I^{n-1} \times [0, 1]$ , on a  $f * g(s, t) = f(s, 2t)$  si  $t \in [0, 1/2]$  et vaut  $g(s, 2t - 1)$  sinon. On obtient alors immédiatement que  $\partial([f * g])$  est donné par la même formule (avec  $s \in \{0\} \times I^{n-2}$ ) désormais et donc  $\partial([f * g]) = \partial([f]) * \partial([g])$ .

La fibration (de Serre)  $p : E \rightarrow B$  envoie  $F$  sur  $b_0$  par définition. Il suit qu'elle envoie une classe  $[f] \in \pi_n(E, F, f_0)$  sur une classe dans  $\pi_n(B, b_0)$ ; on note  $\tilde{p}_* : \pi_n(E, F, f_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  l'application ainsi obtenue, qui est pour les raisons précédentes un morphisme de groupes. la construction de  $\partial$  montre que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_n(F, f_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(E, f_0) & \longrightarrow & \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \tilde{p}_* \\ \dots & \longrightarrow & \pi_n(F, f_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(E, f_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \dots \end{array}$$

Pour terminer la preuve, en vertu du Théorème 1.7.5, il suffit de montrer que  $\tilde{p}_*$  est une bijection.

On a en fait déjà montré la surjectivité : en effet le relèvement  $\tilde{f} : I^n \rightarrow E$  de  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$  que nous avons construit est précisément une application qui envoie  $\{0\} \times I^{n-1}$  dans  $F$  et son complémentaire dans  $\partial I^n$  sur le point base. Ainsi il définit une classe  $[\tilde{f}] \in \pi_n(E, F, f_0)$  telle  $\tilde{p}_*([\tilde{f}]) = [p \circ \tilde{f}] = [f]$  dans  $\pi_n(B, b_0)$ .

Pour l'injectivité : supposons avoir deux applications  $f, g : I^n \rightarrow E$  qui envoient le bord dans  $F$  et  $\partial I^n \setminus \{0\} \times I^{n-1}$  sur  $f_0$  et qui, en outre, vérifient que  $\tilde{p}_*([f]) = \tilde{p}_*([g])$ ; c'est à dire  $p \circ f \underset{\partial I^n}{\simeq} p \circ g$ . Comme  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Serre (et que la flèche de gauche est un rétract par déformation fort d'une paire CW) on a un



relèvement dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 I^n \times \{0, 1\} \cup I^{n-1} \times \{1\} \times I & \xrightarrow{\quad} & E \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\
 I^n \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

où  $H$  est l'homotopie entre  $p \circ f$  et  $p \circ g$ , et la flèche du haut est donnée par  $f \amalg g : I^n \times \{0, 1\} \rightarrow E$  et l'application constante sur  $f_0$  sur  $\{1\} \times I^n$ . Comme  $H(-, 0) = b_0$ , on a que  $\tilde{H}(-, 0)$  est à valeur dans  $F$ . Il suit que  $H$  définit bien une homotopie entre  $f$  et  $g$  identifiant leur classes dans  $\pi_n(E, F, f_0)$ .  $\square$

*Exemple 1.7.6.* La fibration de Hopf est une application  $p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$  dont la fibre en tout point de  $\mathbb{S}^2$  est un cercle  $\mathbb{S}^1$ . On obtient une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow \pi_3(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_3(\mathbb{S}^3) \xrightarrow{p_*} \pi_3(\mathbb{S}^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^3) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^2) \cdots$$

Rappelons que :

$$\pi_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = k \end{cases}$$

et qu'en particulier :

$$\pi_k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Notre suite exacte longue devient alors :

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p_*} \pi_3(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \cdots$$

On en déduit que  $\pi_3(\mathbb{S}^3) \cong \mathbb{Z}$

*Remarque 1.7.7.* Les groupes d'homotopie des sphères ne sont pas tous connus !

*Exemple 1.7.8.*

$$\begin{aligned}
 \pi_{12}(\mathbb{S}^2) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
 \pi_{11}(\mathbb{S}^8) &= \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

On a  $\pi_{k < n}(\mathbb{S}^n) = 0$  par une application aisée du lemme de Sard et  $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  par la théorie du degré (voir [3, 18] par exemple). Serre a démontré le théorème remarquable suivant.

*Théorème 1.7.9* (Serre  $\sim$  1953).

Si  $k > n$ , alors  $\pi_k(\mathbb{S}^n)$  est de torsion, sauf  $\pi_{4n-1}(\mathbb{S}^{2n}) = \mathbb{Z} \oplus \text{torsion}$ .

*Remarque 1.7.10. (Une mise en garde.)* Considérons la paire donnée par  $S^1 \cong \partial I^2 \subset I^2 \cong D^2$ . La longue suite exacte de groupes d'homotopie relatifs donne  $\pi_{\geq 3}(D^2, S^1, *) = 0$  et la suite exacte

$$0 \rightarrow \pi_1(D^2, S^1, *) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \pi_0(D^2, S^1, *) \rightarrow \{*\}$$

d'où on déduit que  $\pi_n(D^2, S^1, *) = 0$  sauf pour  $n = 2$  où on trouve  $\mathbb{Z}$ . Remarquons que ces groupes d'homotopie<sup>14</sup> sont donc différents de ceux du quotient

14. contrairement aux groupes d'homologie d'une paire qui sont bien équivalents à ceux du cone  $\text{Cone}(A \hookrightarrow X)$

$D^2/S^1 \cong S^2$  qui est pourtant un “bon” quotient au sens où  $D^2/S^1$  est homotope au cône  $Cone(S^1 \hookrightarrow D^2)$ . Ceci montre que la suite exacte n’a pas d’interprétations en termes de quotient homotopique de la forme  $X/A$  ou quotient homotopique  $Cone(A \hookrightarrow X)$  (voir la suite du cours pour les notions de quotients homotopiques) lorsque l’application quotient  $X \rightarrow X/A$  n’est pas une fibration. En fait cette longue suite d’exacte ne correspond pas à l’homotopie d’un espace de manière naturelle (contrairement donc à l’homologie relative  $H_*(A, B)$  qui correspond bien à celle du cône  $CA \hookrightarrow X$ ) Cette propriété montre en fait que les groupes d’homotopie ne satisfont pas de propriété du type “Mayer Vietoris”.

### 1.8. LA NOTION CLASSIQUE DE COFIBRATION POUR LES ESPACES TOPOLOGIQUES

Nous allons maintenant définir une notion duale de celle de fibration (de Hurewicz).

**Définition 1.8.1** (Cofibration). Une application  $i : A \rightarrow X$  est appelée une cofibration si pour tout espace topologique  $Y$ , tout diagramme commutatif du type suivant admet un relèvement  $\tilde{f}$  :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & Y^I \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{f} & \downarrow ev_0 \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \end{array}$$

*Remarque 1.8.2.* De manière équivalente, puisque le foncteur “objet en chemin” est adjoint à droite au foncteur “objet cylindre”,  $i : A \rightarrow X$  est une cofibration si le diagramme commutatif suivant admet un relèvement :

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} A \times \{0\} & \hookrightarrow & A \times [0, 1] \\ \downarrow i & \nearrow f & \downarrow i \\ X \times \{0\} & \hookrightarrow & X \times [0, 1] \end{array}$$

**Proposition 1.8.3.** a) Si  $i : A \rightarrow X$  est une cofibration, alors  $i$  est un homéomorphisme sur son image<sup>15</sup>.  
b) Si  $X$  est séparé (Hausdorff), alors  $i(A)$  est un fermé de  $X$ .  
c) Si  $A \subseteq X$ , alors l’inclusion  $A \hookrightarrow X$  est une cofibration si et seulement si  $X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$  est un rétract de  $X \times [0, 1]$ .

*Démonstration.* Les deux premiers points sont dans la feuille de TD 1. Le dernier est essentiellement une retraduction de la définition : en prenant  $Y = A \times I \cup X \times \{0\}$  on obtient directement  $\Leftarrow$ . Réciproquement, si  $X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$  est un rétract de  $X \times [0, 1]$  et qu’on a un diagramme commutatif comme (4), alors on construit le relèvement  $X \times [0, 1] \rightarrow Y$  comme la composée  $X \times [0, 1] \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] \rightarrow Y$  où la première flèche est la rétraction.  $\square$

15. ce qui permet de se ramener au cas où  $A$  est un sous-espace en pratique

**Lemme 1.8.4.** Si  $K \subseteq L$  est une inclusion d'un sous-complexe cellulaire, alors c'est une cofibration.

*Démonstration.* Il suffit de construire une rétraction de  $L \times [0, 1]$  dans  $L \times \{0\} \cup K \times [0, 1]$  par récurrence sur  $L^{(n)} \times [0, 1]$ . En ayant déjà construit une rétraction  $r^{(n)} : L^{(n)} \times [0, 1] \rightarrow L^{(n)} \times \{0\} \cup K^{(n)} \times [0, 1]$  on l'étend à  $L^{(n+1)} \times [0, 1]$  de la manière usuelle : pour construire  $r^{(n+1)}$  il suffit de le faire sur chaque cellule de  $L^{(n+1)}$  qui n'est pas dans  $K^{(n+1)}$ . On est donc ramené à contruire un relèvement dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^n \times \{0\} & \hookrightarrow & \mathbb{S}^n \times [0, 1] \\
 \downarrow i & & \downarrow i \\
 I^{n+1} \times \{0\} & \hookrightarrow & I^{n+1} \times [0, 1]
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \swarrow \\
 L^{(n+1)} \times \{0\} \cup K^{(n+1)} \times [0, 1] \\
 \nwarrow
 \end{array}$$

où les applications sont induites par l'inclusion canonique et  $r^{(n)}$  qui est bien défini sur la partie de bord  $\mathbb{S}^n \times [0, 1]$  de la cellule  $I^{(n+1)} \times [0, 1] \rightarrow L^{(n+1)} \times [0, 1]$ . Mais comme  $\mathbb{S}^n \rightarrow I^{n+1}$  est une cofibration par la proposition 1.8.3.c), le résultat en découle. Comme un CW-complexe a la topologie réunion, on peut recoller les  $r^{(n)}$  pour obtenir la rétraction voulue.  $\square$

*Remarque 1.8.5 (complexes cellulaires relatifs).* Le lemme précédent se généralise<sup>16</sup> en fait à une *inclusion*  $X \rightarrow L$  *cellulaire généralisée*<sup>17</sup> (auss appelé *complexe cellulaire relatif*) : c'est à dire une inclusion  $X \subset L$  où  $L$  est obtenu comme la colimite dans les espaces topologiques<sup>18</sup>  $L = \bigcup_{i \in I} L_i$  de sous-espaces contenant  $X$  et tels que chaque  $L_i$  est obtenu à partir de  $X$  par recollement de cellules.

*Exemple 1.8.6 (Le cylindre d'une application).* L'exemple suivant est *fondamental*. Soit  $f : X \rightarrow Y$ . On définit le *cylindre de  $f$*  comme l'espace  $Cyl(f) := X \times [0, 1] \coprod_{f \times \{0\}} Y \times \{0\} = X \times [0, 1] \coprod Y /_{(x,0) \sim f(x)}$  (faire un dessin !). L'application  $X \hookrightarrow Cyl(f)$  (donnée par  $x \mapsto (x, 1)$ ) est une cofibration comme on le voit par une preuve "duale" de celle de l'espace des chemins.

On obtient alors une factorisation de  $f$  en

$$X \hookrightarrow Cyl(f) \xrightarrow{\simeq} Y$$

en une cofibration suivie d'une équivalence d'homotopie (donnée par l'homotopie rétractant le cylindre  $X \times [0, 1]$  sur  $X \times \{0\}$ ).

**Lemme 1.8.7.** Si  $X$  est un espace métrisable (ou seulement normal<sup>19</sup>), et si  $i : A \hookrightarrow X$  est fermé, alors  $i$  est une cofibration si et seulement si il existe un voisinage ouvert  $U \subseteq X$  qui se rétracte par déformation sur  $A$  dans  $X$  (autrement dit il existe une application  $H : U \times [0, 1] \rightarrow X$  telle que  $H(a, t) = a$ ,  $H(u, 1) \in A$ ,  $H(u, 0) = u$ ).

16. en appliquant la preuve à chaque  $L_i$  et en recollant les rétractions obtenues en utilisant la topologie réunion

17. cette dernière généralise la notion de CW-complexe relatif qui est la même définition si ce n'est qu'on impose en plus de recoller les cellules par degré croissant

18. autrement dit  $L$  est muni de la topologie réunion des  $L_i$

19. c'est à dire un espace dans lequel deux fermés disjoints peuvent être séparés par des ouverts

*Remarque 1.8.8.* Les constructions usuelles (quotient, tiré en arrière, ...) ne préservent pas en général les homotopies.

Nous avons vu précédemment que le poussé en avant (et autres colimites) ne préserve pas les équivalences faibles. Pour palier ce défaut, on doit construire des versions “homotopiques” de ces (co)limites, qui sont des constructions analogues à celle des objets globaux associés à *Tor* et *Ext*. Ces constructions permettent de relier les groupes d’homotopie, de (co)homologie et autres invariants topologiques de la (co)limite homotopique à ceux des différentes composantes.

Donnons un exemple élémentaire qui sera justifié plus avant dans la partie 2.6, à savoir la construction des poussés en avant homotopiques :

**Définition 1.8.9.** Le pushout homotopique de  $A \xrightarrow{i} X$ ,  $A \xrightarrow{j} Y$  est l’espace topologique

$$X \coprod_A^h Y := Y \coprod_A Cyl(i) = \left( Y \coprod A \times [0, 1] \coprod X \right) / \left( (a, 0) \sim j(a), (a', 1) \sim i(a') \right).$$

On notera que  $X \coprod_A^h Y$  est naturellement homéomorphe à  $Cyl(j) \coprod_{Cyl(A)} Cyl(i)$ . Par ailleurs, les inclusions de  $X$  et  $Y$  dans leurs composantes donne un diagramme canonique

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow j & & \downarrow h \\ Y & \longrightarrow & X \coprod_A^h Y \end{array}$$

qui n’est *pas* commutatif, mais est commutatif à homotopie près<sup>20</sup>.

Remarquons que l’on a une application continue naturelle

$$X \coprod_A^h Y \longrightarrow X \coprod_A Y$$

qui est simplement induite par la projection  $A \times [0, 1] \rightarrow A$ . Il n’y a en revanche, pas d’application naturelle de  $X \cup_A Y$  dans  $X \cup_A^h Y$  en général. Par ailleurs, si on a un diagramme commutatif

$$(5) \quad \begin{array}{ccccc} Y & \xleftarrow{j} & A & \xrightarrow{i} & X \\ f \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow g \\ Y' & \xleftarrow{j'} & A' & \xrightarrow{i'} & X' \end{array}$$

alors on a une flèche naturelle  $f \coprod_{\phi}^h g : X \coprod_A^h Y \rightarrow X' \coprod_{A'}^h Y'$  donnée par  $y \mapsto f(y)$ ,  $(a, t) \mapsto (\phi(a), t)$  et  $x \mapsto g(x)$ .

---

20. c’est à dire que les deux flèches  $A \rightarrow X \coprod_A^h Y$  déduites du diagramme sont homotopes. L’homotopie étant évidemment celle ramenant  $A \times \{0\}$  sur  $A \times \{1\}$  dans le cylindre

**Lemme 1.8.10.** Le pushout homotopique est un “invariant homotopique”.

Les guillemets et l'énoncé sont volontairement vagues. Cela est dû au fait que cette construction n'est pas un pushout ou une colimite de  $X \leftarrow A \rightarrow Y$  ni même si on considère ces objets dans la catégorie homotopique des espaces (l'analogue de la catégorie dérivée, cf le chapitre suivant). On peut montrer qu'une transformation constituée d'équivalences d'homotopies faibles induit une équivalence d'homotopie faible entre les pushouts homotopiques, mais selon les cas on peut avoir des résultats plus forts. Cette notion de colimite homotopique sera précisée dans la suite du cours, voir section 2.6 et exemple 2.6.19.

*Démonstration.* On va seulement démontrer que si  $f : X \xrightarrow{\sim} X'$  est une équivalence d'homotopie au dessus de  $A$ , elle induit, pour tous les pushouts de cette forme, l'application :

$$f \cup_A^h Y : X \cup_A^h Y \rightarrow X' \cup_A^h Y$$

qui est une équivalence d'homotopie. Il existe des améliorations de cela, voir par exemple la feuille de TD 1 où on traite le cas où  $Y = \{*\}$ .

Pour cela on va montrer que si  $g : X' \rightarrow X$  est un inverse homotopique de  $f$ , alors  $g \cup_A^h Y$  est un inverse homotopique de  $f \cup_A^h Y$ . On remarque que  $X \coprod_A^h Y$  est le pushout :

$$\begin{array}{ccc} A \hookrightarrow & \xrightarrow{\quad} & A \times [1/2, 1] \cup X /_{(a,1) \sim i(a)} \simeq Cyl(i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Cyl(j) \simeq A \times [0, 1/2] \cup Y /_{(a',0) \sim j(a')} & \xrightarrow{\quad} & X \cup_A^h Y \end{array}$$

Or les injections  $A \hookrightarrow Cyl(i)$  et  $A \hookrightarrow Cyl(j)$  sont des cofibrations (d'après 1.8.3), donc, d'après la propriété universelle du pushout, les morphismes  $Cyl(j) \rightarrow X \cup_A^h Y$  et  $Cyl(i) \rightarrow X \cup_A^h Y$  sont aussi des cofibrations, ce qui implique que  $\iota : A \hookrightarrow X \cup_A^h Y$  est une cofibration.

Par hypothèse, on a une homotopie  $H$  entre  $g \circ f$  et  $id_X$ . Cela nous donne une application  $H|_{A \times [0,1]} : A \times [0, 1] \rightarrow X$ . On a aussi une application  $A \times [0, 1] \xrightarrow{j \times [0,1]} Y \times [0, 1] \xrightarrow{proj_0} Y$ . On en déduit une application  $A \times [0, 1] \rightarrow X \cup_A^h Y$ , auquel correspond un morphisme  $\varphi : A \rightarrow (X \cup_A^h Y)^{[0,1]}$ . On relève alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & (X \cup_A^h Y)^{[0,1]} \\ \downarrow \iota(a) & \nearrow \tilde{H} & \downarrow ev_0 \\ X \cup_A^h Y & \xrightarrow{id_{X \cup_A^h Y}} & X \cup_A^h Y \end{array}$$

$\tilde{H}$  correspond à une homotopie entre  $g \circ f \coprod_A id_Y$  et  $id_X \coprod_A^h id_Y$ .

On peut démontrer également que si on a des équivalences faibles  $A \rightarrow A'$ ,  $X \rightarrow X'$ ,  $Y \rightarrow Y'$  tels que le diagramme 5 soit commutatif, alors, l'application induite  $X \cup_A^h Y \rightarrow X' \cup_{A'}^h Y'$  est une équivalence d'homotopie faible. C'est une conséquence de l'exemple 2.6.19 et de la proposition 2.6.11.

Sans utiliser la machinerie du reste du cours, on note que le fait que cette application induise un isomorphisme pour les groupes fondamentaux résulte du Théorème de Van-Kampen (en choisissant les images de  $Y \coprod A \times [0, 3/4[$  et  $A \times [1/4, 0] \coprod X$  comme ouverts). De même Mayer-Vietoris appliqué aux mêmes ouverts induit des isomorphismes sur les groupes d'homologie. Il découle alors, si nos espaces sont simplement connexes, du Théorème 1.3.11 que l'application est une équivalence d'homotopie faible.  $\square$

*Exemple 1.8.11.* Un autre exemple classique de telle colimite est donné par la construction de “bon quotient”. Plus précisément, soit  $A \subset X$  un sous-espace. Il est classique que le quotient  $X/A$  n'a pas de très bonnes propriétés : par exemple, sa (co)homologie (réduite) diffère de celle de la (co)homologie relative  $H(X, A)$  de la paire en général<sup>21</sup> et n'est pas un invariant d'homotopie. En revanche, le Cone  $C(A \subset X)$  est un invariant homotopique qui a les bons groupes de (co)homologie et dont on peut remarquer qu'il est homotope au pushout homotopique du diagramme  $* \leftarrow A \hookrightarrow X$ .

**Proposition 1.8.12.** Si l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ A' & \xrightarrow{i'} & X' \end{array}$$

où  $i$  et  $i'$  sont des cofibrations d'image fermée, alors l'application induite  $X/A \rightarrow X'/A'$  est aussi une équivalence d'homotopie.

*Démonstration.* Voir les solutions du TD 1.  $\square$

On crée de manière analogue les pullbacks homotopiques en remplaçant  $Cyl(f)$  par  $\mathcal{P}_f$ .

De manière générale, on peut créer des (co)limites homotopiques en remplaçant les applications par des (co)fibrations comme ci-dessus. Cela demande un petit peu d'attention, car il faut faire cela tout en conservant la commutativité des diagrammes servant à définir notre (co)limite. En général, c'est plus compliqué que simplement remplacer les applications par des (co)fibrations même si cela reste l'idée clé.

L'intérêt des (co)limites homotopiques est qu'il donne des constructions invariantes à homotopie (faible) près. Elles ont la vertu d'être beaucoup plus facilement calculables (du point de vue de l'homologie ou de l'homotopie) que leurs constructions non-homotopiques et correspondent aux foncteurs dérivés Tor et Ext de l'algèbre homologique. Par ailleurs, très souvent, pour identifier des espaces topologiques à homotopie (faible) près, on peut se ramener à les identifier avec certaines constructions de (co)limites homotopiques et utiliser leur meilleure calculabilité. Enfin, ces constructions interviennent partout en topologie algébrique et leurs analogues plus généraux que nous verrons dans les catégories de modèles sont des constructions fondamentales dans les applications en dehors de la topologie algébrique.

21. un exemple standard est donné par  $A = \{0\} \cup \{1/n\} \subset [0, 1]$  dont le quotient est constitué des anneaux Hawaïens qui n'est pas homotope à un bouquet de cercles, et a une homologie un peu plus compliquée.

## II. CATÉGORIES DE MODÈLE

On va définir un cadre abstrait pour les équivalences faibles et la dualité fibrations/cofibrations. Ce cadre nous permettra par ailleurs de construire proprement et efficacement la catégorie des espaces topologiques à équivalence faible près (ou la catégorie dérivée en algèbre homologique) et les constructions homotopiques/dérivées que nous avons esquissé dans le premier chapitre. Bien que la définition soit très axiomatique, elle s'est montrée redoutablement efficace et les exemples<sup>22</sup> et constructions associées abondent.

*Remarque 2.0.1.* Ici ce que l'on appellera “catégorie de modèle” est souvent appelé “catégorie de modèle fermée” dans la littérature, plus particulièrement dans la terminologie originelle de Quillen.

Commençons par donner la définition générale d'un rétract entre morphismes.

**Définition 2.0.2.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie. Un morphisme  $q \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$  est appelé un rétract de  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & id_A & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 A & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\quad} & A \\
 \downarrow q & & \downarrow f & & \downarrow q \\
 B & \xrightarrow{\quad} & Y & \xrightarrow{\quad} & B \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\
 & & id_B & & 
 \end{array}$$

Si les applications verticales sont l'identité (et  $A \rightarrow X$  l'inclusion d'un sous-espace topologique), on retrouve le cas d'un rétracte entre objets (resp. espaces topologiques).

### 2.1. DÉFINITIONS ET AXIOMATIQUE

La définition qui suit est longue, mais centrale dans ce cours !

**Définition 2.1.1.** Une catégorie de modèle est une catégorie  $\mathbf{C}$  munie de trois classes de morphismes :

- La classe  $\mathcal{W}$  dont les éléments, appelés *équivalences faibles*, sont notés  $\xrightarrow{\sim}$ .
- La classe  $\mathcal{C}$  dont les éléments, appelés *cofibrations*, sont notés  $\rightarrow$ .
- La classe  $\mathcal{F}$  dont les éléments, appelés *fibrations*, sont notés  $\twoheadrightarrow$  (Attention à ne pas les confondre avec les épimorphismes).

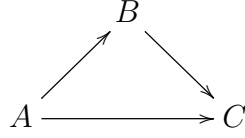
vérifiant les 5 axiomes suivants :

(MC1)  $\mathbf{C}$  est complète et cocomplète<sup>23</sup>.

22. même s'il y en a fort peu d'élémentaires

23. c'est à dire l'existence de toutes *petites* limites et colimites, c'est à dire celles indicées par une catégorie dont les objets forment un ensemble

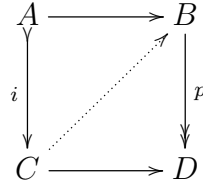
(MC2) (2 parmi 3) Dans tout diagramme commutatif :



Si deux des trois flèches sont des équivalences faibles, alors la troisième est aussi une équivalence faible.

(MC3) (*Stabilité par rétracts*) Si  $q$  est un rétract de  $f \in \mathcal{W}$  (resp  $f \in \mathcal{C}$ ,  $f \in \mathcal{F}$ ) alors  $q \in \mathcal{W}$  (resp  $q \in \mathcal{C}$ ,  $q \in \mathcal{F}$ ).

(MC4) (*Relèvements*) Pour tout diagramme commutatif



il existe un relèvement (symbolisé par la flèche en pointillé) rendant les deux triangles commutatifs dès que  $i \in \mathcal{W}$  ou  $p \in \mathcal{W}$  (on prendra garde qu'on a déjà supposé que  $i$  est une cofibration et  $p$  une fibration).

(MC5) (*Factorisations*) Tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  admet deux factorisations *naturelles* :

$$X \xrightarrow{\sim} P_f \twoheadrightarrow Y \quad \text{et} \quad X \twoheadrightarrow C_f \xrightarrow{\sim} Y$$

*Remarque 2.1.2* ((co)fibrations acycliques). Les éléments de  $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{W} \cap \mathcal{F}$ ) sont appelés les *cofibrations acycliques* (resp. *fibrations acycliques*)<sup>24</sup>.

*Remarque 2.1.3.* L'axiome (MC4) est en fait constitué de deux axiomes : l'un concerne le cas où la flèche de gauche est une cofibration acyclique et celle de droite seulement une fibration, alors que la deuxième concerne le cas où la flèche de gauche est n'importe quelle cofibration mais celle de droite est une fibration acyclique.

*Terminologie* : On dit d'une flèche  $A \rightarrow C$  comme dans le diagramme de (MC4) qu'elle admet la propriété de relèvement à gauche par rapport à la flèche  $p : B \rightarrow D$ . Et on dit que la flèche  $p : B \rightarrow D$  admet la propriété de relèvement à droite par rapport à la flèche  $A \rightarrow C$ .

*Remarque 2.1.4.* L'hypothèse que les factorisations sont *naturelles* (on peut aussi dire fonctorielles) n'est pas indispensable<sup>25</sup>, mais pratique, pour démontrer les résultats dont on a besoin et est souvent satisfaite en pratique. Elle signifie que si on a un

24. dans la littérature, on trouve aussi la terminologie de (co)fibrations triviales pour la même notion

25. et souvent non-demandée dans la littérature



diagramme commutatif  $X \xrightarrow{f} Y$  alors on obtient des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\simeq} & P_f & \twoheadrightarrow & Y \\ p \downarrow & & \downarrow P(p,q) & & \downarrow q \\ X' & \xrightarrow{\simeq} & P_{f'} & \twoheadrightarrow & Y' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\simeq} & C_f & \xrightarrow{\simeq} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow C(p,q) & & \downarrow q \\ X' & \xrightarrow{\simeq} & C_{f'} & \xrightarrow{\simeq} & Y' \end{array}$$

et par ailleurs  $P(p' \circ p, q' \circ q) = P(p', q') \circ P(p, q)$  ainsi que  $C(p' \circ p, q' \circ q) = C(p', q') \circ C(p, q)$ . Autrement dit, les factorisations de l'axiome (MC5) sont en fait des foncteurs

$$\text{Arr}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Arr}(\mathbf{C}) \times \text{Arr}(\mathbf{C})$$

où  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  est la catégorie dont les objets sont les morphismes de  $\mathbf{C}$  et les flèches sont les diagrammes commutatifs (la composition dans  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  étant donnée par la superposition verticale de deux diagrammes).

Par ailleurs, il existe des variantes où on demande seulement les (co)limites *finies* pour (MC1).

*Remarque 2.1.5.* D'après (MC1), toute catégorie de modèle  $\mathbf{C}$  admet un objet initial  $\mathbf{0}$  et un <sup>26</sup> objet terminal  $\{*\}$  (c'est-à-dire, pour tout objet  $X$  de  $\mathbf{C}$ ,  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{0}, X)$  et  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \{*\})$  sont des singletons). En effet, ces objets correspondent aux (co)limites vides, c'est à dire indicées par l'ensemble vide.

*Exemple 2.1.6.* Si  $\mathbf{C}$  est additive,  $\mathbf{0} = \{*\}$  est l'objet nul.

Si  $\mathbf{C} = \text{Top}$ ,  $\mathbf{0} = \emptyset$  et  $\{*\}$  est un singleton. L'objet initial est alors différent du terminal.

La définition suivante sera importante. On verra dans ce cours que les objets cofibrants (resp. fibrants) ont un peu le même rôle que les modules projectifs en algèbre homologique ou CW-complexe en homotopie (resp. injectifs).

**Définition 2.1.7.** Un objet  $X$  de  $\mathbf{C}$  est dit :

- cofibrant si  $\mathbf{0} \rightarrow X$  est une cofibration.
- fibrant si  $X \rightarrow \{*\}$  est une fibration.

*Remarque 2.1.8.* Soit  $X$  un objet de  $\mathbf{C}$ . D'après (MC5), il existe toujours une factorisation de  $\mathbf{0} \rightarrow X$  :

$$(6) \quad \mathbf{0} \hookrightarrow L(X) \xrightarrow{\sim} X$$

Donc tout  $X$  est faiblement équivalent à un objet cofibrant (*via* une fibration).

De même, tout objet  $Y$  de  $\mathbf{C}$  est faiblement équivalent (*via* une cofibration) à un objet fibrant, par exemple donné par la factorisation

$$(7) \quad Y \xrightarrow{\sim} R(Y) \twoheadrightarrow \{*\}.$$

---

<sup>26</sup> déterminé à unique isomorphisme près

*Terminologie 2.1.9.* On appelle<sup>27</sup> une fibration acyclique  $L \xrightarrow{\sim} X$ , où  $L$  est cofibrant, une “résolution cofibrante”, ou un “remplacement cofibrant” de  $X$ .

On appelle une cofibration acyclique  $Y \xrightarrow{\sim} R$ , où  $R$  est fibrant, une “résolution fibrante” ou un “remplacement fibrant”.

On peut noter l’analogie de cette terminologie et de ces constructions avec celles de résolution projectives et injectives 1.5.14. De manière générale les axiomes (MC3) et (MC5) permettent de construire de nombreuses (co)fibrations.

Notons que la naturalité des factorisations de (MC5) assure que l’on peut obtenir des remplacements fibrant et cofibrant fonctoriels donnés par  $L$  et  $R$  ci-dessus (6), (7).

*Remarque 2.1.10.* Si  $A$  est un objet cofibrant, alors pour toute fibration acyclique  $Y \xrightarrow{\sim} X$ , tout morphisme  $A \rightarrow X$  se relève :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \wr \\ A & \longrightarrow & X \end{array}$$

On a aussi le résultat dual pour les objets  $B$  fibrants :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & B \\ \downarrow \wr & \nearrow & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

On peut remarquer une analogie certaine avec des résultats obtenus pour les complexes de modules projectifs et injectifs dans les rappels d’algèbre homologique.

*Exemple 2.1.11.* Soit  $L \xrightarrow{\sim} X$  et  $P \xrightarrow{\sim} X$  deux résolutions cofibrantes de  $X$ . Alors, les axiomes MC4 appliqués au diagramme  $\emptyset \longrightarrow L$  induise une flèche  $P \rightarrow L$

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & L \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \sim \\ P & \xrightarrow{\sim} & X \end{array}$$

qui est une équivalence faible par la propriété 3 pour 2. Et de même symétriquement bien-sûr.

Nous avons un résultat<sup>28</sup> analogue pour les résolutions fibrantes.

*Exercice 2.1.12.* (1) Montrer que si  $\mathbf{C}$  est une catégorie complète et cocomplète et que l’on choisit  $\mathcal{W}$  = Isomorphismes,  $\mathcal{C}, \mathcal{F}$  = tous les morphismes alors on obtient une catégorie de modèle.

(2) Montrer que le produit de 2 catégories de modèle a une structure de modèle obtenue en prenant les produits 2 à 2 des classes  $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ .

27. certains auteurs utilise la terminologie suivante sans supposer que les flèches sont des (co)fibrations mais seulement des équivalences faibles

28. ces résultats sont l’intérêt du choix d’exiger des fibrations/cofibrations pour définir les résolutions cofibrantes/fibrantes

- (3) Montrer que si  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  est une catégorie de modèle, alors  $(\mathbf{C}^{op}, \mathcal{W}^{op}, \mathcal{F}^{op}, \mathcal{C}^{op})$  est une catégorie de modèle. Autrement dit, les fibrations et cofibrations jouent un rôle dual.

La proposition suivante est cruciale, et justifie le caractère “fermé” des catégories de modèle.

**Proposition 2.1.13.** Soit  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  une catégorie de modèle.

- a)  $f$  est une cofibration  $\iff$  elle vérifie la propriété de relèvement (à gauche) le long de toutes les fibrations acycliques.
- b)  $f$  est une cofibration acyclique  $\iff$  elle vérifie la propriété de relèvement (à gauche) le long de toutes les fibrations.
- c)  $f$  est une fibration  $\iff$  elle vérifie la propriété de relèvement (à droite) le long de toutes les cofibrations acycliques.
- d)  $f$  est une fibration acyclique  $\iff$  elle vérifie la propriété de relèvement (à droite) le long de toutes les cofibrations.
- e)  $f$  est une équivalence faible si et seulement si elle se factorise  $p \circ i$  avec  $i$  une cofibration acyclique et  $p$  une fibration acyclique.

**Corollaire 2.1.14.** On déduit de ce qui précède :

- a) Dans une catégorie de modèle  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ , la donnée de deux des classes  $\mathcal{W}, \mathcal{C}$  et  $\mathcal{F}$  détermine entièrement la troisième.
- b)  $\mathcal{W}, \mathcal{C}$  et  $\mathcal{F}$  sont clos par composition.
- c) Les cofibrations et cofibrations acycliques sont stables par pushouts; les fibrations et fibrations acycliques sont stables par pullbacks.
- d) Les isomorphismes sont à la fois des cofibrations, fibrations et équivalences faibles.

Aucun des deux exemples suivants ne sont triviaux. Le premier est néanmoins fondamental. Il peut se démontrer pour une bonne partie en utilisant les résultats du chapitre I, une méthode similaire (via l’argument du petit objet) à celle utilisée dans la partie 2.3 pour les propriétés de factorisation. Une partie un peu plus technique est la caractérisation des cofibrations données. Il est cependant assez aisé de montrer que les inclusions cellulaires généralisées sont bien des cofibrations pour cette structure de modèle qui est le sens utile en pratique. Voir la feuille de TD 3 pour la démonstration de l’exemple 2.1.15.

**Exemple 2.1.15 (Catégorie de modèle de Quillen sur les espaces topologiques).** Quillen a démontré que  $Top$ , munie des équivalences faibles d’homotopie, des fibrations de Serre et des rétractes d’inclusions cellulaires généralisées (cf 1.8.5) est une catégorie de modèle.

Dans cette structure, tout objet est fibrant. Une variante<sup>29</sup> du lemme 1.8.4 permet de montrer que toute inclusion d’un cellulaire est une cofibration. On peut en fait montrer que les cofibrants sont exactement les rétractes de complexes cellulaires.

**Exemple 2.1.16 (Catégorie de modèle de Strøm sur les espaces topologiques).** Strøm a démontré que  $Top$ , munie des équivalences d’homotopie, des fibrations de Hurewicz et des rétractes de cofibrations d’image fermée, est une catégorie de modèle. Tout objet est encore fibrant.

<sup>29</sup>. ou plus exactement une identification des cofibrations génératrices de cette structure, voir 2.4

On notera que les deux exemples précédents ont des équivalences faibles différentes et que leurs notions de cofibrations diffèrent, en particulier dans le cas de la structure de Quillen, de celle de la section 1.8 (mais en sont des cas particuliers).

*Démonstration de la proposition 2.1.13.* a)  $\Rightarrow$  vient de (MC4). Montrons  $\Leftarrow$  : soit  $i : A \rightarrow B$  un morphisme admettant la propriété de relèvement (à gauche) le long de toutes les fibrations acycliques. D'après (MC5), on peut factoriser  $i : A \rightarrow B$  en  $i : A \rightarrow E \xrightarrow{\sim} B$ . D'après la propriété de relèvement (comme dans (MC4)) satisfaite par  $i : A \rightarrow B$ , on a un relèvement  $h$  du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow \wr \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

Ainsi on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xlongequal{\quad} & A & \xlongequal{\quad} & A \\ \downarrow i & & \downarrow & & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{h} & E & \xrightarrow{\sim} & B \\ & \searrow id_B & & & \end{array}$$

D'après (MC3) on en déduit que  $i \in \mathcal{C}$ .

b)  $\Rightarrow$  vient de (MC4).  $\Leftarrow$  se montre comme précédemment.

c) et d) sont duales de a) et b).

e)  $\Rightarrow$  Soit  $f : X \rightarrow Y$ . On factorise  $f : X \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\sim} Y$ . D'après (MC2),  $i \in \mathcal{W}$ .  $\Leftarrow$  est une application directe de (MC2).

□

*Démonstration du corollaire 2.1.14.* Notons qu'il découle immédiatement de (MC2) que les équivalences faibles sont stables par composition.

Démontrons a). Si on a fixé  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{F}$ , alors, on connaît aussi les fibrations acycliques et le a) de la Proposition 2.1.13 définit les cofibrations. De même la donnée de  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{C}$  détermine les cofibrations acycliques et par suite les fibrations par le c) de la Proposition 2.1.13.

Si maintenant on a la donnée de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{C}$ , les b) et d) de la Proposition 2.1.13 déterminent les fibrations acycliques et cofibrations acycliques de  $\mathbf{C}$ . Par suite, le e) de Proposition 2.1.13 détermine les équivalences faibles.

Démontrons b). Si on compose deux applications admettant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques, alors en superposant deux diagrammes du type de (MC4) : on obtient successivement un relevé dans le diagramme

commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow i & \nearrow \psi & \downarrow \wr \\
 C & & \\
 \downarrow j & & \downarrow \\
 E & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

puis en remplaçant la flèche  $A \rightarrow B$  par la flèche  $\psi : C \rightarrow B$  obtenue un relevé supplémentaire

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow i & \nearrow \psi & \downarrow \wr \\
 C & & \\
 \downarrow j & \nearrow \tilde{\psi} & \downarrow \\
 E & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

tel que le diagramme reste commutatif. Cela prouve que la composée de deux applications admettant la propriété de relèvement par rapports aux fibrations acycliques admet encore la propriété de relèvement par rapports aux fibrations acycliques. Et encore une fois la Proposition 2.1.13 permet bien de conclure que la composée de deux cofibrations est une cofibration.

De même, en appliquant la propriété de relèvement au diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow i & & \downarrow \wr \\
 & & D \\
 & \nearrow \psi & \downarrow \wr \\
 E & \longrightarrow & F
 \end{array}$$

on obtient un relevé  $\psi$  et en appliquant alors la propriété de relèvement au diagramme obtenu en remplaçant  $E \rightarrow F$  par  $\psi$  on obtient un relevé :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow i & \nearrow \phi & \downarrow \wr \\
 & & D \\
 & \nearrow \psi & \downarrow \wr \\
 E & \longrightarrow & F
 \end{array}$$

qui laisse le diagramme complètement commutatif. Ceci prouve que la composée de fibrations acycliques est encore une fibration acyclique. En appliquant la Proposition 2.1.13 on en déduit que fibrations acycliques sont closes. On démontre de même les deux autres cas (cofibrations acycliques et fibrations).

On démontre la stabilité par pushout et pullback exactement de la même façon en “décomposant” des diagrammes de relèvement (voir le corrigé de la feuille de TD 1 où l’on a établi que les fibrations de Hurewicz sont stables par pullback. La preuve utilisée là est rigoureusement la même pour les fibrations générales et se dualise sans peine pour les cofibrations).

Notons que dans la preuve des résultats de stabilité par composition et pushout ou pullback, nous n’avons utilisé *que* les propriétés de relèvement. Ainsi la preuve utilisée démontre le lemme suivant qui est souvent utile pour vérifier qu’une structure est bien de modèle :

**Lemme 2.1.17.** Soit  $\mathfrak{S}$  une sous-classe de morphismes d’une catégorie  $\mathbf{C}$ . On note  $LLP(\mathfrak{S})$  la classe des morphismes de  $\mathbf{C}$  vérifiant la propriété de relèvement à gauche par rapport à tous les morphismes de  $\mathfrak{S}$  et  $RLP(\mathfrak{S})$  la classe des morphismes de  $\mathbf{C}$  vérifiant la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes de  $\mathfrak{S}$ .

- (1) La classe  $LLP(\mathfrak{S})$  est stable par composition et pushouts.
- (2) La classe  $RLP(\mathfrak{S})$  est stable par composition et pullbacks.

Passons au dernier point du corollaire. Il est clair que les isomorphismes admettent les propriétés de relèvement à droite et à gauche (en les inversant pour déterminer les relevés). On déduit encore de la proposition qu’elles sont donc des fibrations, fibrations acycliques, cofibrations et cofibrations acycliques et en particulier également des équivalences faibles.  $\square$

## 2.2. CATÉGORIE HOMOTOPIQUE D’UNE CATÉGORIE DE MODÈLE

Comme on l’a déjà dit au début, la notion de catégorie de modèle sert à définir une notion d’homotopie et à travailler avec. Précisément, on s’intéresse à regarder les objets de  $\mathbf{C}$  à équivalences faibles près. Les notions de fibration et cofibration vont nous aider à étudier les morphismes dans  $\mathbf{C}$  à équivalence près, à donner une bonne notion d’équivalence d’homotopie, à étudier des foncteurs entre théories homotopiques etc...

On commence par la définition de la catégorie homotopique d’une catégorie de modèle (qui devrait rappeler celle de catégorie dérivée associée à un anneau).

Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie et  $\mathcal{W}$  une classe de morphismes dans  $\mathbf{C}$ .

**Définition 2.2.1** (Localisation de Gabriel-Zisman). Une localisation de  $\mathbf{C}$  par rapport à  $\mathcal{W}$  est la donnée d'une catégorie  $\mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$  et d'un foncteur  $\ell : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$  tel que  $\ell$  satisfasse la propriété universelle suivante : pour toute catégorie  $\mathbf{D}$ , le foncteur

$$\ell^* : \text{Fun}(\mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}], \mathbf{D}) \rightarrow \text{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D}) : F \mapsto F \circ \ell$$

est pleinement fidèle et son image essentielle est constituée des foncteurs qui envoient la classe  $\mathcal{W}$  dans les isomorphismes de  $\mathbf{D}$ .

*Remarque 2.2.2.* En particulier, le foncteur  $\ell$  envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes (cela découle en prenant  $\mathbf{D} = \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$  et  $F = Id$ ).

Notons que si  $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  sont deux foncteurs naturellement équivalents, alors pour toute flèche  $f$  dans  $\mathbf{C}$ ,  $F(f)$  est un isomorphisme si et seulement si  $G(f)$  est un isomorphisme d'après le diagramme  $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$ .

$$\begin{array}{ccc} \eta_X \downarrow \cong & & \cong \downarrow \eta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

En particulier, la définition 2.2.1 se traduit par le fait que si un foncteur  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  envoie les flèches de  $\mathcal{W}$  dans des isomorphismes alors il s'écrit sous la forme  $G \circ \ell$  et ceci pour un unique  $G$ .

*Notation 2.2.3 (Catégorie homotopique).* On notera

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{C}) := \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$$

et on appellera cette localisation *la catégorie homotopique de  $\mathbf{C}$* . Lorsque  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  est une catégorie de modèle, cette notation sera évidemment utilisée en prenant pour  $\mathcal{W}$  les équivalences faibles.

On prendra garde que par définition, pour une catégorie de modèle  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ ,  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  ne dépend pas de  $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ .

**Proposition 2.2.4.** Il existe une localisation  $\ell : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$  de  $(\mathbf{C}, \mathcal{W})$  et celle-ci est unique, à équivalence de catégorie près, l'équivalence étant unique à unique isomorphisme près.

La proposition précédente et plus de détails sur cette construction sont donnés dans la feuille de TD 2 et ses solutions.

*Remarque 2.2.5* (multivers). Dans cette proposition garantissant l'existence, il convient de considérer que l'on s'autorise à changer d'univers, c'est à dire que l'on ne suppose plus que les morphismes entre objets forment encore un ensemble, mais appartiennent à un univers plus large. Nous verrons que dans le cas d'une catégorie de modèle, nous avons bien toujours un ensemble de morphismes ; c'est le cas pour de nombreux autres exemples lorsque  $\mathcal{W}$  est par exemple un bon système multiplicatif. Certaines constructions sont détaillées en TDs.

La preuve de la proposition 2.2.4 peut se faire en donnant une description explicite de cette localisation. L'unicité étant elle une conséquence immédiate du fait qu'on a justement une propriété universelle.

Notons  $\text{Path}_{\mathcal{W}}(\mathbf{C})$  la catégorie ayant les mêmes objets et comme morphismes les chemins (finis) dans la catégorie  $\mathbf{C} \amalg \mathcal{W}^{op}$  obtenue à partir de  $\mathbf{C}$  en rajoutant

formellement la classe  $\mathcal{W}^{op}$  aux flèches de  $\mathbf{C}$ . Ici la composition est donnée par la concaténation des chemins, l'identité est le chemin vide  $\bullet_X$ .

**Lemme 2.2.6.** La catégorie  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  a les mêmes objets que  $\mathbf{C}$ . Les morphismes de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Path}_{\mathcal{W}}(\mathbf{C})}(X, Y) / \simeq$$

sont le quotient de  $\mathrm{Path}_{\mathcal{W}}(\mathbf{C})$  par la relation  $\sim$  est engendrée par  $X \xrightarrow{\sigma} Y \xleftarrow{\sigma} X \sim \bullet_X$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{W}$ ,  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \sim X \xrightarrow{g \circ f} Z$  et  $X \xrightarrow{id} X \sim \bullet_X$ .

Cette description explicite permet de vérifier que la catégorie construite est bien solution de la propriété universelle de la définition 2.2.1.

*Exercice 2.2.7.* Démontrer le lemme et la proposition 2.2.4.

*Remarque 2.2.8.* Il suit du lemme que les morphismes de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ , entre 2 objets  $X$  et  $Y$ , sont donnés par des zigzags de la forme

$$X \rightarrow X_1 \leftarrow X_2 \rightarrow X_3 \leftarrow \dots \rightarrow X_n \rightarrow Y,$$

où toutes les flèches allant vers la gauche sont dans  $\mathcal{W}$ . La composition est donnée par la concaténation de zigzags (et la composition des deux flèches de même direction consécutives au milieu). Précisément,  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  est la catégorie dont les morphismes sont des classes de tels zigzags modulo la relation d'équivalence (dont on demande qu'elle soit stable par composition) engendrée par la relation identifiant 2 zigzags s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_1 & \longleftarrow & X_2 & \longrightarrow & X_3 & \longleftarrow & \dots & \longrightarrow & X_n & & \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ X & & & & & & & & & & & & Y \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ & & X'_1 & \longleftarrow & X'_2 & \longrightarrow & X'_3 & \longleftarrow & \dots & \longrightarrow & X'_n & & \end{array}$$

où les flèches verticales sont dans  $\mathcal{W}$  et où on identifie  $\dots X_k \xrightarrow{f} X_{k+1} \xleftarrow{f} X_{k+2} = X_k$  avec l'objet  $X_k$ .

*Remarque 2.2.9.* La construction donnée par le lemme 2.2.6 ne donne pas forcément un ensemble de morphismes entre deux objets (nous avons évoqué ce problème dans la remarque 2.2.5), puisque ce n'est (sauf cas particulier) pas le cas de  $\mathrm{Path}_{\mathcal{W}}(\mathbf{C})$ . On va voir (Théorème 2.2.26) qu'en fait, dans le cas d'une catégorie de modèles, les données supplémentaires de  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{C}$  garantissent que c'est le cas et que l'on peut exprimer ces morphismes sans recourir à des zigzags.

Commençons par comparer les catégories homotopiques de  $\mathbf{C}$  et de ses sous-catégories d'objets (co)fibrants.

*Notation 2.2.10.* On note respectivement  $\mathbf{C}_c$ ,  $\mathbf{C}_f$  et  $\mathbf{C}_{cf}$  les sous-catégories pleines de  $\mathbf{C}$  formées respectivement des objets cofibrants, des objets fibrants, et des objets à la fois fibrants et cofibrants.



*Remarque 2.2.11.* On peut se demander s'il y a beaucoup d'objets à la fois fibrants et cofibrants. On va voir que oui. En effet, soit  $A$  un objet cofibrant. Son remplacement fibrant  $R(A)$  s'insère dans le diagramme

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\sim} R(A) \rightarrow \{*\}$$

d'où il suit que  $R(A)$ , qui est fibrant par définition, est aussi cofibrant (par stabilité de la composition de cofibrations). De même, si  $X$  est fibrant, son remplacement cofibrant  $L(X)$  est à la fois cofibrant et fibrant. Par conséquent, pour tout objet  $X$ ,  $R(L(X))$  et  $L(R(X))$  sont des objets à la fois fibrants et cofibrants.

La naturalité des factorisations dans l'axiome (MC5) nous assure que les remplacements (co)fibrants sont des foncteurs et nous donne plus précisément le lemme suivant (cf remarque 2.1.4).

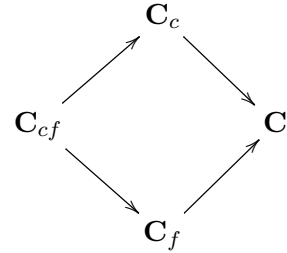
**Lemme 2.2.12.** On a que  $L$  et  $R$  définissent respectivement des foncteurs  $L(-) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_c$ ,  $R(-) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_f$  munis de transformations naturelles.

De plus le foncteurs composé  $\mathbf{C} \xrightarrow{L(-)} \mathbf{C}_c \hookrightarrow \mathbf{C}$  (resp.  $\mathbf{C} \xrightarrow{R(-)} \mathbf{C}_f \hookrightarrow \mathbf{C}$ ) est muni d'une transformations naturelle vers le foncteur identité (resp. admet une transformation naturelle provenant du foncteur identité) dont toutes les flèches sont respectivement des fibrations acycliques (resp. cofibrations acycliques).

Il suit que  $R(L(-))$  et  $L(R(-))$  induisent aussi des foncteurs  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_{cf}$ . Ces deux foncteurs sont en fait reliés par une transformation naturelle dont toutes les flèches sont des équivalences faibles.

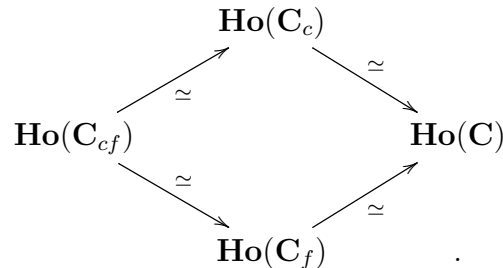
*Exercice 2.2.13.* Démontrer qu'il existe une équivalence faible  $R(L(X)) \rightarrow L(R(X))$  (on pourra commencer par démontrer que les axiomes (MC5), (MC2) induisent une équivalence faible  $R(L(X)) \rightarrow R(X)$  puis utiliser (MC4)).

**Lemme 2.2.14.** Les inclusions canoniques



induisent des équi-

valences de catégories en passant aux catégories homotopiques :



*Démonstration.* Démontrons le cas du foncteur  $I : \mathbf{C}_f \rightarrow \mathbf{C}$  donné par la sous-catégorie des objets fibrants. Puisque une équivalence faible entre objets fibrants est une équivalence faible, la composée  $\mathbf{C}_f \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes et par propriété universelle de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_f)$  ce foncteur se factorise au travers d'un foncteur  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_f) \xrightarrow{\tilde{I}} \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ . Pour montrer que ce foncteur

est une équivalence, on construit son “inverse” (voir l’appendice 6.2). Pour cela il suffit de prendre le foncteur de remplacement fibrant  $R : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_f$ ,  $X \mapsto R(X)$  donné par (MC5). La propriété (MC2) assure que  $R$  envoie une équivalence faible sur une équivalence faible et passe donc encore à la catégorie homotopique pour donner  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \xrightarrow{\tilde{R}} \mathbf{Ho}(\mathbf{C}_f)$ . Il ne nous reste plus qu’à montrer qu’il y a des équivalences naturelles entre les foncteurs  $\tilde{R} \circ \tilde{I}$  (resp.  $\tilde{I} \circ \tilde{C}$ ) et les foncteurs identité de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_f)$  (resp.  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ ).

On a vu (c’est le lemme 2.2.12) que les applications canoniques  $X \xrightarrow{\sim} R(X)$  données par (MC5) définissent une transformation naturelle entre les foncteurs  $Id_{\mathbf{C}}$  et  $I \circ R$  qui passe aux catégories homotopiques pour donner un isomorphisme naturel<sup>30</sup> entre  $Id_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}$  et  $\tilde{I} \circ \tilde{R}$  (puisque  $X \xrightarrow{\sim} R(X)$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ ). On construit de même un isomorphisme naturel entre  $Id_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_f)}$  et  $\tilde{R} \circ \tilde{I}$ .  $\square$

On va introduire une notion générale d’homotopie pour une catégorie de modèle. On dispose déjà d’une notion d’équivalence faible (comme relation engendrée par les flèches de  $\mathcal{W}$ ), qui imite et généralise celle dans les espaces topologiques. On aura besoin de plusieurs notions différentes, adaptées au type d’objet à la source et au but. On va utiliser les notions usuelles de coproduit<sup>31</sup>  $A \coprod B$  (dans le cas  $A = B$ ) et de produit<sup>32</sup>  $X \times Y$  (cf Appendice 6.2).

**Définition 2.2.15 (Relations d’homotopie dans les catégories de modèle).** Soit une catégorie de modèle  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ .

**-Un cylindre d’un objet  $X$ :** c’est une factorisation

$$id_X \coprod id_X : X \coprod X \rightarrow C \xrightarrow{\sim} X$$

de l’application canonique au travers d’une cofibration et d’une équivalence faible. On notera  $i_0, i_1 : X \xrightarrow{\tilde{i}_j} X \coprod X \rightarrow C$  les inclusions canoniques respectives sur les composantes suivie de la flèche vers  $C$ .

**-Un objet en chemins de  $Y$ :** c’est une factorisation

$$id_Y \times id_Y : Y \xrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow Y \times Y$$

de l’application diagonale. On notera  $proj_0, proj_1 : P \twoheadrightarrow Y \times Y \xrightarrow{p_i} Y$  les flèches induites par les projections canoniques sur chaque facteur.

**-Une homotopie à gauche entre  $f, g : X \rightarrow Y$ :** c’est une flèche  $H : C_X \rightarrow Y$ , où  $C_X$  est un cylindre de  $X$ , telle que  $H \circ i_0 = f$  et  $H \circ i_1 = g$ . On notera  $f \stackrel{l}{\sim} g$ .

**-Une homotopie à droite entre  $f, g : X \rightarrow Y$ :** c’est une flèche  $K : X \rightarrow P_Y$ , où  $P_Y$  est un objet en chemin de  $Y$ , telle que  $proj_0 \circ K = f$ ,  $proj_1 \circ K = g$ . On notera  $f \stackrel{r}{\sim} g$ .

**-Une homotopie entre  $f$  et  $g$ :** c’est la donnée d’une homotopie à droite et d’une homotopie à gauche entre  $f$  et  $g$ . On notera  $f \simeq g$  lorsque  $f$  et  $g$  sont homotopes.

30. on pourrait, et devrait, dire que ces applications définissent une équivalence faible naturelle entre les foncteurs aux niveaux des catégories de modèles

31. on rappelle que le coproduit vient avec deux applications canoniques  $\tilde{i}_A : A \rightarrow A \coprod B$  et  $\tilde{i}_B : B \rightarrow A \coprod B$  que nous appelons abusivement “inclusions canoniques”

32. on rappelle que le produit vient avec deux applications canoniques  $p_X : X \times Y \rightarrow X$  et  $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$  que nous appelons abusivement “projections canoniques”

**-Équivalence d'homotopie:** on dira que  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie si il existe  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ g \simeq id_Y$  et  $g \circ f \simeq id_X$ . Auquel cas on dira aussi que  $X$  et  $Y$  sont homotopes.

*Remarque 2.2.16.* L'axiome de factorisation garantit bien entendu qu'il existe des cylindres (resp. des objets en chemin) pour tout objet  $X$  et qu'on peut de plus les choisir de telle sorte que l'équivalence faible soit de plus une fibration (resp. une cofibration). On appellera un tel cylindre (resp. objet en chemin) **fort**

Mais attention, pour définir les homotopies, on considère de tels objets arbitraires, et en général, on *ne peut pas imposer un choix*; autrement dit il peut exister une homotopie entre  $f, g : X \rightarrow Y$  associée à un cylindre de  $X$  (ou objet en chemins)  $C$  sans qu'il n'y ait une telle homotopie pour un autre choix de cylindre  $C'$  de  $X$ .

On pourra remarquer que si on note<sup>33</sup>  $X \times I$  la factorisation fonctorielle  $X \amalg X \rightarrow X \times I \xrightarrow{\sim} X$  de  $id_X \amalg id_X$ , alors, par (MC4), il existe, pour tout cylindre  $C$  de  $X$ , une équivalence faible  $C \xrightarrow{\sim} X \times I$  rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{\quad} & X \times I \\ \downarrow & \nearrow \sim & \downarrow \sim \\ C & \xrightarrow{\sim} & X \end{array}$$

En particulier une homotopie pour  $X \times I$  en induit une pour  $C$ . En revanche, il n'y a en général *pas* d'équivalence dans l'autre sens, d'où la nécessité d'autoriser des objets en cylindre généraux dans la définition d'homotopie. Lorsque cependant tous les objets de  $\mathbf{C}$  sont fibrants, on peut toujours se ramener à des homotopies données par  $X \times I$  ou tout autre *cylindre fort*<sup>34</sup>, voir l'exercice 2.2.30.

On a évidemment un résultat dual pour les objets en chemin.

*Remarque 2.2.17.* Puisque la composée  $X \xrightarrow{\tilde{i}_0} X \amalg X \rightarrow C \xrightarrow{\sim} X$  est l'identité, qui est une équivalence faible, l'axiome (MC2) nous assure alors que la composée  $X \xrightarrow{i_0} X \amalg X \rightarrow C$  est une équivalence faible. Un argument similaire s'applique aux objets en chemins et on obtient ainsi le lemme suivant.

*Lemme 2.2.18.* Pour tout cylindre  $C$  et tout objet en chemin  $P$  de  $X$ , on a que les applications

$$i_j : X \xrightarrow{\tilde{i}_j} X \amalg X \rightarrow C, \quad proj_j : P \rightarrow X \times X \xrightarrow{p_j} X$$

sont des équivalences faibles (pour  $j = 0, 1$ ).

*Exemple 2.2.19.* On peut constater que si  $X$  est un espace topologique, le cylindre  $X \times I$  (muni des inclusions  $id \times \{i\}$ ,  $i = 0, 1$ ) est bien un objet en cylindre essentiellement en vertu de l'exemple 1.8.6 (il s'agit du cylindre de l'identité de  $X$ ) et que de même, l'espace des chemins  $X^I$  (muni des évaluations en 0 et 1) est un objet en chemin de  $X$ , en vertu de l'exemple fondamental des fibrations associé à l'identité de  $X$ .

<sup>33</sup>.  $X \times I$  est une notation pour un objet qui n'a en général pas de raison d'être le produit de  $X$  avec un autre objet  $I$ . Ce choix de notation provient de l'analogie avec un cylindre évidemment due au cas des espaces topologiques

<sup>34</sup>. c'est à dire tel que  $C \rightarrow X$  soit une fibration acyclique et pas seulement une équivalence faible

Ce sont même respectivement un *cylindre fort* et un *objet en chemin fort* et on retrouve que la notion d'homotopie usuelle  $X \times [0, 1] \rightarrow Y$  suffit pour définir l'homotopie à gauche. De même l'homotopie à droite est complètement déterminé par des applications continues  $X \rightarrow Y^{[0,1]}$  et les 2 notions sont adjointes l'une de l'autre via l'adjonction entre  $- \times [0, 1]$  et l'espace des chemins.

La proposition suivante explique comment ces notions d'homotopie interagissent efficacement avec les objets (co)fibrants. On pourra en retenir que ces notions se comportent agréablement (et s'identifient) si la source est cofibrante et le but fibrant.

**Proposition 2.2.20.** a) On a que  $f \stackrel{l}{\sim} g$  implique  $h \circ f \stackrel{l}{\sim} h \circ g$ , autrement dit l'homotopie à gauche est stable par composition à gauche (soit post-composition).

b) Si  $A$  est cofibrant alors la relation d'homotopie à gauche  $\stackrel{l}{\sim}$  est une relation d'équivalence sur  $\text{Hom}(A, X)$ . Si de plus  $h : X \xrightarrow{\sim} Y$  ou si  $X, Y$  sont fibrants et  $h : X \xrightarrow{\sim} Y$ , alors la post-composition  $h_*(f) = h \circ f$  induit une bijection

$$h_* : \text{Hom}(A, X)/\stackrel{l}{\sim} \cong \text{Hom}(A, Y)/\stackrel{l}{\sim}$$

sur le quotient.

c) Si  $Y$  est fibrant et  $f, g : X \rightarrow Y$ , alors  $f \stackrel{l}{\sim} g$  implique  $f \circ h \stackrel{l}{\sim} g \circ h$  (pour tout  $W \xrightarrow{h} X$ ). Autrement dit, l'homotopie à gauche est stable par composition à droite (soit précomposition) si le but des flèches est fibrant.

d) On a que  $f \stackrel{r}{\sim} g$  implique  $f \circ h \stackrel{r}{\sim} g \circ h$ , autrement dit l'homotopie à droite est stable par composition à droite.

e) Si  $Y$  est fibrant alors la relation d'homotopie à droite  $\stackrel{r}{\sim}$  est une relation d'équivalence sur  $\text{Hom}(B, Y)$ . Si de plus  $h : A \xrightarrow{\sim} B$  ou si  $A, B$  sont cofibrants et  $h : A \xrightarrow{\sim} B$ , alors la précomposition  $h^*(f) = f \circ h$  induit une bijection

$$h^* : \text{Hom}(B, Y)/\stackrel{r}{\sim} \cong \text{Hom}(A, Y)/\stackrel{r}{\sim}$$

sur le quotient.

f) Si  $A$  est cofibrant et  $f, g : A \rightarrow Y$ , alors  $f \stackrel{r}{\sim} g$  implique  $h \circ f \stackrel{r}{\sim} h \circ g$  (pour tout  $Y \xrightarrow{h} Z$ ). Autrement dit, l'homotopie à droite est stable par composition à gauche si la source des flèches est cofibrante.

On peut ne retenir que les 3 premiers résultats. Les 3 suivants en sont les “duals”. Un point clé de la preuve sera le suivant qui sert souvent :

**Lemme 2.2.21.** Soit  $A$  un objet cofibrant et  $Y$  un objet fibrant.

- (1) pour tout  $X$ , on a que l'application canonique  $X \rightarrow X \coprod A$  est une cofibration. De même, l'application canonique  $X \times Y \rightarrow X$  est une fibration.
- (2) Soit  $C_A$  un cylindre de  $A$ . Les deux applications canoniques  $i_j : A \rightarrow A \coprod A \rightarrow C_A$  sont des *cofibrations acycliques*. De même si  $P_Y$  est un objet en chemin de  $Y$ , les deux applications canoniques  $proj_j : P_Y \rightarrow Y \times Y \rightarrow Y$  sont des *fibrations acycliques*.

*Démonstration.* Pour les cofibrations cela provient du diagramme

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow id \\ A & \longrightarrow & A \amalg X \end{array}$$

et de la stabilité des cofibrations par poussé-en-avant. L'argument dual s'applique pour les fibrations.

Pour le point (2), le lemme 2.2.18 assure déjà que les applications sont des équivalences faibles. Par ailleurs le premier point assure lui que  $\tilde{i}_j : A \rightarrow A \amalg A$  est une cofibration et que  $p_j : Y \times Y \rightarrow Y$  une fibration. Donc par stabilité des (co)fibrations par composition, les applications en question sont bien des (co)fibrations acycliques.  $\square$

*Démonstration de la proposition 2.2.20. - a et d)* C'est immédiat : soit  $H : C_X \rightarrow Y$  une "homotopie à gauche" entre  $f, g : X \rightarrow Y$  et  $h : Y \rightarrow Z$ . Alors la composée  $h \circ H : C_X \rightarrow Z$  vérifie bien que  $h \circ H \circ i_0 = h \circ f$  et  $h \circ H \circ i_1 = h \circ g$ . Ainsi  $h \circ H$  est une "homotopie à gauche" entre  $h \circ f$  et  $h \circ g$ . Le même raisonnement s'applique pour les homotopies à droite et la pré-composition.

- **b et e)** On commence par remarquer que  $f \stackrel{l}{\sim} g \Rightarrow g \stackrel{l}{\sim} f$  ce qui est immédiat en remarquant que si on a un cylindre  $A \amalg A \hookrightarrow C_A$  alors on a aussi un cylindre  $A \amalg A \cong A \amalg A \hookrightarrow C_A$  où l'isomorphisme du milieu est obtenu en échangeant les deux composantes<sup>35</sup>. On a alors que si  $H : C_A \rightarrow X$  était l'homotopie à gauche entre  $f$  et  $g$ , alors  $H$  est aussi une homotopie à gauche entre  $f$  et  $g$  via l'objet en cylindre  $A \amalg A \cong A \amalg A \hookrightarrow C_A$  (la seule différence étant justement qu'on a inversé  $i_0$  et  $i_1$ ). Par ailleurs, si on remarque que la composée  $C_A \rightarrow A \xrightarrow{f} X$  définit une homotopie à gauche entre  $f$  et  $f$ , donc  $f \stackrel{l}{\sim} f$ . On note que les deux points précédents sont vrai même si  $A$  n'est pas cofibrant.

Pour la transitivité, en revanche, on va utiliser que  $A$  est cofibrant et en particulier le point (2) du Lemme 2.2.21 précédent. Si  $f \stackrel{l}{\sim} g$  et  $g \stackrel{l}{\sim} h$ , on dispose de deux cylindres  $C_A$  et  $C'_A$  de  $A$  et de morphismes  $H : C_A \rightarrow X$  et  $H' : C'_A \rightarrow X$  réalisant ces homotopies à gauche. On veut construire un autre cylindre et un morphisme réalisant l'homotopie à gauche entre  $f$  et  $h$ . L'idée, comme dans les espaces topologiques, est de coller les cylindres le long d'une face (faire un dessin !) pour les construire. Dans le cadre général, on regarde donc le pushout  $C_A \cup_A C'_A$  donné par le carré cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[i_0']{\sim} & C'_A \\ \downarrow i_1 \sim & & \downarrow \\ C_A & \longrightarrow & C_A \cup_A C'_A \end{array}$$

Par stabilité des cofibrations acycliques par pushout, on note que les morphismes  $C'_A \rightarrow C_A \cup_A C'_A$  et  $C_A \rightarrow C_A \cup_A C'_A$  dans le diagramme sont des cofibrations acycliques.

Par ailleurs, les applications  $A \xrightarrow{i_0} A \amalg A \hookrightarrow C_A \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A$  et  $A \xrightarrow{i_1'} A \amalg A \hookrightarrow C'_A \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A$  donnent un morphisme canonique

$$A \amalg A \rightarrow C_A \cup_A C'_A.$$

35. c'est à dire en échangeant  $i_0$  et  $i_1$

Les équivalences faibles  $C_A \xrightarrow{\sim} A$  et  $C'_A \xrightarrow{\sim} A$  induisent, par propriété universelle du pushout, un morphisme  $C_A \cup_A C'_A \rightarrow A$ . Ce morphisme est une équivalence faible : en effet la composée  $C_A \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A \rightarrow A$  en est une par définition d'un cylindre et le résultat suit alors de la propriété 2 parmi 3 (MC2). On a par ailleurs que les composées  $A \xrightarrow{i_0} C_A \rightarrow C_A \cup_A C'_A \rightarrow A$  et  $A \xrightarrow{i'_1} C'_A \rightarrow C_A \cup_A C'_A \rightarrow A$  sont l'identité de  $A$  puisque c'est le cas de  $A \xrightarrow{i_0} C_A \rightarrow A$  et  $A \xrightarrow{i'_1} C'_A \rightarrow A$  (et puisque nécessairement  $id \cup_A id = id$  par unicité dans la propriété universelle du pushout). Enfin, les applications  $H : C_A \rightarrow X$  et  $H' : C'_A \rightarrow X$  induisent une application  $\tilde{H} = H \cup_A H' : C_A \cup_A C'_A \rightarrow X$  car  $H \circ i_1 = g = H' \circ i'_0$ . On a alors que la composée  $A \xrightarrow{i_0} C_A \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A \xrightarrow{\tilde{H}} X$  vaut  $H \circ i_0 = f$  (par définition du pushout) et de même  $\tilde{H} \circ i'_1 = H \circ i'_1 = h$ . Ainsi, pour conclure que  $\tilde{H}$  est une homotopie à gauche entre  $f$  et  $h$ , il suffirait de vérifier que  $i_0 \amalg i'_1 : A \amalg A \rightarrow C_A \cup_A C'_A$  est un cylindre de  $A$ , et plus précisément que c'est une cofibration (le reste à déjà été montré). Ce n'est pas évident ni nécessairement vrai mais heureusement pas non plus nécessaire car il nous suffit en fait de factoriser cette construction sous la forme  $A \amalg A \rightarrow D \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A$ . Alors la composée  $D \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A \xrightarrow{\sim} A$  est une équivalence faible et on a déjà obtenu que les précompositions de cette application avec  $i_0$  et  $i'_1$  sont des identités. Ainsi  $D$  est un cylindre de  $A$  et la composée  $D \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A \xrightarrow{\tilde{H}} X$  est bien une homotopie à gauche entre  $f$  et  $h$  !

Démontrons le deuxième point de **b)**. Par le **a)**, on a que pour tout morphisme  $h : X \rightarrow Y$ , l'application  $f \mapsto h \circ f$  passe au quotient par la relation d'équivalence  $\sim^l$ . Ainsi  $h_* : \text{Hom}(A, X) / \sim^l \cong \text{Hom}(A, Y) / \sim^l$  est bien définie. Vérifions la bijectivité dans le cas où  $h : X \rightarrow Y$  est une fibration acyclique. Commençons par l'injectivité : soit  $f, g : A \rightarrow X$  tels que  $h \circ f \sim^l h \circ g$  et  $H : C_A \rightarrow Y$  réalisant cette homotopie. On voudrait relever cette homotopie à  $X$  et on utilise donc l'axiome de relèvement (MC4) appliqué au diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f \amalg g} & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow h \\ C_A & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

ce qui nous fournit immédiatement une homotopie à gauche entre  $f$  et  $g$ . Il reste à voir la surjectivité. Celle-ci est assez facile : en effet, pour tout morphisme  $q : X \rightarrow Y$ , il suffit d'appliquer, par cofibrance de  $A$ , l'axiome de relèvement dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

pour trouver un antécédent par  $h_*$ .

Le cas où  $X, Y$  sont fibrants et  $f : X \xrightarrow{\sim} Y$  se déduit du précédent par le lemme de Brown 2.5.8 appliqué au foncteur  $\text{Hom}(A, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  où  $\mathbf{Set}$  est la catégorie de modèle des ensembles (munie des isomorphismes comme équivalence faibles comme dans l'exercice 2.1.12). Ceci termine la preuve de **b)** et la proposition **e)** se démontre dualement.

**- c et f)** Soit  $h : W \rightarrow X$  et  $f, g : X \rightarrow Y$  tels que  $f \sim^l g$ . Prenons donc  $H : C_X \rightarrow Y$  une homotopie à gauche entre  $f$  et  $g$ . Il faut remonter cette homotopie

à un objet en cylindre de  $W$ . Prenons en un  $W \amalg W \rightarrowtail C_W \xrightarrow{\sim} W$  (on en choisit un quelconque). On veut évidemment utiliser l'axiome de relèvement pour construire l'homotopie. Pour cela, on se ramène d'abord au cas où le morphisme  $C_X \xrightarrow{\sim} X$  dans la définition du cylindre est une fibration acyclique. C'est là qu'on va utiliser que  $Y$  est fibrant : en effet on factorise l'équivalence faible  $C_X \xrightarrow{\sim} X$  sous la forme  $C_X \xrightarrow{\sim} C'_X \xrightarrow{\sim} X$  par (MC5) ((MC2) garantissant que chaque flèche est une équivalence faible). Alors le relèvement dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_X & \xrightarrow{H} & Y \\ \downarrow \wr & \nearrow H' & \downarrow \\ C'_X & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

fournit une homotopie  $C'_X \rightarrow Y$  pour l'objet en cylindre  $C'_X$  de  $X$ .

Maintenant qu'on s'est ramené à un objet en cylindre  $X \amalg X \rightarrowtail C'_X \xrightarrow{\sim} X$  dont la dernière flèche est une fibration acyclique, on applique l'axiome (MC4) au carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} W \amalg W & \xrightarrow{i' \circ (h \amalg h)} & C'_X \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow \wr \\ C_W & \xrightarrow{h \circ p} & X \end{array}$$

où  $p : C_W \rightarrow W$  et  $i : X \amalg X \rightarrow C'_X$  sont les applications données par la structure des cylindres. Finalement, la composée  $H' \circ \tilde{H}$  fournit l'homotopie voulue. Ceci termine la preuve de c). Celle de f) est duale comme d'habitude.  $\square$

La proposition implique que si on se restreint à des objets cofibrants à la source et fibrants au but, les relations d'homotopie se comportent agréablement comme nous l'avons souligné. On obtient d'ailleurs le

**Corollaire 2.2.22.** a) Si  $A$  est cofibrant et  $Y$  fibrant, alors  $\stackrel{l}{\sim} = \stackrel{r}{\sim} = \simeq$  sur  $\text{Hom}(A, Y)$ .  
b) La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur la sous-catégorie  $\mathbf{C}_{cf}$  des objets à la fois cofibrants et fibrants.

*Démonstration.* On suppose que  $f \stackrel{l}{\sim} g$ ; montrons que  $f \stackrel{r}{\sim} g$ . On a donc une homotopie à gauche  $C_A \xrightarrow{H} Y$  où  $C_A$  est un objet en cylindre de  $A$ . On veut trouver un objet en chemin  $Y \xrightarrow{\sim} P_Y \rightarrowtail Y \times Y$  et  $K : A \rightarrow P_Y$  une homotopie à droite. Fixons un tel objet en chemins quelconque pour  $Y$ . Par le lemme 2.2.21 précédent, on a que l'application canonique  $i_0 : A \rightarrowtail A \amalg A \rightarrowtail C_A$  est une cofibration *acyclique*. On note  $j$  la composition  $j : C_A \rightarrow A \xrightarrow{f} Y$  et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & P_Y \\ \downarrow i_0 \wr & & & \nearrow \tilde{K} & \downarrow \\ C_A & \xrightarrow{(j, H)} & Y \times Y & & \end{array}$$

(car  $H \circ i_0 = f = j \circ i_0$ ) qui fournit le relèvement  $\tilde{K}$ . On note alors  $K : A \rightarrow P_Y$  la composée  $\tilde{K} \circ i_1$  (attention on prend  $i_1$  et pas  $i_0$  contrairement au diagramme). Par

commutativité du diagramme, on a  $proj_0 \circ K = j \circ i_1 = f \circ id_A = f$  et  $proj_1 \circ K = H \circ i_1 = g$ . Ainsi, on a bien que  $K$  est une homotopie à droite. On peut remarquer que l'on a utilisé le caractère cofibrant de  $A$ , et que par ailleurs ceci nous a permis de prendre un objet en chemin quelconque. Pour démontrer qu'une homotopie à droite est une homotopie à gauche, on fait une preuve duale en utilisant cette fois-ci que  $Y$  est fibrant et en prenant un cylindre quelconque de  $A$ . Ceci termine la preuve de a).

Par le a) et la proposition 2.2.20.b) et d), on obtient l'énoncé b).  $\square$

*Exercice 2.2.23.* Soit  $q : P \xrightarrow{\sim} X$  une résolution cofibrante de  $X$  et  $f : P \rightarrow P$  un morphisme tel que le triangle suivant  $P \xrightarrow{f} P$  soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & P \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

- (1) Rappeler pourquoi  $f$  est une équivalence faible, puis démontrer que  $f$  est homotopie à gauche à l'identité. (indic : considérer, pour un cylindre  $P \amalg P \rightarrow C \xrightarrow{i} P$  de  $P$ , le diagramme  $P \amalg P \xrightarrow{f \amalg id} P$ ).

$$\begin{array}{ccc} P \amalg P & \xrightarrow{f \amalg id} & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{q \circ i} & X \end{array}$$

- (2) En déduire que deux résolutions cofibrantes d'un même objet sont homotopes à gauche en général, et homotopes plus généralement si  $X$  est fibrant.  
 (3) Quel résultats analogues peut on énoncer pour les résolutions fibrantes ?

Une autre corollaire est le suivant :

**Théorème 2.2.24** (*Théorème de Whitehead pour les catégories de modèle*). Si  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche dans  $\mathbf{C}_{cf}$ , c'est une équivalence faible si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie.

On notera que ce résultat implique en particulier le théorème de Whitehead 1.3.9 classique en prenant la structure de modèle de Quillen sur **Top** (Exemple 2.1.15) (en notant que tout objet est fibrant et que tout CW-complexe est cofibrant).

*Démonstration.* voir la feuille de TD 2.  $\square$

Un autre exemple de ce Théorème est dans la catégorie de modèle des complexes de chaînes  $C_{\geq 0}(R)$ . Il implique alors que 2 résolutions projectives d'un module (ou d'un complexe de chaînes) sont homotopes (au sens des chaînes).

*Exercice 2.2.25.* Le montrer (après avoir lu la partie sur les structures de modèles sur les complexe de chaînes)...

On obtient le théorème principal de cette section :

**Théorème 2.2.26.** Soit  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  une catégorie de modèle.

- a) L'inclusion  $\mathbf{C}_{cf} \hookrightarrow \mathbf{C}$  induit une équivalence de catégories

$$\mathbf{C}_{cf}/\simeq \xrightarrow{\cong} \mathbf{Ho}(\mathbf{C}_{cf}) \cong \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$$

où  $\mathbf{C}_{cf}/\simeq$  est la catégorie  $\mathbf{C}_{cf}$  où l'on a quotienté les ensembles de morphismes par la relation d'équivalence donnée par la relation d'homotopie.

- b) On a des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(X), R(Y))/\simeq$$



- c) Si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme qui devient un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ , alors  $f$  est une équivalence faible.

*Remarque 2.2.27.* Le théorème identifie la catégorie homotopique avec un quotient de la catégorie  $\mathbf{C}_{cf}$ . En particulier, c'est une catégorie sans avoir besoin de changer d'univers et a les mêmes "cardinalités ensemblistes" que  $\mathbf{C}$ . Par ailleurs, le point b) assure que pour calculer les morphismes dans la catégorie homotopique il suffit de calculer ceux entre un remplacement cofibrant et un remplacement fibrant de la source et du but respectivement ; il permet donc de calculer les morphismes de la catégorie dérivée en se ramenant à un ensemble de morphismes entre objets fixés (et ainsi d'éviter le passage aux zigzags).

Evidemment, si l'objet source est déjà cofibrant et le but fibrant, on n'a pas besoin de faire ce remplacement d'après le a). Notons d'ailleurs que si  $A$  est cofibrant et  $Y$  est fibrant, on a des équivalences faibles  $L(A) \xrightarrow{\sim} A$  entre objets cofibrants et  $Y \xrightarrow{\sim} R(Y)$  entre objets fibrants. Il découle alors de la proposition 2.2.20.b) et e.) et du corollaire 2.2.22.a) que l'on a des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(A, Y) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(A), R(Y)) / \simeq \xleftarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, R(Y)) / \simeq \\ &\xleftarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, Y) / \simeq . \end{aligned}$$

Une preuve similaire permet de démontrer le résultat suivant simplifiant le calcul des morphismes.

**Corollaire 2.2.28.** Soit  $A \xrightarrow{\sim} X$  une équivalence faible avec  $A$  cofibrant et  $Y \xrightarrow{\sim} Z$  une équivalence faible avec  $Z$  fibrant. Alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(A, Z).$$

*Preuve du corollaire.* Par fonctorialité, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L(A) & \xrightarrow{\ell} & L(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\sim} & X \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des équivalences faibles. Ainsi la propriété 3 pour 2 nous donne que  $\ell$  est une équivalence faible aussi, entre objets cofibrants. D'où en appliquant la proposition 2.2.20, on obtient un zigzag de bijections

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(L(X), Z) \xrightarrow[\ell^*]{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(L(A), Z) \xleftarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(A, Z).$$

En raisonnant symétriquement sur  $Z$ , on le complète en un zigzag de bijections reliant  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(L(X), R(Y))$  avec  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(A, Z)$ .  $\square$

*Exemple 2.2.29.* Un cas particulier de l'équivalence ci-dessus est si  $A \xrightarrow{\sim} X$  est une résolution cofibrante et  $Y \xrightarrow{\sim} Z$  une résolution fibrant de  $Y$ . Dans ce cas, (cf Exemple 2.1.11) on a des équivalences faibles  $\alpha : L(X) \rightarrow A$  et  $\beta : Z \rightarrow R(Y)$  de sorte que l'on a une bijection

$$\alpha^* \circ \beta_* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(A, Z) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, Z) / \simeq \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(L(X), R(Y)).$$

Il est temps de passer à la preuve du théorème fondamental sur la catégorie homotopique.

*Démonstration du théorème 2.2.26.* On a déjà vu que  $\mathbf{Ho}(C_{cf}) \cong \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  (Lemme 2.2.14).

Il reste à montrer que le foncteur  $\mathbf{C}_{cf} \rightarrow \mathbf{C}_{cf}/\simeq$  vérifie la propriété universelle de la localisation  $\mathbf{C}_{cf} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{C}_{cf}) = \mathbf{C}_{cf}[\mathcal{W}^{-1}]$ . Soit  $\mathbf{D}$  une catégorie et  $F : \mathbf{C}_{cf} \rightarrow \mathbf{D}$  un foncteur qui envoie les équivalences faibles sur les isomorphismes. On veut montrer qu'il existe un unique foncteur  $\tilde{F}$  rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}_{cf} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ & \searrow & \nearrow \tilde{F} \\ & \mathbf{C}_{cf}/\simeq & \end{array}$$

commutatif. Par définition, sur les objets, on doit avoir  $\tilde{F}(X) = F(X)$  et sur les morphismes on doit avoir que  $\tilde{F}([f]) = F(f)$  où  $[f]$  désigne la classe d'équivalence d'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$ . Le foncteur quotient  $\mathbf{C}_{cf} \rightarrow \mathbf{C}_{cf}/\simeq$  étant plein, on en déduit déjà l'unicité. Il reste à voir que  $\tilde{F}$  est bien défini, c'est à dire que si  $f \simeq g$  alors  $F(f) = F(g)$ . L'idée (qui revient souvent) est de montrer que pour tout cylindre  $F(i_0) = F(i_1)$  et d'en déduire que deux applications homotopes à gauche ont donc même image par  $f$ .

Pour faire cela concrètement, on considère une homotopie  $H : C_X \rightarrow Y$  à gauche entre  $f$  et  $g$  où  $X \amalg X \rightarrow C_X \xrightarrow[p]{\sim} X$  est un cylindre de  $X$ . Pour pouvoir appliquer  $F$  à ce diagramme on se ramène au cas où  $C_X \in \mathbf{C}_{cf}$  par un procédé déjà vu. Comme  $X$  est cofibrant,  $C_X$  aussi (car  $X \rightarrow X \amalg X$  est une cofibration également). On factorise  $C_X \rightarrow X$  sous la forme  $C_X \xrightarrow{\sim} C'_X \twoheadrightarrow X$ . Comme  $X$  est aussi fibrant, on obtient que  $C'_X$  aussi et il reste cofibrant par construction. Par ailleurs, le relèvement  $H'$  dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_X & \xrightarrow{H} & Y \\ \downarrow \wr & \nearrow H' & \downarrow \\ C'_X & \rightarrow & \{*\} \end{array}$$

ramené au cas où  $C_X$  est fibrant et cofibrant et on peut appliquer  $F$  à  $p$ . Comme  $p \circ i_0 = p \circ i_1$ , on a  $F(p) \circ F(i_0) = F(p) \circ F(i_1)$ . Or  $F(p)$  est un isomorphisme de  $\mathbf{D}$  puisque  $p$  est une équivalence faible. Il suit que  $F(i_0) = F(i_1)$ . Mais maintenant nous avons aussi  $H \circ i_0 = f$  et  $H \circ i_1 = g$  d'où,

$$F(f) = F(H) \circ F(i_0) = F(H) \circ F(i_1) = F(g)$$

ce qui conclut la preuve de a).

Pour b), on rappelle de la preuve du Lemme 2.2.14 que l'équivalence réciproque de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_{cf}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  est donnée par le foncteur induit par  $L \circ R : X \mapsto L(R(X))$  où  $L$  et  $R$  sont les foncteurs de remplacement cofibrants et fibrants. D'où  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(R(X)), L(R(Y)))/\simeq$  par le a). On a deux flèches naturelles  $\alpha_Y : L(Y) \xrightarrow{\sim} Y$  et  $\beta_Z : Z \xrightarrow{\sim} R(Z)$  pour tous objets. Rappelons que par le Corollaire 2.2.22, on a que  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, Y)/\simeq = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, Y)/\stackrel{l}{\sim} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, Y)/\stackrel{r}{\sim}$  dès que  $A$  est cofibrant et  $Y$  fibrant. On déduit alors une application

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(X), R(Y))/\simeq & \xleftarrow{L(\beta_X)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(R(X)), R(Y))/\simeq \\ & \xleftarrow{\alpha_{R(Y)}^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(R(X)), L(R(Y)))/\simeq \end{aligned}$$

qui est une bijection car chaque application l'est en vertu de la proposition 2.2.20.b) et e). Ceci prouve b).

Il reste à démontrer c). Par définition une équivalence faible devient un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ . Réciproquement, supposons que  $[A \xrightarrow{f} B] \in \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  soit un isomorphisme. En prenant les remplacements fibrants et cofibrants on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L(R(A)) & \xrightarrow{L(R(f))} & L(R(B)) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

trier que  $L(R(f))$  est une équivalence faible (par l'axiome (MC2)). Sachant qu'une équivalence faible devient un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ , on a que  $[L(R(f))]$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  et on est ramené au cas d'un morphisme  $f$  entre objets fibrant et cofibrant. Par le a) que nous avons déjà montré, on en déduit qu'il existe  $g$  tel que les composées  $f \circ g$  et  $g \circ f$  soient homotopes à l'identité. Autrement dit,  $f$  est une équivalence d'homotopie et le Théorème 2.2.24 nous dit que ce morphisme est une équivalence faible.  $\square$

*Exercice 2.2.30.* Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle dans laquelle *tous les objets sont fibrants*. Pour tout objet  $X$ , on fixe  $X \amalg X \hookrightarrow X \times I \xrightarrow{\sim} X$  un objet en cylindre de  $X$  déduit de l'axiome (MC5) appliqué à  $id \amalg id : X \amalg X \rightarrow X$ .

- (1) Montrer que dans la définition d'homotopie à gauche on peut toujours supposer que le cylindre est donné par  $X \times I$ . C'est à dire que si  $f \stackrel{l}{\sim} g$  (avec  $f, g : X \rightarrow Y$ ), alors il existe un morphisme  $H : X \times I \rightarrow Y$  tel que  $H \circ i_0 = f$  et  $H \circ i_1 = g$ .
- (2) On munit  $\mathbf{Top}$  de la structure de modèle de Quillen (exemple 2.1.15). Démontrer que deux applications continues (de source un espace cofibrant) sont homotopes à gauche si et seulement si elles sont homotopes au sens usuel (définition 1.1.1).
- (3) On note  $[X, Y]$  l'ensemble des classes d'homotopie (pour la définition 1.1.1 usuelle) d'applications continues  $X \rightarrow Y$  dans  $\mathbf{Top}$ . Démontrer que si  $X$  est un CW-complexe, alors

$$[X, Y] \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})}(X, Y).$$

En déduire que pour tout  $x \in X$ , on a  $\pi_n(X, x) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})}(S^n, X)_x$  où ce dernier est l'ensemble des morphismes de  $S^n \rightarrow X$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$  dont la restriction  $* \rightarrow S^n \rightarrow X$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$  est (la classe d'équivalence de)  $* \mapsto x$ .

### 2.3. EXEMPLES DES COMPLEXES DE CHÂÎNES ET ARGUMENT DU PETIT OBJET

Soit  $R$  un anneau (ou une  $k$ -algèbre) commutatif, unitaire. Rappelons que  $Ch(R)$  est la catégorie des complexes  $(C_{i \in \mathbb{Z}}, d)$  de chaînes de  $R$ -modules non-bornés et  $Ch_{\geq 0}(R)$  sa sous-catégorie des complexes de chaînes concentrés en degrés positifs ( $C_i = 0$  si  $i < 0$ ). Enfin on note  $Ch_{\leq 0}(R)$  la sous-catégorie des complexes de chaînes concentrés en degrés négatifs ( $C_i = 0$  si  $i > 0$ ); cette sous-catégorie est isomorphe (via  $C^i = C_{-i}$ ) à celle des complexes de cochaînes concentrés en degrés positifs.

**Définition 2.3.1** (*Structure de modèle projective*). Soit  $\mathbf{C} = Ch(R)$  ou  $Ch_{\geq 0}(R)$ . On définit la structure, dite projective, sur  $\mathbf{C}$  en posant

**Équivalences faibles  $\mathscr{W}$** : ce sont les quasi-isomorphismes (c'est à dire les morphismes de complexes induisant des isomorphismes en homologie).

**Fibrations  $\mathcal{F}$ :** ce sont les morphismes de complexes surjectifs (en tout degré) dans  $Ch(R)$  et les morphismes de complexes surjectifs en tout degré  $> 0$  dans  $Ch_{\geq 0}(R)$ .

**Cofibrations  $\mathcal{C}$ :** ce sont les morphismes de complexes qui ont la propriété de relèvement par rapport aux fibrations acycliques.

**Théorème 2.3.2.** Les structures projectives ci-dessus munissent  $Ch(R)$  et  $Ch_{\geq 0}(R)$  d'une structure de catégorie de modèles. De plus,

- (1) Les cofibrations de  $Ch_{\geq 0}(R)$  sont exactement les inclusions en tout degré dont le conoyau est projectif en tout degré.
- (2) Les cofibrations de  $Ch(R)$  sont les morphismes de complexes, qui sont injectifs et de conoyau projectif en tout degré, et dont le conoyau est cofibrant.
- (3) Tout morphisme de complexe de  $Ch(R)$ , injectif en tout degré, dont le conoyau est un complexe borné inférieurement<sup>36</sup> de modules projectifs est une cofibration.

*Remarque 2.3.3 (les cofibrations sont scindées degré par degré).* Tout morphisme de  $R$ -modules injectif  $A \hookrightarrow B$  de conoyau  $P = B/A$  projectif est nécessairement scindé : c'est-à-dire qu'il existe  $s : P \rightarrow B$  tel que la composée  $P \xrightarrow{s} B \xrightarrow{\pi} B/A = P$  soit l'identité. Ce morphisme est donné par l'application en pointillé donné par le relèvement de la projection canonique dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow s & \parallel \\ B & \xrightarrow{\pi} & P \end{array}$$

l'application  $R$ -linéaire  $A \oplus P \rightarrow B$  définie par  $(a, y) \mapsto a + s(y)$  a un inverse donné par le morphisme  $x \mapsto (x - s \circ \pi(x), \pi(x))$  et définit donc un isomorphisme  $B \cong A \oplus P$ .

D'après le Théorème 2.3.2, cette propriété est vraie degré par degré pour toute cofibration dans les structures de modèles projectives. Autrement dit

*Une cofibration  $i : A_* \rightarrow B_*$  pour la structure projective est nécessairement injective et scindée en tout degré :  $B_i \cong A_i \oplus (B_i/A_i)$ .*

Attention, ce scindement n'est cependant pas forcément un scindement de complexes de chaînes ! L'inclusion de  $A_*$  et la projection  $B_* \rightarrow P_*$  sont bien des morphismes de complexes mais il se peut que dans la décomposition  $B_* \cong A_* \oplus P_*$  la restriction de la différentielle de  $B$  à  $P_*$  ait une composante non-nulle à valeur dans  $A_*$  (ce qui est équivalent à dire que la section  $s_* : P_* \rightarrow B_*$  construite degré par degré n'est pas un morphisme de complexe).

*Remarque 2.3.4.* Bien que le conoyau d'une cofibration, dans le cas  $Ch(R)$ , soit constitué en tout degré de modules projectifs on prendra garde, que pour les complexes non-bornés, un complexe acyclique formé de projectifs n'est *pas* forcément cofibrant (contrairement au cas de  $Ch_{\geq 0}(R)$ ).

*Exemple 2.3.5.* Par exemple, prenons  $C_i = k[x]/(x^2)$  muni de sa structure de  $k[x]/(x^2)$  module canonique. On a une différentielle  $d$  donnée par la multiplication par  $x$ . On a immédiatement que ce complexe est acyclique (c'est à dire d'homologie nulle en tout degré). D'après le théorème, si il était cofibrant, on pourrait remonter tout morphisme de  $C$  vers  $X$  le long de toute surjection  $Y \twoheadrightarrow X$ . Prenons  $X = k$  et  $p : Y = k[x]/(x^2) \rightarrow k$  la projection canonique. Soit  $f_* : C \rightarrow X$  donnée par l'application triviale en degré  $i \neq 0$  et la projection  $k[x]/(x^2) \rightarrow k$  en degré 0. C'est bien

36. c'est à dire que  $C_i = 0$  pour  $i \ll 0$

un morphisme de complexes. Si il existait une factorisation  $f_* = p \circ \tilde{f}_*$  de  $f_*$ , on aurait pour  $x = x \cdot 1 \in k[x]/(x^2)$  pris dans  $C_0$ , par linéarité, que

$$x \cdot \tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_0(x) = \tilde{f}_0(d(1)) = d\tilde{f}_1(1) = 0$$

mais  $p \circ (x \cdot \tilde{f}_0(1)) = x \cdot p \circ \tilde{f}_0(1) = x \cdot f_0(1) = x \cdot 1 = x \neq 0$  ce qui est contradictoire.

On peut définir des structures de modèles duales qui font apparaître le rôle particulier des modules injectifs.

**Définition 2.3.6** (*Structure de modèle injective*). Soit  $\mathbf{C} = Ch(R)$  ou  $Ch_{\leq 0}(R)$ . On définit la structure, dite injective, sur  $\mathbf{C}$  en posant

**Équivalences faibles  $\mathcal{W}$** : ce sont les quasi-isomorphismes.

**Cofibrations  $\mathcal{C}$** : ce sont les morphismes de complexes injectifs (en tout degré) dans  $Ch(R)$  et les morphismes de complexes injectifs en tout degré  $< 0$  dans  $Ch_{\leq 0}(R)$ .

**Fibrations  $\mathcal{F}$** : ce sont les morphismes de complexes qui ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations acycliques.

On peut démontrer le résultat suivant, par des méthodes essentiellement similaires à celle de 2.3.2.

**Théorème 2.3.7.** Les structures injectives ci-dessus munissent  $Ch(R)$  et  $Ch_{\leq 0}(R)$  d'une structure de catégorie de modèles. De plus,

- (1) Les fibrations de  $Ch_{\leq 0}(R)$  sont exactement les morphismes qui, en tout degré, sont des surjections dont le noyau est un  $R$ -module injectif.
- (2) Les fibrations de  $Ch(R)$  sont les morphismes de complexes, qui sont surjectifs en tout degré, de noyau constitué de modules injectifs en chaque degré, et dont le noyau est fibrant.
- (3) Tout morphisme de complexe de  $Ch(R)$ , surjectif en tout degré, dont le noyau est un complexe borné supérieurement<sup>37</sup> de modules injectifs est une fibration.

*Remarque 2.3.8.* Dans la structure projective, tout complexe de chaînes est fibrant, alors que dans la structure injective tout complexe de chaînes est cofibrant.

Nous expliquons maintenant les différentes étapes de la preuve du Théorème 2.3.2. Cet exemple est symptomatique d'une grande catégorie d'exemples appelées catégories de modèles cofibrement engendrées; le point essentiel de ces catégories est qu'on peut caractériser les fibrations et fibrations acycliques en termes de propriété de relèvement par rapport à une famille très simple de cofibrations, les cofibrations acycliques de taille petite, voir la définition 2.3.18 ci-dessous pour plus de précisions sur "petite".

*Preuve des axiomes MC1, MC2, MC3.* L'existence des limites et colimites, et donc l'axiome (MC1), pour les complexes de chaînes est standard. Elle consiste à vérifier que les (co)limites calculées dans les espaces gradués<sup>38</sup> héritent de différentielles naturelles.

<sup>37.</sup> c'est à dire que  $C_i = 0$  pour  $i \gg 0$

<sup>38.</sup> on prendra garde qu'on définit les limites et colimites pour les espaces gradués degré par degré (ce qui est possible puisque on regarde des morphismes de complexes qui préservent donc le degré), c'est à dire que le sous-espace des éléments homogènes de degré  $i$  d'une (co)limite de modules se calcule en prenant la (co)limite des parties homogènes de degré  $i$ . On ne calcule *pas* les limites

L'axiome (MC2) s'obtient en passant aux groupes d'homologie. Il devient alors que si deux flèches parmi  $H_*(f)$ ,  $H_*(g)$  et  $H_*(g) \circ H_*(f) = H_*(g \circ f)$  sont des isomorphismes alors la troisième l'est, ce qui est une propriété immédiate des morphismes inversibles.

Pour l'axiome (MC3), soit

$$\begin{array}{ccccc}
 & & id_A & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 A & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{\alpha} & A \\
 \downarrow q & & \downarrow f & & \downarrow q \\
 B & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{\beta} & B \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\
 & & id_B & & 
 \end{array}$$

un rétracte. Puisque les flèches horizontales sont l'identité, on a automatiquement que  $i : A \rightarrow X$  et  $i_* : H_*(A) \rightarrow H_*(X)$  sont injectives en tout degré et que  $\beta : Y \rightarrow B$  et  $\beta_* : H_*(Y) \rightarrow H_*(B)$  sont surjectives en tout degré.

Supposons maintenant que  $f$  soit un quasi-isomorphisme, alors  $f_* = H_*(f)$  est un isomorphisme et donc la commutativité du diagramme implique que  $j_* \circ q_* = f_* \circ i_*$  est injective. En particulier  $q_*$  est injective. De même, de la surjectivité de  $\beta_* \circ f_* = q_* \circ \alpha_*$  suit la surjectivité de  $q_*$ . Ainsi  $q_*$  est un isomorphisme et donc  $q$  est un quasi-isomorphisme.

On voit par ailleurs que le même argument assure que  $q$  est surjective en tout degré (resp  $> 0$ ) si  $f$  l'est. Ce qui démontre que le rétracte d'une fibration est une fibration.

Enfin supposons que  $f$  est une cofibration et montrons que  $q$  est une cofibration, c'est à dire, par définition des cofibrations dans la structure projective, qu'elle a la propriété de relèvement par rapport à toute fibration qui est aussi un quasi-isomorphisme  $P \xrightarrow{\sim} Q$ . La rétraction et le fait que  $f$  soit une cofibration nous fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & id_A & & & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & & & \\
 A & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{\alpha} & A & \xrightarrow{\quad} & P \\
 \downarrow q & & \downarrow f & & \downarrow h & \nearrow q & \downarrow \cong \\
 B & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{\beta} & B & \xrightarrow{\quad} & Q \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & & \\
 & & id_B & & & & 
 \end{array}$$

Le relèvement cherché est alors la composée  $h \circ j$  précisément grace au fait que les composées des flèches horizontales de la rétraction sont des identités.

Notons que la preuve que l'on vient de faire montre directement la propriété suivante :

---

de modules gradués  $(R_{*,i})_{i \in I}$  en considérant la limite des sommes directes  $(\bigoplus_{n \geq 0} R_{n,i})_{i \in I}$  car ces dernières limites n'ont pas forcément une décomposition en somme directe de partie homogène compatible avec celles des objets de départ (par exemple on peut avoir un produit infini de parties homogènes).

**Lemme 2.3.9.** Soit  $\mathfrak{S}$  une sous-classe de morphismes d'une catégorie  $\mathbf{C}$ ,  $LLP(\mathfrak{S})$  (resp.  $RLP(\mathfrak{S})$ ) la classe des morphismes de  $\mathbf{C}$  vérifiant la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) par rapport à tous les morphismes de  $\mathfrak{S}$ . Les classes  $LLP(\mathfrak{S})$  et  $RLP(\mathfrak{S})$  sont stables par rétract.

□

Expliquons maintenant d'où viennent les conditions (1), (2) et (3) du théorème 2.3.2 (en utilisant uniquement la définition de la structure projective, pas qu'elle forme une catégorie de modèle). Cela nous aidera aussi pour établir la propriété (MC4). Pour cela on commence par exhiber des complexes de chaînes canoniques qui vont nous aider à caractériser nos (co)fibrations.

**Définition 2.3.10.** Soit  $M$  un  $R$ -module.

- On définit le complexe

$$D^n(M) := \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{id} M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

$$n \qquad n-1$$

donné, en degré  $i$ , par  $D^n(M)_i = 0$  si  $i \neq n, n-1$  et  $D^n(M)_i = M$  si  $i = n, n-1$ , la différentielle étant l'identité au seul endroit non trivial.

- On définit le complexe  $S^n(M)$  comme le complexe  $S^n(M)_i = M$  si  $i = n$  et  $S^n(M)_i = 0$  si  $i \neq n$  muni de la seule différentielle possible...

Il est clair que  $D^n(M)$  est acyclique, donc que  $D^n(M) \rightarrow 0$  est une fibration acyclique, et on a par ailleurs un morphisme de complexe injectif  $S^{n-1}(M) \hookrightarrow D^n(M)$  canonique

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{id} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

ainsi qu'une fibration canonique  $D^n(M) \rightarrow S^n(M)$

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{id} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Ce dernier morphisme est bien défini dans  $Ch_{\geq 0}(R)$  dès que  $n \geq 1$ .

*Remarque 2.3.11.* La notation est précisément faite pour rappeler l'inclusion du bord d'un disque  $\mathbb{D}^n$  et le recollement d'un disque  $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  sur un point. On notera que ces (morphismes de) complexes s'identifient d'ailleurs avec ceux des complexes de chaînes cellulaires réduits des disques et sphères.

Remarquons qu'un morphisme de complexes  $C_* \rightarrow D^n(M)$  est trivial en degré  $i \neq n, n+1$  et que de plus on a  $f_{n+1}(x) = f_n(d(x))$  pour tout  $x \in C_{n+1}$ . Il suit que

**Lemme 2.3.12.** Les morphismes de complexes de  $C_*$  dans  $D^n(M)$  sont en bijection avec les applications  $R$ -linéaires  $C_n \rightarrow M$ .

*Démonstration des propriétés (1), (2), (3) du Théorème 2.3.2.* On commence par le sens direct. Soit  $f : A \twoheadrightarrow B$  une cofibration dans  $Ch(R)$  (resp.  $Ch_{\geq 0}(R)$ ), c'est à dire une application vérifiant la propriété de relèvement à gauche par rapport à une fibration acyclique. Considérons le morphisme de complexe canonique  $\varphi_A^n : A \rightarrow D^{n+1}(A_n)$  donné par

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d} & A_{n+1} & \xrightarrow{d} & A_n & \xrightarrow{d} & A_{n-1} & \longrightarrow & A_{n-2} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow d & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{id} & A_n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

On en déduit (comme dans le lemme 2.3.12) un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & D^{n+1}(A_n) \\ \downarrow f & \nearrow h & \downarrow \wr \\ B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et l'existence du relèvement  $h$ . Ce relèvement nous donne donc un diagramme com-

$$\begin{array}{ccc} B_{n+1} & \xrightarrow{h_{n+1}} & A_n \\ \downarrow d & & \parallel \\ B_n & \xrightarrow{h_n} & A_n \end{array}$$

l'injectivité de  $f$  et le fait que le conoyau est scindé en tout degré.

Que le poussé en avant d'une cofibration soit une cofibration découle immédiatement du lemme 2.1.17 puisque les cofibrations sont définies par une propriété de relèvement à gauche. Il suit du poussé en avant  $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow f & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & P_* \end{array}$  que le complexe  $P_*$  des

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow f & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & P_* \end{array}$$

conoyaux est cofibrant.

Montrons maintenant qu'en tout degré, le conoyau  $P_n := B_n/A_n$  est projectif<sup>39</sup>. Pour cela il faut montrer qu'il a la propriété de relèvement par rapport à toute surjection  $u : M \twoheadrightarrow N$  de morphismes de  $R$ -modules. Soit  $q : P_n \rightarrow N$  un morphisme. Pour cela on considère encore le morphisme canonique  $\varphi_{P_*}^n : P_* \rightarrow D^{n+1}(P_n)$ , la surjection induite  $D^{n+1}(f) : D^{n+1}(M) \rightarrow D^{n+1}(N)$  qui est une équivalence faible puisque les deux complexes sont acycliques, et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & D^{n+1}(M) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \wr \\ P_* & \xrightarrow{D^{n+1}(q) \circ \varphi_{P_*}^n} & D^{n+1}(N). \end{array}$$

Le relèvement en pointillé dans ce diagramme fournit précisément un relèvement de  $q$  (en degré  $n$ ).

Il reste à montrer les réciproques. On commence par celles dans les affirmations (1) et (3), c'est à dire que les morphismes de complexes vérifiant les conditions énoncées ont bien la propriété de relèvement par rapport à toutes les fibrations acycliques. Le

<sup>39</sup>. la preuve marchant et pour  $Ch_{\geq 0}(R)$  et pour  $Ch(R)$



résultat est similaire dans les deux cas (le cas borné inférieurement se traitant comme le cas concentré en degré positif). Il faut montrer que pour tout quasi-isomorphisme  $f : X \rightarrow Y$  qui est surjectif en degré  $\geq 1$ , alors, pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & X \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow \wr \\ B & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

un relèvement  $h$  existe rendant les deux triangles commutatifs. Ceci est l'exercice 6 du TD 1 et c'est essentiellement la même chose que l'exercice 1.5.18. En fait, on peut remarquer que comme  $f$  est un quasi-isomorphisme, on a que  $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$  est aussi surjective et donc  $f$  est surjectif en tout degré. On construit alors le relèvement par récurrence en partant d'un choix du relèvement en degré 0 en utilisant la décomposition  $B_0 = A_0 \oplus P_0$  que nous avons vu, le fait que le noyau  $\text{Ker}(f_* : X_* \rightarrow Y_*)$  est acyclique (par une utilisation directe de la suite exacte longue d'homologie associée à la suite exacte  $\text{Ker}(f_*) \rightarrow X_* \twoheadrightarrow Y_*$ ) ; l'argument est une variante un peu plus sophistiquée que celui du lemme 1.5.15 et a été vu en TD.

La réciproque de (2) est aussi similaire, en effet, par projectivité des  $P_n$  que nous avons établi, on a une application linéaire  $\kappa_n : P_n \rightarrow B_n/A_n \rightarrow X_n$  relevant la restriction de  $\psi : B_n \rightarrow Y_n$  à la composante  $P_n$  en utilisant qu'on a vu que  $B_n \cong A_n \oplus P_n$ . Cette dernière identité assure que la différentielle de  $B$  s'écrit  $d(a, p) = (d_A(a) + t(p), d(p))$  où  $d_A$  est la différentielle sur  $A$ ,  $d$  la différentielle induite par celle de  $B$  sur le quotient  $P = B/A$  (on a forcément  $d_A t + t d = 0$ ). On a alors une application  $d\kappa - \kappa d - \phi t : P_n \rightarrow \text{Ker}(f_{n-1} : X_{n-1} \rightarrow Y_{n-1})$ . En utilisant que  $P$  est cofibrant et le noyau  $\text{Ker}(f)$  acyclique, on peut montrer que cette application est homotope à 0.

**Lemme 2.3.13.** Soit  $P_*$  un complexe de chaînes cofibrant et  $K_*$  un complexe acyclique. Alors tout morphisme  $f : P_* \rightarrow K_*$  est homotope (au sens des complexes de chaînes) à 0.

*Preuve du lemme.* Soit  $C_*(K) = K_* + 1 \oplus K_*$  le cocone of  $K_*$ . Sa différentielle est donc donnée par  $d(x, y) = (-d(x) + y, d(y))$  et en particulier  $H_*(C_*(K)) = 0$  en tout degré. La projection  $(x, y) \mapsto y$  est un morphisme de complexes. Donc  $\pi : C_*(K) \rightarrow K$  est surjective en tout degré et un quasi-isomorphisme puisque que  $K_*$  a une homologie triviale. C'est donc une fibration acyclique et puisque  $P$  est cofibrant, par définition, nous avons un relevé  $H$  dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & K_{*+1} \oplus K_* \\ \downarrow & \nearrow H & \downarrow \sim \\ P & \xrightarrow{f} & K. \end{array}$$

Ce morphisme de complexes  $H$  se décompose comme  $H(p) = (h(p), f(p))$  où  $h = (h_n : P_n \rightarrow K_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$  puisque  $\pi \circ H = f$ . Comme  $H$  est comaptible aux différentielles on a  $d \circ H(p) = H(d(p))$  qui, sur le premier facteur, implique  $-d \circ h(p) + f(p) = h \circ d(p)$ . Ainsi  $f - 0 = d \circ h + h \circ d$  et  $f : P \rightarrow K$  est homotope à l'application nulle.  $\square$

En notant  $H$  l'homotopie donnée par ce lemme, nous avons que la somme  $(f, \kappa + H) : B_n \cong A_n \oplus P_n \rightarrow X_n$  est le relèvement cherché.  $\square$

*Preuve de la propriété (MC4).* Par définition, on a déjà la propriété de relèvement des cofibrations par rapports aux fibrations acycliques. Il faut montrer que toute cofibration  $i : A \xrightarrow{\sim} B$  qui est une équivalence faible a la propriété de relèvement par rapport aux fibrations.

Comme on a déjà vu qu'une cofibration est injective en tout degré, on a déjà que le conoyau  $P_*$  est acyclique (par la longue suite exacte d'homologie associée à la suite exacte courte de complexes  $A \hookrightarrow B \rightarrow P_* \rightarrow 0$ ).

Dans le cas de  $Ch_{\geq 0}(R)$ , on peut utiliser alors le lemme suivant (qui se démontre encore une fois par récurrence).

**Lemme 2.3.14.** Soit  $P_*$  un complexe acyclique dans  $Ch_{\geq 0}(R)$ , constitué de modules projectifs. Alors les cycles  $Z_k(P_*)$  sont aussi projectifs et de plus on a un isomorphisme de complexes de chaines

$$P_* \cong \bigoplus_{k \geq 0} D^{k+1}(Z_k(P_*)).$$

Le résultat découle alors du fait que chaque  $D^{k+1}(M)$  est projectif en tant que complexe de chaines, c'est à dire qu'il a la propriété de relèvement par rapport aux fibrations, c'est le sens de la proposition 2.3.16.

Dans le cas de  $Ch(R)$  (la preuve s'appliquant aussi à  $Ch_{\geq 0}(R)$ ), le résultat découle du

**Lemme 2.3.15.** Soit  $P_*$  un complexe de chaines cofibrant de  $Ch(R)$  qui est de plus acyclique. Alors  $P_*$  est un objet projectif dans la catégorie des complexes de chaines (c'est à dire vérifie la propriété de relèvement par rapports à toutes les fibrations).

*Preuve du Lemme 2.3.15.* On commence par remarquer que  $P$  est contractile, c'est à dire que l'identité de  $P_*$  est homotope à 0. La preuve est un argument que l'on a déjà vu : soit  $P_{*+1} \oplus P_*$  le cocone de l'identité. C'est à dire le complexe donné par la somme de  $P_*$  et  $P_{*+1}$  et dont la différentielle est définie par  $d(w, x) = (-d(w) + x, d(x))$ . Ce complexe est contractile et on a la projection  $(w, x) \mapsto x$  qui est donc une fibration acyclique. Alors on dispose d'un relèvement

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & P_{*+1} \oplus P_* \\ \downarrow & \nearrow H & \downarrow \wr \\ P_* & \xlongequal{\quad} & P_* \end{array}$$

$P_*$  est cofibrant. L'application linéaire  $H$  s'écrit sous la forme  $H(x) = (h(x), x)$  par commutativité du diagramme, où  $h : P_* \rightarrow P_{*+1}$ . La condition que  $H$  est un morphisme de complexe donne que  $-dh(x) + x = h(d(x))$ , c'est à dire que  $h$  est une homotopie entre 0 et l'identité. On en déduit que l'on a une décomposition  $P_* = Z_* \oplus R_*$  où  $Z_*$  est le sous espace des cycles et la différentielle de  $P_*$  s'identifie avec un isomorphisme entre  $R_{*+1}$  et  $Z_*$ . Cette décomposition est donnée en prenant  $R_* = \text{Im}(h \circ d)$  par  $x \mapsto (dh(x), hd(x))$  : en effet la somme est directe car  $dh(x) = hd(y)$  implique  $0 = dhd(y) = d(y)$  et donc  $hd(y) = 0$  et elle engendre puisque  $x = dh(x) + hd(x)$  pour tout  $x$  ; de plus  $dhd(x) = dx$  montre la propriété énoncée sur la différentielle puisque  $Z_*$  est égal au sous-espace des bords  $d(P_*)$ , l'homologie étant nulle. Cette décomposition étant donnée, il devient facile de construire le relèvement. En effet, les morphismes de complexe de  $Z_* \oplus R_*$  dans un complexe quelconque  $A$  sont

donnés par les collections de morphismes linéaires  $(\psi_n : R_n \rightarrow A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sans aucune condition. La bijection se faisant en définissant le morphisme de complexe sous la forme  $(d(s), r) \mapsto d\psi_{n+1}(s) + \psi_n(r)$  (en se rappelant que les cycles sont des bords). En particulier, on peut appliquer cette construction pour relever tout morphisme surjectif en un diagramme commutatif.  $\square$

En effet, ce lemme permet d'abord de remarquer que si  $A \xrightarrow{\sim} B$  est une cofibration qui est un quasi-isomorphisme, alors, en notant  $P$  le complexe quotient  $B/A$  (qui est donc cofibrant et acyclique parce qu'on a vu avant), le relevé dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & B \\ \wr \downarrow & \nearrow H & \downarrow \\ P & \xlongequal{\quad} & P \end{array}$$

$B \cong A \oplus P$  comme complexe de chaînes. Par suite, un relèvement dans tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \wr \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ B \cong A \oplus P & \longrightarrow & Y \end{array}$$

existe par le lemme 2.3.15 précédent.  $\square$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{f} & X \\ \wr \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ P & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Les propriétés de factorisation découlent de ce que l'on appelle l'argument du petit objet. C'est une construction permettant de construire fonctoriellement des objets ayant des propriétés de relèvement par rapport à une famille raisonnable de flèches issus de "petits" objets. Avant de l'énoncer, on note une propriété clé de cette structure projective : les fibrations et fibrations acycliques sont exactement les morphismes de complexes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à une certaine famille dénombrable de morphismes de complexes.

**Proposition 2.3.16.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes dans  $Ch(R)$  (resp.  $Ch_{\geq 0}(R)$ ).

- (1)  $f : X \rightarrow Y$  est une fibration si et seulement si il a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes  $0 \rightarrow D^n(R)$  (resp. pour  $n \geq 1$ ) ;
- (2)  $f : X \rightarrow Y$  est une fibration acyclique si et seulement si il a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes  $S^{n-1}(R) \rightarrow D^n(R)$  (resp. pour  $n \geq 1$ )

*Démonstration.* La preuve est simplement une petite chasse au diagramme degré par degré. La première remarque à faire est la suivante : un morphisme de complexe de  $D^n(R) \rightarrow Z_*$  est équivalent à la donnée d'un élément  $z \in Z_n$  en degré  $n$  (via  $r = r \cdot 1 \mapsto r \cdot z$  en degré  $n$  et  $r \mapsto r \cdot d(z) = d(r \cdot z)$  en degré  $n-1$  et nécessairement 0 en tout autre degré). Il suit immédiatement que si  $p : X \rightarrow Y$  est un morphisme de complexe, il existe un relèvement dans tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & X \\ \wr \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ D^n(R) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

seulement si tout élément de  $y_n$  admet un antécédent par  $p$ , c'est à dire que  $p$  est surjective en degré  $n$ . Ainsi (1) est démontré. Pour (2), on remarque qu'un

diagramme commutatif  $S^{n-1}(R) \xrightarrow{f} X$  est équivalent à la donnée d'une paire

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1}(R) & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ D^n(R) & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

$(x_{n-1}, y_n) \in X_{n-1} \times Y_n$  vérifiant  $p(x_{n-1}) = d(y_n)$  et  $d(x_{n-1}) = 0$  (autrement dit  $x_{n-1}$  est un cycle) (via  $f(r) = r \cdot x_{n-1}$  en degré  $n-1$ , 0 sinon et  $g$  est déterminée par  $g(r) = r \cdot y_n$  comme ci-dessus). En vertu de la première remarque, un relèvement dans ce diagramme est équivalent à la donnée d'un élément  $x_n \in X_n$  tel que  $d(x_n) = x_{n-1}$  et  $p(x_n) = y_n$ . Montrons maintenant (2). Si  $p$  est une fibration acyclique<sup>40</sup>, alors son noyau  $\text{Ker}(p)$  est un complexe de chaînes qui a une homologie nulle en tout degré par la longue suite exacte d'une suite exacte courte en homologie (associée à  $\text{Ker}(p) \hookrightarrow X \twoheadrightarrow Y$ ). Par surjectivité, on peut trouver un élément  $\tilde{x}_n \in X_n$  tel que  $p(\tilde{x}_n) = y_n$ . Il suit que  $d(\tilde{x}_n) - x_{n-1} \in \text{Ker}(p)_{n-1}$ . C'est par ailleurs un cycle de  $\text{Ker}(p)$  puisque  $d(x_{n-1}) = 0$ . Ainsi il existe un élément  $w \in \text{Ker}(p)_n$  tel que  $d(w) = d(\tilde{x}_n) - x_{n-1}$ . On en déduit que l'élément  $x_n := \tilde{x}_n - w$  vérifie bien les conditions voulues :  $d(x_n) = x_{n-1}$  et  $p(x_n) = y_n$ . Il reste à voir la réciproque.

On suppose donc que  $p : X \rightarrow Y$  vérifie la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les diagrammes avec  $S^{n-1}(R) \hookrightarrow D^n(R)$  à gauche (où  $n \geq 1$  ou  $n \in \mathbb{Z}$  selon les cas). Il est immédiat que  $p$  est surjective sur les  $n$ -cycles car, pour tout cycle  $y_n$ , la paire  $(0, y_n)$  définit bien un diagramme commutatif et que le relèvement donne donc un antécédent de  $y_n$ . En passant au quotient, on obtient donc que  $H_n(p)$  est également surjective. Montrons que  $p$  elle-même est surjective : si  $y_n \in Y_n$ , comme  $d(y_n)$  est un cycle, par surjectivité pour  $n-1$ <sup>41</sup>, on obtient que  $d(y_n) = p(x_{n-1})$  avec  $x_{n-1}$  un cycle. C'est à dire que le couple  $(x_{n-1}, y_n)$  définit bien un diagramme. L'existence du relèvement donne donc un antécédent  $x_n$  de  $y_n$ . On a bien obtenu que  $p : X \rightarrow Y$  est une fibration. Pour montrer qu'elle est acyclique, il reste à voir que  $H_*(p)$  est injective. Supposons que  $p([x_n]) = 0 \in H_n(Y)$ . Alors  $p(x_n)$  est un bord, c'est à dire  $p(x_n) = d(y_{n+1})$  et la paire  $(x_n, y_{n+1})$  fournit encore un diagramme commutatif (associé à  $S^n(R) \rightarrow D^{n+1}(R)$ ) pour lequel on a donc un relèvement, en particulier un élément  $x_{n+1}$  tel que  $d(x_{n+1}) = x_n$ . Il suit que  $[x_n] = 0 \in H_n(X)$  et on a bien l'injectivité.  $\square$

*Remarque 2.3.17.* Comme on a déjà démontré les propriétés (1) et (3) du Théorème 2.3.2 et l'axiome (MC4), on obtenait le sens direct en remarquant que les morphismes  $0 \rightarrow D^n(R)$  et  $S^{n-1}(R) \rightarrow D^n(R)$  sont respectivement des cofibrations acycliques et des cofibrations.

Pour énoncer l'argument du petit objet on a besoin de la terminologie suivante :

**Définition 2.3.18.** Un objet  $A \in \mathbf{C}$  est dit  $\mathbb{N}$ -compact ou  $\mathbb{N}$ -petit (ou parfois séquentiellement petit) si, pour tout foncteur  $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{C}$ , on a que l'application canonique

$$\text{colim}_{\mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, F(n)) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, \text{colim}(F(n)))$$

est une bijection.

Si on remplace  $\mathbb{N}$  par n'importe quel ordinal  $\kappa$ , on définit de même la notion de  $\kappa$ -compact ou  $\kappa$ -petit.

40. on a vu qu'en particulier cela implique que  $p$  est surjectif même pour la structure de  $Ch_{\geq 0}(R)$

41. qui est automatique pour  $n-1 < 0$  dans le cas de  $Ch_{\geq 0}(R)$

Enfin un objet  $A \in \mathbf{C}$  est appelé simplement compact si l'application canonique

$$\operatorname{colim}_{j \in J} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(A, C_j) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(A, \operatorname{colim}_{j \in J} C_j)$$

est un isomorphisme pour toute colimite *filtrée*.

Un objet compact est a fortiori  $\kappa$ -compact.

*Exemple 2.3.19* (Modules et complexes de chaînes). On peut vérifier qu'un  $R$ -module est  $\mathbb{N}$ -compact (et même compact) si et seulement il est de présentation finie.

Plus généralement un complexe  $X_* \in Ch(R)$  de  $R$ -modules est compact si c'est un complexe borné (c'est qu'il n'y a qu'un nombre fini de composantes non-nulles) de  $R$ -modules de présentation finie.

*Exemple 2.3.20* (**Ens**, **sEns** et **Top**). Dans la catégorie des ensembles, les objets compacts sont les ensembles *finis*.

Dans la catégorie de tous les espaces topologiques généraux, les objets compacts ne sont pas si intéressants car il s'agit des ensembles finis munis de la topologie discrète (cela se voit en regardant des morphismes dans des espaces grossiers mais ce n'est pas évident). En revanche, les complexes cellulaires compacts (au sens de la topologie usuelle) sont bien des objets compacts de la sous-catégorie des espaces cellulaires.

Les objets compacts de la catégorie **sEns** des ensembles simpliciaux (voir 2.6) sont les ensembles simpliciaux finis (c'est à dire avec un nombre fini de simplexes non-dégénérés ; il s'agit précisément de ceux dont la réalisation géométrique est un espace compact au sens usuel et français de la topologie).

On va maintenant expliquer une méthode due à Quillen pour construire des applications ayant la propriété de relèvement par rapport à une famille de morphismes.

Soit  $\mathfrak{J}$  une famille de flèches  $(A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i)_{i \in \mathfrak{J}}$  dans  $\mathbf{C}$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathbf{C}$ . Notre but est donc de construire une factorisation *naturelle* de  $f$  au travers d'une flèche qui a la propriété de relèvement par rapport à toutes les applications de la famille  $\mathfrak{J}$ . On procède comme suit. On introduit un nouvel ensemble

$$(9) \quad S^{\mathfrak{J}}(f) := \left\{ \begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & X \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow f \\ B_i & \longrightarrow & Y \end{array} \text{ , tel que le diagramme commute et } i \in \mathfrak{J} \right\}$$

constitué de tous les diagrammes commutatifs dans  $\mathbf{C}$  dont les flèches verticales de gauche sont dans  $\mathfrak{J}$  et celle de droite est  $f$ . Si  $d \in S^{\mathfrak{J}}(f)$  est un objet de  $S^{\mathfrak{J}}(f)$ , on

notera<sup>42</sup> le diagramme correspondant sous la forme

$$\begin{array}{ccc} A_{i_d} & \xrightarrow{\phi_d} & X \\ \alpha_{i_d} \downarrow & & \downarrow f \\ B_{i_d} & \xrightarrow{\gamma_d} & Y \end{array} .$$

42. cette écriture n'a pour but que de donner un nom aux flèches du diagramme, sauf  $f$  bien sur qui est la seule fixée

À partir de ce (gros) ensemble  $S^{\mathfrak{J}}(f)$  on construit l'objet  $R^1(f, \mathfrak{J})$  comme le poussé-en-avant  $X \cup_{\coprod_{d \in S^{\mathfrak{J}}(f)} A_{i_d}} \coprod_{d \in S^{\mathfrak{J}}(f)} B_{i_d}$ . On a donc le diagramme commutatif suivant

$$(10) \quad \begin{array}{ccccc} \coprod_{d \in S^{\mathfrak{J}}(f)} A_{i_d} & \xrightarrow{\coprod \phi_d} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ \coprod \alpha_{i_d} \downarrow & & \downarrow & & \\ \coprod_{d \in S^{\mathfrak{J}}(f)} B_{i_d} & \longrightarrow & R^1(f, \mathfrak{J}) & \xrightarrow{f_1} & Y \\ & \searrow \coprod \gamma_d & & & \end{array}$$

où  $f_1 : R^1(f, \mathfrak{J}) \rightarrow Y$  est la flèche donnée par la propriété universelle du poussé-en-avant.

On itère alors la construction en posant  $R^2(f, \mathfrak{J}) := R^1(f_1, \mathfrak{J})$  et en notant  $f_2 : R^2(f, \mathfrak{J}) = R^1(f_1, \mathfrak{J}) \rightarrow Y$  la flèche canonique (obtenue par propriété du poussé en avant appliqué au diagramme obtenu à partir de  $S^{\mathfrak{J}}(f_1)$ ). Par récurrence, plus généralement, on définit

$$(11) \quad R^n(f, \mathfrak{J}) := R^1(f_{n-1}, \mathfrak{J}) \text{ et on note } f_n : R^n(f, \mathfrak{J}) \rightarrow Y \text{ la flèche canonique.}$$

Notons que l'on a, par définition du poussé en avant, des flèches canoniques  $X \rightarrow R^1(f, \mathfrak{J})$ ,  $R^1(f, \mathfrak{J}) \rightarrow R^2(f, \mathfrak{J})$ , ...,  $R^{n-1}(f, \mathfrak{J}) \rightarrow R^n(f, \mathfrak{J})$  etc. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & R^1(f, \mathfrak{J}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R^n(f, \mathfrak{J}) & \longrightarrow & \dots \\ f \downarrow & & f_1 \downarrow & & & & f_n \downarrow & & \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & \dots & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & \dots \end{array}$$

On note enfin

$$(12) \quad R^\infty(f, \mathfrak{J}) := \text{colim } R^n(f, \mathfrak{J})$$

et  $f_\infty : R^\infty(f, \mathfrak{J}) \rightarrow Y$  la flèche canonique induite par le diagramme précédent. On a donc une factorisation  $X \rightarrow R^\infty(f, \mathfrak{J}) \xrightarrow{f_\infty} Y$  de  $f$  (qui se factorise au travers de chaque  $R^n(f, \mathfrak{J})$ ).

*Remarque 2.3.21.* La construction a pour but de définir l'objet  $R^{n+1}(f)$  comme un objet muni d'une flèche issue de  $B_i$  pour tout carré commutatif avec  $f^{(n)}$  sur la verticale droite et  $A_i \rightarrow B_i$  à gauche. Cette flèche va être le relèvement dans le carré en passant à la colimite comme l'énonce le résultat suivant.

**Proposition 2.3.22 (Argument du petit objet de Quillen).** Supposons que pour tout  $i \in \mathfrak{J}$ , l'objet  $A_i$  est  $\mathbb{N}$ -compact (définition 2.3.18). Alors  $f_\infty : R^\infty(f, \mathfrak{J}) \rightarrow Y$  a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes de  $\mathfrak{J}$ .

Ce résultat se généralise par une preuve similaire au cas de tout ordinal  $\kappa > \mathbb{N}$  (ou  $R^\infty(f, \mathfrak{J})$  doit être remplacé par une suite indicée par  $\kappa$  de poussés en avant).

*Démonstration.* Comme chaque  $A_i$  est petit, toute flèche  $p : A_i \rightarrow R^\infty(f, \mathcal{J})$  se factorise au travers d'un  $R^n(f, \mathcal{J})$ . Ainsi tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{p} & R^\infty(f, \mathcal{J}) \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow f_\infty \\ B_i & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

se factorise sous la forme

$$\begin{array}{ccccccc} A_i & \xrightarrow{p} & R^n(f, \mathcal{J}) & \longrightarrow & R^{n+1}(f, \mathcal{J}) & \longrightarrow & R^\infty(f, \mathcal{J}) \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow f_n & \nearrow \tilde{q} & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_\infty \\ B_i & \xrightarrow{q} & Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

L'existence du relèvement  $\tilde{q}$  provient de la définition de  $R^{n+1}(f, \mathcal{J})$ . En effet, le diagramme  $A_i \xrightarrow{p} R^n(f, \mathcal{J})$  est un objet de la catégorie  $S^{\mathcal{J}}(f_n)$  et donc on a bien

$$\begin{array}{ccc} A_i & & R^n(f, \mathcal{J}) \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow f_n \\ B_i & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

une flèche  $B_i \rightarrow R^1(f_n, \mathcal{J}) = R^{n+1}(f, \mathcal{J})$  par construction du poussé-en-avant. Ceci nous fournit en particulier un relèvement pour  $R^\infty(f, \mathcal{J})$ .  $\square$

*Remarque 2.3.23.* Notons que par construction, l'objet  $R^\infty(f, \mathcal{J})$  est construit est une colimite séquentielle (c'est à dire indicée par un poset totalement ordonné) à partir de pushouts des morphismes de  $\mathcal{J}$ . En particulier, c'est un objet cellulaire généralisé 2.4.1 construit à partir des morphismes de  $\mathcal{J}$ . Notons qu'un objet  $\mathcal{J}$ -cellulaire a la propriété de relèvement à gauche par rapport à  $f_\infty$  et plus généralement par rapport à tout morphisme ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes de  $\mathcal{J}$ . En effet, c'est immédiat pour des poussés-en-avant par des morphismes de  $\mathcal{J}$  par le lemme 2.1.17 et une colimite séquentielle de tels pushouts se réécrit comme un (gros) pushout. Alternativement, on peut simplement appliquer le

*Lemme 2.3.24.* Soit  $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots$  une tour (indicée par un cardinal  $\kappa$ ) de morphismes de  $\mathbf{C}$  et  $i : X \rightarrow \text{colim}_\kappa X_i$  le morphisme canonique. Si chaque  $X_i \rightarrow X_{i+1}$  a la propriété de relèvement à gauche par rapport à un morphisme  $f$ , alors  $i : X \rightarrow \text{colim}_\kappa X_i$  l'a aussi.

*Démonstration.* Par le lemme 2.1.17, chaque  $X_0 \rightarrow X_k$  a la propriété de relèvement. Il suit que pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & W \\ i \downarrow & & \downarrow f \\ \text{colim}_\kappa X_i & \longrightarrow & Z \end{array}$$

et l'existence de  $h_k$ . La compatibilité des  $h_k$  nous donne

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \longrightarrow & W & & \\ \downarrow & \nearrow h_k & \downarrow f & & \\ X_k & \longrightarrow & \text{colim}_\kappa X_i & \longrightarrow & Z \end{array}$$

alors le relèvement  $h = \text{colim } h_k : \text{colim}_\kappa X_i \rightarrow W$  de  $f$ .  $\square$

Par ailleurs, la construction de la factorisation  $f \mapsto (X \rightarrow R^\infty(f, \mathcal{J}), R^\infty(f, \mathcal{J}) \xrightarrow{f_\infty} Y)$  est fonctorielle puisque les morphismes en question sont construits par propriété universelle des poussés-en-avant indicés par tous les diagrammes commutatifs avec

$f$  et que tout morphisme dans la catégorie des flèches de  $f$  vers  $g$  (c'est à dire carré commutatif avec  $f$  et  $g$  parallèles) induit une application canonique entre les diagrammes commutatifs.

*Preuve de (MC5).* On fait le cas de  $Ch(R)$ , l'autre cas est complètement analogue. Montrons que tout morphisme de complexes  $f : X \rightarrow Y$  admet une factorisation fonctorielle  $f : X \rightarrow Z \xrightarrow{\sim} Y$ . Pour cela on choisit la classe  $\mathfrak{J} = (S^{n-1}(R) \hookrightarrow D^n(R))_{n \in \mathbb{Z}}$ . L'argument du petit objet (proposition 2.3.22, les  $S^{n-1}(R)$  étant compacts) nous dit que l'on a une factorisation

$$f : X \longrightarrow R^\infty(f, \mathfrak{J}) \xrightarrow{f_\infty} Y$$

telle que  $f_\infty$  a la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les flèches  $S^{n-1}(R) \rightarrow D^n(R)$  et donc c'est une fibration acyclique par la proposition 2.3.16. La première flèche est une cofibration car c'est une succession de coproduits et poussés en avant de cofibrations (puisque  $S^n(R) \rightarrow D^n(R)$  est une cofibration par la preuve de la propriété (3) du théorème 2.3.2)<sup>43</sup>, cf 2.3.24. Comme la construction des  $R^n(f, \mathfrak{J})$  est fonctorielle en  $f : X \rightarrow Y$ , on en déduit sans difficulté que la factorisation obtenue est fonctorielle.

Montrons maintenant l'autre factorisation. On prend cette fois ci  $\mathfrak{J} = (0 \rightarrow D^n(R))_{n \in \mathbb{Z}}$  et l'argument du petit objet nous donne une factorisation

$$f : X \longrightarrow R^\infty(f, \mathfrak{J}) \xrightarrow{f_\infty} Y$$

telle que  $f_\infty$  a la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les flèches  $0 \rightarrow D^n(R)$  et donc c'est une fibration par la proposition 2.3.16. La première flèche est maintenant une succession de poussés en avant de  $X$  le long de cofibrations acycliques. On en déduit que c'est encore une cofibration acyclique. La fonctorialité du remplacement découle encore de celle de la construction des  $R^n(f, \mathfrak{J})$ .  $\square$

*Remarque 2.3.25.* La preuve montre que pour utiliser l'argument du petit objet, il suffit que les  $A_i$  soient  $\mathbb{N}$ -petits et même simplement petits par rapport à la famille des applications qu'on peut construire en prenant des poussés-en-avant et coproduits construits à partir des  $\alpha_i$ .

Par ailleurs, on note que la factorisation obtenu se fait au travers tout d'abord d'un morphisme cellulaire généralisé construit sur notre famille  $\mathfrak{J}$  suivie d'un morphisme ayant la propriété de relèvement à droite.

*Exercice 2.3.26.* On se place dans  $Ch(R)$  ou  $Ch_{\geq 0}(R)$  munis de la structure projective.

- (1) Démontrer que dans la structure de modèle projective, si  $X$  est cofibrant et  $f, g : X \rightarrow Y$ , alors  $f \stackrel{r}{\sim} g$  est équivalent à  $f$  et  $g$  sont homotopes au sens des complexes de chaînes :  $f - g = dh + hd$ .
- (2) Soit  $M$  un  $R$ -module vu comme un complexe de chaînes concentré en degré 0. Démontrer qu'un remplacement cofibrant de  $M$  dans  $Ch_{\geq 0}(R)$  est exactement une résolution projective de  $M$ .

---

43. On démontre comme dans la preuve du lemme 2.1.17 qu'une colimite séquentielle de morphismes satisfaisant une propriété de relèvement à gauche satisfait cette propriété aussi. Alternativement, on peut aussir remarquer qu'on peut écrire cette colimite comme un pushout



**Exemple 2.3.27 (Cas des complexes bornés).** Il existe d'autres sous-catégories de complexes de chaînes intéressantes et naturelles. En particulier on peut considérer les sous-catégories (pleines<sup>44</sup>) suivantes<sup>45</sup> de  $Ch(R)$  :

- la catégorie  $Ch_b(R)$  des complexes *bornés* constituée des complexes  $C_*$  tel que  $C_i$  est non-nul en un nombre fini de degré seulement (autrement dit il existe  $n \leq m \in \mathbb{Z}$  tel que  $C_i = \{0\}$  si  $i > m$  ou  $i < n$ ) ;
- la catégorie  $Ch_+(R)$  des complexes *bornés inférieurement* constituée des complexes  $C_*$  tel qu'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $C_i = \{0\}$  si  $i < n$  ;
- la catégorie  $Ch_-(R)$  des complexes *bornés supérieurement* constituée des complexes  $C_*$  tel qu'il existe  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $C_i = \{0\}$  si  $i > m$ .

Notons que ces sous-catégories sont stables par suspension et désuspension, c'est à dire par les foncteurs  $C \mapsto C[n]$  où  $C[n]_i = C_{n+i}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . (et la différentielle est  $(-1)^n d_C$  où  $d_C$  est la différentielle de  $C$ ). Ce n'est pas le cas de  $Ch_{\geq 0}(R)$  qui n'est stable que par suspension  $C \mapsto C[n]$  où  $n \geq 0$ .

La preuve du théorème 2.3.2 montre que la structure de modèle de  $Ch(R)$  se restreint à  $Ch_b(R)$ ,  $Ch_+(R)$  et  $Ch_-(R)$  de manière suivante :

**Corollaire 2.3.28.** Les structures projective et injectives font de  $Ch_+(R)$ ,  $Ch_b(R)$  et  $Ch_-(R)$  des catégories de modèle à (co)limites finies<sup>46</sup> et factorisations non-fonctorielles. De plus

- (1) Pour la structure projective, les cofibrations  $Ch_+(R)$  sont exactement les morphismes de complexes injectifs en tout degré, dont le conoyau est un complexe de modules projectifs ;
- (2) pour la structure injective, les fibrations  $Ch_-(R)$  sont exactement les morphismes de complexes surjectifs en tout degré, dont le noyau est un complexe de modules injectifs.
- (3) La proposition 2.3.16 reste vraie pour la structure projective et les structures de modèle sont cofibrement engendrées (cf. Définition 2.4.5).

*Ébauche de preuve.* La preuve de la proposition 2.3.16 (avec  $n$  décrivant  $\mathbb{Z}$ ) s'applique *verbatim* aux catégories  $Ch_b(R)$ ,  $Ch_+(R)$ ,  $Ch_-(R)$ . Les affirmations (1) (et respectivement (2)) sur les (co)fibrations découlent immédiatement des conditions (3) du théorème 2.3.2 (resp. 2.3.7) et du fait que les objets dans les catégories concernées sont nécessairement bornés inférieurement (resp. supérieurement).

La seule subtilité pour appliquer directement la preuve du théorème 2.3.2 est dans l'application de l'argument du petit objet pour garantir l'existence des factorisations dans les sous-catégories concernées. Une fois fixé un morphisme de complexes  $f : X \rightarrow Y$  dans  $Ch_b(R)$ .

On est alors ramené, dans l'argument du petit objet, à ne regarder que des diagrammes commutatifs où les flèches verticales de gauche  $0 \rightarrow D^i(R)$  (resp.  $S^{i-1}(R) \rightarrow D^i(R)$ ) sont restreintes à  $i \in [n, m]$  (resp.  $[n, m+1]$ ) ce qui garantit

44. c'est à dire qu'on restreint les objets, mais pas les morphismes entre objets conservés

45. On pourra noter que via l'équivalence entre complexes de chaînes et cochaînes, on a que  $Ch_b(R)$  est équivalente à celle des complexes de *cochaînes* bornés,  $Ch_+(R)$  est équivalente à celle de complexes de *cochaînes* bornés supérieurement et  $Ch_-(R)$  est équivalente à celle de complexes de *cochaînes* bornés inférieurement

46. c'est à dire que (MC1) doit être remplacé par le fait que la catégorie a toute les (co)limites finies

que la factorisation se fait dans  $Ch_b(R)$ . Le même argument s'applique pour les autres catégories.  $\square$

Notons que par définition des colimites, on a un quasi-isomorphisme  $C_{b,f} \xrightarrow{\sim} C_f$  où  $C_{b,f}$ ,  $C_f$  sont les factorisation induites par l'argument du petit objet dans le cas borné et l'autre dans le cas non-borné. De même, un remplacement (co)fibrant calculé dans la catégorie bornée est encore (co)fibrant dans la catégorie bornée.

Ceci permet en fait en pratique de transférer essentiellement tous les résultats et calculs que l'on fait de manière non-bornée au cas borné et de ne pas se soucier de cette catégorie de modèle "non-bornée" mais de se contenter d'utiliser la propriété (3) des Théorèmes 2.3.2, 2.3.7 pour identifier des (co)fibrations et de l'existence de remplacement borné (resp. supérieurement, inférieurement) pour les complexes bornés (resp. supérieurement, inférieurement).

#### 2.4. CATÉGORIES DE MODÈLES COFIBREMENT ENGENDRÉES

Les structures de modèles projectives font partie d'un type de structure très courant de catégorie de modèle, pour lesquelles l'argument du petit objet permet de construire les factorisations. Ces structures sont caractérisées par le fait que les fibrations et fibrations acycliques sont caractérisées par le fait qu'elles ont la propriété de relèvement à droite par rapport à une famille "petite" de morphismes, cf. la proposition 2.3.16. On peut remarquer que les fibrations de Serre ont été définies similairement. Cette propriété et l'argument du petit objet ont plein de conséquences agréables car elles donnent non seulement un moyen efficace de construire des structures de modèles mais aussi qu'elles permettent de construire et étudier leurs (co)limites homotopiques, cf. Remarque 2.6.17. Une telle catégorie de modèle est dite cofibrement engendrée. Elles sont par ailleurs une source d'exemple primordiale de catégories de modèles. Avant de donner la définition précise, nous avons besoin d'introduire encore un peu de terminologie...

La définition suivante est la généralisation, dans toute catégorie, de la notion de complexe cellulaire relatif dans les espaces topologiques. Comme d'habitude la notion topologique de recollement est remplacée par celle de poussé-en-avant.

**Définition 2.4.1** (Morphisme cellulaire relatif). Soit  $\mathfrak{J} := (A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i)_{i \in I}$  une famille fixée de morphismes de  $\mathbf{C}$ . Un complexe (ou morphisme)  $\mathfrak{J}$ -cellulaire relatif est un morphisme  $X \rightarrow Y$  où  $Y$  est une colimite  $\text{colim}_{s \in \kappa} X_s$  où  $\kappa$  est un ordinal<sup>47</sup> et  $X_{s+1}$  est obtenu comme un poussé en avant de la forme

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i_s \in I_s} A_{i_s} & \longrightarrow & X_s \\ \Pi \alpha_{i_s} \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i_s \in I_s} B_{i_s} & \xrightarrow{g} & X_{s+1} \end{array}$$

à dire de coproduits de flèches de  $\mathfrak{J}$ . On notera  $\mathfrak{J}\text{-Cell}$  la classe des morphismes  $\mathfrak{J}$ -cellulaires relatifs.

Un *complexe  $\mathfrak{J}$ -cellulaire* est un objet  $Y$  tel que  $0 \rightarrow Y$  est  $\mathfrak{J}$ -cellulaire relatif.

47. De manière générale, c'est donc une suite transfinie de poussés-en-avant. On peut se contenter de regarder que les cas de suite usuelle, c'est à dire pour  $\kappa = \mathbb{N}$  ou un ensemble fini  $\{1, \dots, n\}$ , pour comprendre la théorie générale.

Les isomorphismes sont des complexes  $\mathfrak{I}$ -cellulaires relatifs (correspondant à l'ordinal trivial).

*Remarque 2.4.2.* Les complexes cellulaires relatifs, correspondent exactement dans **Top** à ceux associés à la famille  $(\partial I^n \hookrightarrow I^n)_{n \geq 0}$  de la définition précédente. La définition peut s'interpréter comme un recollement d'une famille d'objets de la forme  $B_i$  sur  $X$  le long de  $A_i$  (ou de son image dans  $X$ ).

On considère encore une famille  $\mathfrak{I} := (A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i)_{i \in I}$ .

**Définition 2.4.3** (Objets  $\mathfrak{I}$ -injectifs et  $\mathfrak{I}$ -cofibrants). Une flèche  $f : X \rightarrow Y$  est  $\mathfrak{I}$ -injective si elle a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes de  $\mathfrak{I}$ . On notera  $\mathfrak{I}\text{-Inj}$  la classe des morphismes  $\mathfrak{I}$ -injectifs (ou parfois  $RLP(\mathfrak{I})$ ).

Une flèche  $g : A \rightarrow B$  est dite  $\mathfrak{I}$ -cofibrante si elle a la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les flèches  $\mathfrak{I}$ -injectives. On notera  $\mathfrak{I}\text{-Cof}$  la classe des morphismes  $\mathfrak{I}$ -cofibrants (ou parfois  $LLP(RLP(\mathfrak{I}))$ ).

*Remarque 2.4.4.* On définit dualement des notions de  $\mathfrak{I}$ -projectifs et  $\mathfrak{I}$ -fibrations. On peut remarquer alors que  $\mathfrak{I}\text{-Cof} = (\mathfrak{I}\text{-Inj})\text{-Proj}$ .

L'idée sous-jacente à la définition précédente est que les flèches  $\mathfrak{I}$ -injectives sont précisément celles que l'on souhaite être les fibrations ou fibrations acycliques (comme dans la proposition 2.3.16). Les  $\mathfrak{I}$ -cofibrations seront alors, par définition, ce que doivent être les cofibrations acycliques ou cofibrations dans une catégorie de modèle.

Ceci est articulé précisément dans la définition suivante.

**Définition 2.4.5.** Une catégorie de modèle  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  est *cofibrement engendrée* si il existe des ensembles de morphismes  $\mathfrak{I} := (A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i)_{i \in I}$  et  $\mathcal{J}_{ac} := (A'_j \xrightarrow{\beta_j} B'_j)_{j \in J}$  tels que

- (1) les fibrations acycliques sont exactement les  $\mathfrak{I}$ -injectives,
- (2) les fibrations sont exactement les  $\mathcal{J}_{ac}$ -injectives,
- (3) Les domaines des flèches  $\alpha_i$  de  $\mathfrak{I}$  sont petits par rapport à la classe  $\mathfrak{I}\text{-Cell}$ ,
- (4) Les domaines des flèches  $\beta_j$  de  $\mathcal{J}_{ac}$  sont petits par rapport à la classe  $\mathcal{J}_{ac}\text{-Cell}$ .

Les deux dernières hypothèses techniques sont vérifiées si les domaines sont compacts (et c'est souvent comme ça qu'on le vérifie). Le rôle de ces hypothèses est de garantir que certaines constructions par colimites se comportent bien (comme l'argument du petit objet) dans ces catégories de modèles et de pouvoir caractériser les cofibrations et cofibrations acycliques facilement, voir la proposition 2.4.8.

*Remarque 2.4.6.* Il suit de la définition que les flèches de  $\mathfrak{I}$  sont des cofibrations et celles de  $\mathcal{J}_{ac}$  des cofibrations acycliques. On les appelle respectivement *cofibrations génératrices* et *cofibrations acycliques génératrices*. La définition et la proposition 2.4.8 impliquent de fait que toute la structure des fibrations, cofibrations et les variantes acycliques sont déterminées par les ensembles  $\mathfrak{I}$  et  $\mathcal{J}_{ac}$  par propriétés de relèvement successives. Il suit alors aussi que les équivalences faibles sont déterminées par elles aussi d'après le Corollaire 2.1.14.

*Exemple 2.4.7.* • On a vu (Proposition 2.3.16 et Théorème 2.3.2) que les structures de modèles projectives forment une structure de modèles cofibrement engendrées.

- La structure de Quillen sur les espaces topologiques est aussi une structure de modèle cofibrement engendrée (cf la feuille de TD 3).
- La structure de modèle de Strøm n'en est pas une en revanche.

Un des avantages d'avoir une structure de modèle cofibrement engendrée est que l'on peut caractériser facilement les cofibrations à partir de la famille génératrice.

**Proposition 2.4.8.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle cofibrement engendrée.

- (1) Les cofibrations sont des rétractes de morphismes  $\mathfrak{I}$ -cellulaires,
- (2) les cofibrations acycliques sont des rétractes de morphismes  $\mathcal{J}_{ac}$ -cellulaires
- (3) les cofibrations sont exactement les flèches  $\mathfrak{I}$ -cofibrantes, c'est à dire  $\mathcal{C} = \mathfrak{I}\text{-Cof}$ ,
- (4) Les cofibrations acycliques sont exactement les flèches  $\mathcal{J}_{ac}$ -cofibrantes, c'est à dire  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = \mathcal{J}_{ac}\text{-Cof}$ .

*Démonstration.* Les arguments pour démontrer cette proposition sont essentiellement ceux de la preuve du théorème 2.4.9. Démontrons les point (2) et (4) par exemple ; les autres étant similaires. Par définition,  $\mathcal{J}_{ac}\text{-Cof} = LLP(\mathcal{J}_{ac} - \text{Inj}) = LLP(\mathcal{F})$  par la propriété (2) de la définition d'une catégorie de modèle cofibrante. Ainsi le point (4) est juste la proposition 2.1.13. Passons à (2) : soit maintenant  $f$  une cofibration acyclique. Par l'argument du petit objet 2.3.22 (valide par la propriété (4) de la définition 2.4.5), un tel morphisme se factorise sous la forme  $f = p \circ q$  où  $q$  est  $\mathcal{J}_{ac}$ -cellulaire donc une cofibration acyclique (cf remarque 2.3.23) et  $p$  une fibration (par la propriété (2) de 2.4.5). Comme  $f$  a la propriété de relèvement par rapport à

$$p : \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & C \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array} \quad , \quad \text{on en déduit que } f \text{ est un rétracte de } q : \begin{array}{ccccc} X & \xlongequal{\quad} & X & \xlongequal{\quad} & X \\ f \downarrow & & \downarrow q & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\quad h \quad} & C & \xrightarrow{\quad p \quad} & Y \end{array}$$

et donc le point (2) est démontré.  $\square$

On en arrive au théorème important de cette sous-partie.

**Théorème 2.4.9.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie complète et cocomplète, et  $\mathcal{W}$  une classe de morphismes et  $\mathfrak{I}, \mathcal{J}_{ac}$  deux ensembles de morphismes de  $\mathbf{C}$ . Alors il existe une structure de catégorie de modèle cofibrement engendrée sur  $\mathbf{C}$ , avec  $\mathcal{W}$  comme équivalences faibles,  $\mathfrak{I}$  (resp.  $\mathcal{J}_{ac}$ ) comme cofibrations (resp. cofibrations acycliques) génératrices, si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) La classe  $\mathcal{W}$  vérifie l'axiome (MC2) et est stable par rétracte.
- (2) Les domaines des flèches de  $\mathfrak{I}$  sont petits par rapport à  $\mathfrak{I}\text{-Cell}$ ,
- (3) Les domaines des flèches de  $\mathcal{J}_{ac}$  sont petits par rapport à  $\mathcal{J}_{ac}\text{-Cell}$ .
- (4) On a  $\mathcal{J}_{ac}\text{-Cell} \subset \mathcal{W} \cap (\mathfrak{I}\text{-Cof})$ .
- (5) On a  $\mathfrak{I}\text{-Inj} \subset \mathcal{W} \cap (\mathcal{J}_{ac}\text{-Inj})$ .
- (6) Soit  $\mathfrak{I}\text{-Cof} \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{J}_{ac}\text{-Cof}$  soit  $\mathcal{J}_{ac}\text{-Inj} \cap \mathcal{W} \subset \mathfrak{I}\text{-Inj}$ .

Les propriétés 2 et 3 sont vérifiées si les objets sont compacts. Les propriétés 4) et 5) énoncent que ce qui doit être une (co)fibration acyclique en est bien une. La dernière permet de vérifier l'axiome de recollement.

*Démonstration.* On définit les fibrations comme étant celles qui sont  $\mathcal{J}_{ac}$ -injectives et les cofibrations comme étant celles qui sont dans  $\mathfrak{I}\text{-Cof}$ . Notons que par définition  $\mathfrak{I}$  et de même les  $\mathfrak{I}$ -cellulaires sont donc des cofibrations.

Que les conditions soient nécessaires découle immédiatement de la définition d'une catégorie de modèle et d'une catégorie de modèle cofibrement engendrée. Les conditions (MC1) et (MC2) découlent de l'énoncé et de 1) tout comme la stabilité de  $\mathcal{W}$  par rétracte. Notons que (MC2) assure que  $\mathcal{W}$  est une sous-catégorie. Les (co)fibrations étant définies comme toutes les applications vérifiant certaines propriétés de relèvement, la stabilité par rétracte se démontre comme dans le cas des cofibrations pour la structure projective. C'est donc aussi le cas pour les versions acycliques en combinant les résultats.

Notons d'abord que l'argument du petit objet (tel que nous l'avons démontré) donne des factorisations de tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  sous la forme d'un morphisme  $\mathcal{J}_{ac}$ -cellulaire suivi d'un morphisme  $\mathcal{J}_{ac}$ -injectif et de même avec  $\mathcal{I}$  à la place  $\mathcal{J}_{ac}$ .

Les conditions 5) et 4) garantissent que les morphismes de  $\mathcal{I}-Inj$  sont des fibrations acycliques, que ceux de  $\mathcal{J}_{ac}-Cell$  sont des cofibrations acycliques. Ainsi ces factorisations fonctorielles données par l'argument du petit objet nous donne donc bien l'axiome (MC5) (car  $\mathcal{I}-Cell \subset \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{I}-Inj = \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ ,  $\mathcal{J}_{ac}-Cell \subset \mathcal{W} \cap \mathcal{C}$  et  $\mathcal{J}_{ac}-Inj = \mathcal{F}$ ).

Il nous faut alors encore vérifier l'axiome (MC4). On utilise (6). Supposons que l'on a  $\mathcal{I}-Cof \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{J}_{ac}-Cof$  (l'autre cas se traitant de manière duale). Alors les cofibrations acycliques ont bien la propriété de relèvement par rapport à toutes les fibrations ce qui est la moitié de l'axiome. Si maintenant  $f : X \rightarrow Y$  est une fibration acyclique, on doit vérifier qu'il a la propriété de relèvement par rapport à toutes les cofibrations. Par définition de ces dernières, il suffit de voir qu'il a la propriété de relèvement par rapport à celles de  $\mathcal{I}$ . On factorise alors  $f = p \circ q$  avec  $q$  une cofibration (car  $\mathcal{I}$ -cellulaire) et  $p$  dans  $\mathcal{I}$ -injective d'après l'argument du petit objet; en particulier  $p \in \mathcal{W}$  par (5) et on déduit de l'axiome 2-pour-3 ((MC2)) que  $q \in \mathcal{W}$  aussi. En particulier, vu que l'on a la première partie de (6), on a que  $f$ , qui est dans  $\mathcal{J}_{ac}-Inj$ , a la propriété de relèvement par rapport à  $q$  qui est dans  $\mathcal{W} \cap \mathcal{I}-Cof \subset \mathcal{J}_{ac}-Cof$ . Ainsi on a une factorisation dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xlongequal{\quad} & X \\ q \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ W & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

souhaité :  $X \xrightarrow{q} W \xrightarrow{h} X$  L'autre cas de figure se fait dualement.

$$\begin{array}{ccccc} & X & \xrightarrow{q} & W & \xrightarrow{h} & X \\ & f \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow f \\ & Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & Y. \end{array}$$

Notons enfin que les points (1) et (2) de la définition 2.4.5 sont des conséquences des définition choisies pour les (co)fibrations car  $RLP(LLP(RLP(\mathcal{I}))) = RLP(\mathcal{I})$  par double inclusion.  $\square$

## 2.5. FONCTEURS DE QUILLEN, FONCTEURS DÉRIVÉS

On va étudier dans cette partie des foncteurs de Quillen qui permettent de comparer des catégories de modèles et en particulier leurs catégories homotopiques. Cela va nous donner également un sens précis pour définir des "foncteurs à équivalence faible près".

**Définition 2.5.1** (*Foncteurs de Quillen*). Soit  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  deux catégories de modèle.

- (1) Un foncteur  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  est *de Quillen à gauche* si c'est un adjoint à gauche<sup>48</sup> qui préserve les cofibrations et cofibrations acycliques<sup>49</sup>.
- (2) Un foncteur  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  est *de Quillen à droite* si c'est un adjoint à droite qui préserve les fibrations et fibrations acycliques.

*Remarque 2.5.2.* Un foncteur de Quillen à gauche commute avec les colimites (comme tout adjoint à gauche) et un foncteur de Quillen à droite commute avec les limites (comme tout adjoint à droite).

Par ailleurs, nos catégories étant supposées (co)complètes, cette dernière condition est équivalente à celle d'avoir un adjoint si nos catégories sont d'une taille "raisonnable" (voir 6.2.53 ou la feuille de TD 4 pour plus de détails). On peut noter aussi que cette notion ressemble donc à celle d'être exact à droite et à gauche dans une catégorie abélienne.

Un foncteur qui préserve les colimites préserve l'objet initial  $\emptyset$  alors qu'un foncteur qui préserve les limites préserve l'objet terminal  $\{*\}$ . On en déduit alors que

- (1) Un foncteur de Quillen à gauche préserve les objets cofibrants.
- (2) Un foncteur de Quillen à droite préserve les objets fibrants.

*Exercice 2.5.3.* Démontrer les affirmations précédentes.

**Définition 2.5.4** (*Adjonction de Quillen*). Une adjonction de Quillen est une adjonction  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : R$  entre catégories de modèle telle que l'adjoint à gauche  $F$  est de Quillen à gauche et l'adjoint à droite est de Quillen à droite.

Les adjonctions de Quillen sont les foncteurs idoines pour comparer des structures de modèles.

Le lemme suivant nous dit qu'il suffit de vérifier qu'un seul des foncteurs de l'adjonction est de Quillen.

**Lemme 2.5.5.** Soit  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : R$  une adjonction entre catégories de modèles. Alors  $F$  est de Quillen à gauche si et seulement si  $R$  est de Quillen à droite.

*Démonstration.* Supposons que  $F$  soit de Quillen à gauche. Montrons que  $R$  est de Quillen à droite. Il faut montrer que si  $f : P \twoheadrightarrow Q$  est une fibration alors  $R(f) : R(P) \rightarrow R(Q)$  en est une, ce qui revient, d'après la proposition 2.1.13 à montrer que pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & R(P) \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow R(f) \\ C & \longrightarrow & R(Q) \end{array}$$

la flèche pointillée rendant le diagramme commutatif existe. Mais comme  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : R$  est une adjonction, le diagramme précédent (et l'existence de la flèche pointillée) est

48. cf l'appendice 6.2

49. c'est à dire qui envoie une cofibration sur une cofibration et une cofibration acyclique sur une cofibration acyclique

équivalent au diagramme  $L(A) \longrightarrow P$  pour lequel la flèche pointillée existe

$$\begin{array}{ccc} L(A) & \longrightarrow & P \\ \downarrow L(i) & \nearrow & \downarrow f \\ L(C) & \longrightarrow & Q \end{array}$$

puisque  $L(i)$  est une cofibration acyclique étant donné que  $L$  est de Quillen à gauche. Le cas d'une fibration acyclique ou la réciproque se démontre de même.  $\square$

*Exemple 2.5.6.* Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme d'algèbres commutatives. Munissons  $Ch(A)$  et  $Ch(B)$  de leur structure de modèle projective. Alors le foncteur  $B \otimes_A : Ch(A) \rightarrow Ch(B)$  est de Quillen à gauche. Son adjoint à droite est donné par le foncteur qui à un (complexe de)  $B$ -module associe le même (complexe) mais muni de la structure de  $A$ -module donnée par  $a \cdot m = f(a) \cdot m$ .

Un autre exemple standard est donné sous forme d'exercice :

*Exercice 2.5.7.* Soit  $\mathbf{Top}_*$  la catégorie des espaces topologiques pointés et  $U : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}$  le foncteur oubli.

- (1) Démontrer que c'est un adjoint à droite.
- (2) On munit  $\mathbf{Top}$  de la structure de modèle de Quillen (Exemple 2.1.15). Trouver une structure de modèle sur  $\mathbf{Top}_*$  telle que  $U$  soit de Quillen à droite.
- (3) Même question que la question précédente en munissant  $\mathbf{Top}$  de la structure de modèle de Strøm (Exemple 2.1.16).
- (4) A-t-on une généralisation des résultats précédents pour toute catégorie de modèle  $\mathbf{C}$  ?

Le lemme suivant sera très pratique pour garantir que certains foncteurs passent aux catégories homotopiques.

**Lemme 2.5.8** (de Brown). Soit  $H : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ , un foncteur entre deux catégories de modèles.

- (1) Si  $H$  envoie les cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des équivalences faibles, alors  $H$  envoie toute équivalence faible entre objets cofibrants sur une équivalence faible.
- (2) Si  $H$  envoie les fibrations acycliques entre objets fibrants sur des équivalences faibles, alors  $H$  envoie toute équivalence faible entre objets fibrants sur une équivalence faible.

*Remarque 2.5.9.* Un foncteur de Quillen à gauche (resp. à droite) vérifie les hypothèses du 1) (resp. 2)) et envoie donc toute équivalence faible entre objets cofibrants (resp. fibrants) sur des équivalences faibles.

*Preuve du Lemme de Brown.* Les deux preuves sont duales et on ne prouve donc que la première assertion. L'idée est de factoriser une équivalence faible  $f : A \rightarrow B$  entre objets cofibrants de manière intelligente. Le fait que  $A$  et  $B$  soient cofibrants nous dit que les morphismes canoniques  $i_A : A \rightarrow A \amalg B$  et  $i_B : B \rightarrow A \amalg B$  sont des cofibrations (Lemme 2.2.21) et on a par ailleurs que  $f$  est la composée

$A \xrightarrow{i_A} A \amalg B \xrightarrow{f \amalg id} B$ . On note  $A \amalg B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{p} B$  une factorisation de  $f \amalg id$ . Comme  $f$  est une équivalence faible, il suit de la première factorisation et de (MC2) que  $j \circ i_A$  est une équivalence faible, et une cofibration entre objets cofibrants (puisque  $A \amalg B$

l'est et que  $j$  est une cofibration alors  $C$  est bien cofibrant). Ainsi  $H(j \circ i_A)$  est une équivalence faible. De même  $H(j \circ i_B) \in \mathcal{W}$ . Mais  $H(f) = H(p \circ j \circ i_A) = H(p) \circ H(j \circ i_A)$  et il suffit de vérifier que  $H(p)$  est une équivalence faible. Or ceci découle encore de (MC2) car  $H(p) \circ H(j \circ i_B) = H(p \circ j \circ i_B) = H(id_B)$  qui est une équivalence faible ainsi que  $H(j \circ i_B)$ .  $\square$

Donnons une notion de foncteur dérivé générale pour les catégories avec équivalence faible : c'est à dire une catégorie  $\mathbf{C}$  munie d'une classe de morphismes stable par composition  $\mathcal{W}$  (appelées les équivalences faibles). Nous notons encore, comme pour les catégories de modèles qui seront notre principal exemple,  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}) : \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$  sa localisée par rapport à  $\mathcal{W}$  (Définition 2.2.1). On notera  $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}] = \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  le foncteur canonique.

**Définition 2.5.10** (*foncteurs dérivés*). Soit  $(\mathbf{C}, \mathcal{W})$  une catégorie avec équivalence faible et  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  un foncteur.

- (1) Un foncteur *dérivé à gauche* de  $F$  est la donnée d'un foncteur  $\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$  et d'une transformation naturelle<sup>50</sup>  $\mathbb{L}\tau_F : \mathbb{L}F \circ \pi \rightarrow F$  qui vérifient la propriété universelle suivante : pour toute paire  $(G, \alpha)$  où  $G : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$  est un foncteur et  $\alpha : G \circ \pi \rightarrow F$  est une transformation naturelle, il existe une *unique* transformation naturelle  $\theta_F^G : G \rightarrow \mathbb{L}F$  qui factorise  $\alpha$ , c'est à dire que

$$\alpha = G \circ \pi \xrightarrow{\theta_F^G \circ \pi} \mathbb{L}F \circ \pi \xrightarrow{\mathbb{L}\tau_F} F.$$

- (2) Un foncteur *dérivé à droite* de  $F$  est la donnée d'un foncteur  $\mathbb{R}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$  et d'une transformation naturelle<sup>51</sup>  $\mathbb{R}\tau_F : F \rightarrow \mathbb{R}F \circ \pi$  qui vérifient la propriété universelle suivante : pour toute paire  $(G, \beta)$  où  $G : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$  est un foncteur et  $\alpha : G \circ \pi \rightarrow F$  est une transformation naturelle, il existe une *unique* transformation naturelle  $\theta_G^F : \mathbb{R}F \rightarrow G$  qui factorise  $\beta$ , c'est à dire que

$$\beta = \mathbb{R}F \circ \pi \xrightarrow{\theta_G^F \circ \pi} G \circ \pi \xrightarrow{\beta} F.$$

**Lemme 2.5.11.** Un foncteur dérivé à gauche (resp. à droite), si il existe, est unique à unique isomorphisme naturel près.

*Démonstration.* C'est une conséquence habituelle de la propriété universelle, voir la feuille de TD 4 également.  $\square$

50. c'est à dire, en suivant les notations de 2-catégories, qu'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ \pi \searrow & \Uparrow \mathbb{L}\tau_F & \nearrow \mathbb{L}F \\ & \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) & \end{array}$$

qui n'est pas commutatif, mais dont le défaut de commutativité est

contrôlé par la transformation naturelle  $\mathbb{L}\tau_F$

51. c'est à dire, en suivant les notations de 2-catégories, qu'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ \pi \searrow & \Downarrow \mathbb{R}\tau_F & \nearrow \mathbb{R}F \\ & \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) & \end{array}$$

contrôlé par la transformation naturelle  $\mathbb{R}\tau_F$



*Remarque 2.5.12.* Un foncteur dérivé à gauche est la meilleure approximation par la gauche de  $F$ . C'est par définition, ce qui s'appelle une extension de Kan à droite du foncteur canonique  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ .

Lorsque  $\mathbf{C}$  est une catégorie de modèle, on dispose du critère suivant pratique pour vérifier l'existence des foncteurs dérivés.

**Proposition 2.5.13.** Soit  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  où  $\mathbf{C}$  est de modèle.

- (1) Si  $F$  envoie les cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des isomorphismes, alors son foncteur dérivé à gauche existe.
- (2) Si  $F$  envoie les fibrations acycliques entre objets fibrants sur des isomorphismes, alors son foncteur dérivé à droite existe.

*Démonstration.* Les deux preuves sont duales. Montrons seulement la première affirmation. Rappelons que l'on a une équivalence  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \cong \mathbf{Ho}(\mathbf{C}_c)$  données par le foncteur de remplacement cofibrant  $X \mapsto L(X)$  (voir le Lemme 2.2.14). On définit alors le foncteur  $\mathbb{L}F$  comme étant donné par  $X \mapsto F(L(X))$  et on a bien que l'équivalence faible  $L(X) \xrightarrow{\sim} X$  induit une flèche naturelle  $F(L(X)) \rightarrow F(X)$  qui définit une transformation naturelle  $\mathbb{L}\tau_F$ . Il reste à vérifier que  $\mathbb{L}F$  est bien définie. Par le lemme de Brown<sup>52</sup>,  $F$  envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des isomorphismes. Ainsi, le foncteur  $Y \mapsto F(Y)$  se factorise bien au travers de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_c)$  ce qui termine la construction de  $\mathbb{L}F$ .

Il reste à voir la propriété universelle. Soit  $(G, \beta)$  comme dans l'énoncé ; c'est à dire  $G : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$  est un foncteur et  $\alpha : G \circ \pi \rightarrow F$  est une transformation naturelle. Comme  $L(X) \xrightarrow{\sim} X$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ , on a que  $G(L(X)) \xrightarrow{\cong} G(X)$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}$ . Par suite, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & F(X) \\ \cong \uparrow & \searrow & \uparrow \mathbb{L}\tau_{FX} \\ G(L(X)) & \xrightarrow{\alpha_{L(X)}} & F(L(X)), \end{array}$$

$\mathbb{L}\tau_F$  et d'autre part que toute factorisation (symbolisée par la flèche en pointillé rendant le triangle supérieur commutatif) est donnée par celle-ci (puisque, le carré commutant, le triangle inférieur commute alors nécessairement aussi).  $\square$

*Remarque 2.5.14.* Il découle de la preuve de la proposition 2.5.13.(1), que si  $A$  est cofibrant, alors,  $\mathbb{L}\tau_F : \mathbb{L}F(A) \rightarrow F(A)$  est un isomorphisme. De même, dans le cas (2), si  $Y$  est fibrant alors  $\mathbb{R}\tau_F : F(Y) \rightarrow \mathbb{R}F(Y)$  est un isomorphisme.

Lorsque la catégorie but  $\mathbf{D}$  est aussi une catégorie de modèle (ou même simplement une catégorie avec équivalence faible), la notion de foncteur dérivé à valeur dans  $\mathbf{D}$  n'est plus forcément celle que l'on souhaite ; on peut souvent en pratique s'intéresser aux foncteurs dérivés à équivalence faible près dans  $\mathbf{D}$ . Cette notion est précisément la suivante :

**Définition 2.5.15** (*foncteurs dérivés totaux*). Soit  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  un foncteur entre catégories de modèles (ou avec équivalences faibles).

<sup>52</sup>. où on met la structure de modèle triviale sur  $\mathbf{D}$ , c'est à dire celle dont les équivalences faibles sont les isomorphismes, et les (co)fibrations des morphismes quelconques

- (1) Un foncteur *dérivé total à gauche* de  $F$  est la donnée d'un foncteur dérivé à gauche du foncteur composé  $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D} \xrightarrow{\pi} \mathbf{Ho}(\mathbf{D})$ .
- (2) Un foncteur *dérivé total à droite* de  $F$  est la donnée d'un foncteur dérivé à droite du foncteur composé  $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D} \xrightarrow{\pi} \mathbf{Ho}(\mathbf{D})$ .

*Notation 2.5.16.* On notera (abusivement) en général  $\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{D})$  et  $\mathbb{R}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{D})$  les foncteurs dérivés totaux gauche et droite de  $F$ . C'est à dire que si nous regardons un foncteur entre catégories de modèles, par défaut, nous ne considérerons que des foncteurs dérivés totaux, sauf mention explicite du contraire. Si on doit distinguer entre les deux notions, nous utiliserons la notation  $\mathbb{L}^{tot}F$  et  $\mathbb{R}^{tot}F$  pour les foncteurs dérivés totaux

Lorsque  $\mathbf{C}$  est une catégorie de modèle, on dispose du critère suivant pratique pour vérifier l'existence des foncteurs dérivés.

**Proposition 2.5.17.** Soit  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  où  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  sont de modèle.

- (1) Si  $F$  envoie les cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des équivalences faibles, alors son foncteur dérivé total à gauche existe.
- (2) Si  $F$  envoie les fibrations acycliques entre objets fibrants sur des équivalences faibles, alors son foncteur dérivé total à droite existe.
- (3) En particulier si  $F$  est de Quillen à gauche, son foncteur dérivé total à gauche existe et si  $G$  est de Quillen à droite, alors son foncteur dérivé total à droite existe.

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la proposition 2.5.13 au foncteur composé  $\pi \circ F$  puisque  $\pi$  envoie des équivalences faibles en isomorphismes. La dernière remarque découle de la remarque 2.5.9.  $\square$

*Remarque 2.5.18.* Il découle de la remarque 2.5.14 que, dans le cas (1), si  $A$  est cofibrant, et, dans le cas (2), si  $Y$  est fibrant, alors les applications naturelles  $\mathbb{L}\tau_F : \mathbb{L}F(A) \rightarrow \pi \circ F(A)$  ou  $\mathbb{R}\tau_F : \pi \circ F(Y) \rightarrow \mathbb{R}F(Y)$  sont des isomorphismes dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{D})$ .

*Exercice 2.5.19.* Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $M$  un  $R$ -module (on pourra choisir des catégories de modèles adéquats dans les différents cas).

- (1) Démontrer l'existence et identifier les foncteurs dérivés totaux de  $M \otimes_R - : Ch_{\geq 0}(R) \rightarrow Ch_{\geq 0}(R)$ . Les identifier avec les foncteurs dérivés et  $\mathrm{Tor}_i(-, -)$  de la définition 1.5.25.
- (2) Démontrer l'existence et identifier les foncteurs dérivés totaux de  $\mathrm{Hom}_R(-, M) : Ch_{\geq 0}(R)^{op} \rightarrow Ch_{\geq 0}(R)$  et de  $\mathrm{Hom}(M, -)$ . Les identifier avec les foncteurs dérivés et  $\mathrm{Ext}^j(-, -)$  de la définition 1.5.25. On distinguera les cas de la structure projective et injective et comment cela affecte les calculs.
- (3) En déduire que pour calculer  $\mathbb{R}\mathrm{Hom}(M, N)$  dans la catégorie homotopique, on peut remplacer  $M$  par une résolution projective,  $N$  par une résolution injective, ou les deux sans changer le résultat.
- (4) Que se passe-t-il si on remplace  $Ch_{\geq 0}(R)$  par  $Ch(R)$  ?
- (5) Les foncteurs  $- \otimes - : Ch_{\geq 0}(R) \times Ch_{\geq 0}(R) \rightarrow Ch_{\geq 0}(R)$  et  $\mathrm{Hom}(-, -) : Ch_{\geq 0}(R)^{op} \times Ch_{\geq 0}(R) \rightarrow Ch_{\geq 0}(R)$  ont-ils des foncteurs dérivés totaux ?

On va maintenant vérifier qu'une adjonction de Quillen induit une adjonction au niveau des catégories homotopiques.

D'après la remarque 2.5.9 et la proposition 2.5.17, les foncteurs dérivés totaux à gauche (resp. à droite) de foncteurs de Quillen à gauche (resp. à droite) existent toujours.

**Théorème 2.5.20.** Soit  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$  une adjonction de Quillen. Les foncteurs dérivés totaux de  $F$ ,  $G$ , forment une adjonction

$$\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(\mathbf{D}) : \mathbb{R}G$$

entre les catégories homotopiques.

*Démonstration.* Rappelons que la preuve de la proposition 2.5.13 nous dit que  $\mathbb{L}F$  se factorise sous la forme

$$\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Ho}(\mathbf{C}_c) \xrightarrow{\mathbf{Ho}(F)} \mathbf{Ho}(\mathbf{D})$$

où  $\mathbf{Ho}(F)$  est foncteur induit par  $F$  entre les catégories homotopiques et le premier foncteur est l'inverse de l'inclusion canonique  $\mathbf{C}_c \rightarrow \mathbf{C}$ , explicitement donné par le remplacement cofibrant  $X \mapsto L(X)$ .

De même  $\mathbb{R}G$  se factorise sous la forme

$$\mathbb{R}G : \mathbf{Ho}(\mathbf{D}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Ho}(\mathbf{D}_f) \xrightarrow{\mathbf{Ho}(G)} \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$$

où le premier foncteur est l'inverse de l'inclusion canonique  $\mathbf{C}_f \rightarrow \mathbf{C}$ , explicitement donné par le remplacement fibrant  $X \mapsto R(X)$ .

Il reste donc à vérifier que nous avons des isomorphismes fonctoriels

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{D})}(\mathbb{L}F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(X, \mathbb{R}G(Y))$$

c'est à dire, par construction des foncteurs dérivés et en vertu du Théorème 2.2.26, des bijections naturelles

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(L(X)), R(Y)) / \simeq \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(X), G(R(Y))) / \simeq.$$

Comme  $F$  et  $G$  sont adjoints, on a déjà des bijections naturelles  $\phi(-) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(G(L(X)), R(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(X), G(R(Y)))$ . Il faut donc voir que cette bijection naturelle passe au quotient.

Montrons que si  $f, g : F(L(X)) \rightarrow R(Y)$  sont homotopes, et que  $H : F(L(X)) \rightarrow P_{R(Y)}$  est une homotopie à droite où  $P_{R(Y)}$  est un objet en chemin de  $R(Y)$ , alors  $\phi(f), \phi(g) : L(X) \rightarrow G(R(Y))$  sont homotopes. Comme  $G$  préserve les fibrations et produits, on a que  $G(P_{R(Y)}) \rightarrow G(R(Y) \times R(Y)) \cong G(R(Y)) \times G(R(Y))$  est une fibration et par ailleurs,  $R(Y)$  étant fibrant,  $P_{R(Y)}$  l'est aussi et donc  $G$  envoie l'équivalence faible  $R(Y) \xrightarrow{\sim} P_{R(Y)}$  sur une équivalence faible. Conclusion :

$$G(Y) \rightarrow G(P_{R(Y)}) \rightarrow G(R(Y)) \times G(R(Y))$$

est un objet en chemin de  $G(R(Y))$ . La functorialité, nous donne alors que  $\phi(H) : L(X) \rightarrow G(P_{R(Y)})$  est une homotopie à droite pour  $\phi(f)$  et  $\phi(g)$ . Le sens réciproque se fait de manière duale.  $\square$

**Définition 2.5.21** (*équivalence de Quillen*). Une adjonction de Quillen  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$  est une équivalence de Quillen si l'adjonction induite  $\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(\mathbf{D}) : \mathbb{R}G$  est une équivalence de catégorie.

On ne demande en revanche évidemment pas que l'adjonction  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$  soit une équivalence.

Le critère suivant permet de caractériser les équivalences de Quillen via la structure de modèle.

**Proposition 2.5.22.** Soit une adjonction de Quillen  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$ . Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) L'adjonction  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$  est une équivalence de Quillen.
- (2) Les foncteurs  $F$  et  $G$  vérifient que : pour tout objet cofibrant  $A$  et tout objet fibrant  $Y$  on a qu'une flèche  $f : F(A) \rightarrow Y$  est une équivalence faible si et seulement si son adjoint  $A \rightarrow G(Y)$  est une équivalence faible.
- (3) Pour tout objet cofibrant  $A$  et tout objet fibrant  $Y$ , on a que les flèches

$$A \xrightarrow{\eta} G \circ F(A) \xrightarrow{G(R_{F(A)})} G(R(F(A)))$$

et

$$F(L(G(Y))) \xrightarrow{F(L_{G(Y)})} F \circ G(Y) \xrightarrow{\delta} Y$$

, induites par l'unité  $\eta$  et la counité  $\delta$  de l'adjonction, sont des équivalences faibles. Ici on a noté  $R_C : C \xrightarrow{\sim} R(C)$  et  $L_D : L(D) \xrightarrow{\sim} D$  les flèches données par les remplacements fibrants et cofibrants.

*Démonstration.* Montrons que (2)  $\Leftrightarrow$  (3) : Le morphisme  $A \xrightarrow{\eta} G \circ F(A) \xrightarrow{G(R_{F(A)})} G(R(F(A)))$  est, par définition d'une adjonction, l'adjoint de  $R_{F(A)} : F(A) \xrightarrow{\sim} R(F(A)) \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(F(A), R(F(A)))$ . Ce dernier est une équivalence faible entre un objet cofibrant, car  $F$  préserve les cofibrants, et un objet fibrant donc (2) implique que le premier morphisme est une équivalence faible. La preuve de la deuxième partie de (3) est évidemment duale.

Réciproquement, supposons que  $A$  soit cofibrant,  $Y$  fibrant, (3) est vérifié et soit  $f : F(A) \rightarrow Y$  ; on note  $\phi(f) : A \rightarrow G(Y)$  son adjoint. Par définition d'une adjonction, on a que  $\phi(f) = A \xrightarrow{\eta} G(F(A)) \xrightarrow{G(f)} G(Y)$ . On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\eta} & G(F(A)) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \\ \parallel & & \downarrow G(R_{F(A)}) & & \downarrow G(R_Y) \wr \\ A & \longrightarrow & G(R(F(A))) & \xrightarrow{G(R(f))} & G(R(Y)) \end{array}$$

puisque  $R$  est fonctoriel. Si  $f$  est une équivalence faible, alors  $R(f)$  est une équivalence faible entre objets fibrants et donc  $G(R(f))$  est une équivalence faible car  $G$  est de Quillen à droite. Il suit alors de la commutativité du diagramme et de (MC2) que la première ligne, c'est à dire  $\phi(f)$  est une équivalence faible. Si c'est  $A \rightarrow G(Y)$  qui est une équivalence, alors on obtient que  $f$  l'est en dualisant cette preuve en utilisant la counité à la place de l'unité.

Montrons que (1)  $\Leftrightarrow$  (2). L'unité de l'adjonction  $\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(\mathbf{D}) : \mathbb{R}G$  est, par définition, donnée par l'adjoint  $\tilde{\eta} : A \rightarrow \mathbb{R}G \circ \mathbb{L}F(A)$  de  $id_{\mathbb{L}F(A)} \in \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{D})}(\mathbb{L}F(A), \mathbb{L}F(A))$ . On a vu dans la preuve du Théorème 2.5.20 que cette

adjonction est donnée par l'isomorphisme

$$\phi(-) : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(L(A)), R(F(L(A)))) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(L(A), G(R(F(L(A)))))$$

après passage au quotient par la relation d'homotopie. L'unité est donc  $\phi(F(L(A)) \xrightarrow{\sim} R(F(L(A))))$ . Si (2) est vérifiée, alors, comme  $L(A)$  est cofibrant, la flèche  $L(A) \rightarrow G(R(F(L(A))))$  est une équivalence faible si et seulement si  $F(L(A)) \rightarrow R(F(L(A)))$  en est une ce qui est le cas puisque il s'agit juste de celle donnée par le remplacement fibrant. L'unité de l'adjonction est donc bien un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{D})$ . On monte dualement que la counité l'est.

Réciproquement, montrons que (1)  $\Rightarrow$  (3). Si l'unité de l'adjonction dérivée est un isomorphisme, on a que  $L(A) \rightarrow G(R(F(L(A))))$  est une équivalence faible (par le théorème 2.2.26). Déduisons en que, pour  $A$  cofibrant, la flèche  $A \xrightarrow{\eta} G \circ F(A) \xrightarrow{G(R_{F(A)})} G(R(F(A)))$  est une équivalence faible. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} L(A) & \xrightarrow{\eta} & G \circ F(L(A)) & \xrightarrow{G(R_{F(L(A)})} & G \circ R \circ F(L(A)) \\ \downarrow \wr_{L_A} & & \downarrow G \circ F(L_A) & & \downarrow G \circ R \circ F(L_A) \\ A & \xrightarrow{\eta} & G \circ F(A) & \xrightarrow{G(R_{F(A)})} & G \circ R \circ F(A). \end{array}$$

Comme  $A$  est cofibrant,  $L(A) \rightarrow A$  est une équivalence faible entre cofibrants et donc son image par  $F$  est une équivalence faible (puisque  $F$  est de Quillen à gauche). En appliquant le foncteur  $R$  on obtient une équivalence  $R \circ F(L(A)) \rightarrow R \circ F(A)$  entre objets fibrants et donc encore une équivalence faible en appliquant  $G$ . Finalement les deux flèches verticales à droite et gauche sont des équivalences faibles, et la composée horizontale supérieure aussi. Ainsi la composée horizontale inférieure l'est aussi ce qui conclut. Evidemment la deuxième partie de la preuve est duale.  $\square$

On donne quelques exemples sous forme d'exercices.

- Exercice 2.5.23.* (1) Démontrer que les structures de modèles projectives et injectives sur  $Ch(R)$  (resp. entre  $Ch_{\geq 0}(R)$  et  $Ch_{\leq 0}(R)$ ) sont Quillen équivalentes.
- (2) Démontrer que le foncteur identité induit une adjonction de Quillen entre les structures de modèles de Quillen et de Strøm sur **Top**. Est-ce une équivalence de Quillen? Peut-on trouver une sous-catégorie pleine de **Top** sur la restriction desquelles cette adjonction devient une équivalence?
- (3) On admet que les structures de modèles projectives sur les complexes de chaînes  $Ch(R)$ ,  $Ch_{\geq 0}(R)$  s'étendent aux modules sur des algèbres commutatives différentielles graduées. Démontrer que l'adjonction de Quillen de l'exemple 2.5.6 s'étend à ce cadre, et que cette adjonction est une équivalence de Quillen si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme d'algèbres qui est de plus un quasi-isomorphisme.

## 2.6. COLIMITES ET LIMITES HOMOTOPIQUES

Nous allons utiliser les notions de foncteurs dérivés totaux pour donner un sens précis aux limites et colimites à équivalence faibles près. Ces notions sont *fondamentales* en topologie algébrique. Nous allons présenter ici sommairement les idées de base, suivant les idées originales de Quillen et Bousfield-Kan. L'idée que nous allons

suivre est que les limites et colimites homotopiques sont les foncteurs dérivés totaux associées à limite et colimite. Pour cela précisons en quoi ce sont des foncteurs en commençant par une remarque élémentaire

Soit  $\mathcal{D}$  une petite<sup>53</sup> catégorie. Un foncteur  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbf{C}$  est simplement un diagramme de forme  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbf{C}$ . C'est à dire, la donnée, pour tout objet  $i \in \mathcal{D}$  d'un objet  $X_i \in \mathbf{C}$  et, pour toute flèche  $\alpha : i \rightarrow j$  dans  $\mathcal{D}$ , d'une flèche  $f(\alpha) : X_i \rightarrow X_j$ . Et ceci de telle sorte que tout diagramme commutatif de  $\mathcal{D}$  s'envoie sur un diagramme commutatif dans  $\mathbf{C}$  (en particulier  $f(\alpha \circ \beta) = f(\alpha) \circ f(\beta)$ ) et que les identités s'envoient sur l'identité.

Un morphisme de foncteurs, c'est à dire une transformation naturelle, est alors simplement un système de flèches  $\tau_i : X_i \rightarrow Y_i$  pour chaque objet  $i \in \mathcal{D}$  tel que les diagrammes  $X_i \xrightarrow{f(\alpha)} X_j$  soient commutatifs.

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f(\alpha)} & X_j \\ \tau_i \downarrow & & \downarrow \tau_j \\ Y_i & \xrightarrow{g(\alpha)} & Y_j \end{array}$$

*Notation 2.6.1.* On note  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}} := \text{Fun}(\mathcal{D}, \mathbf{C})$  la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbf{C}$  (ses objets sont les foncteurs, ses flèches les transformations naturelles).

Si  $\mathbf{C}$  est cocomplète, alors, pour toute catégorie  $\mathcal{D}$ , la colimite définit un foncteur

$$\text{colim}_{\mathcal{D}} : \mathbf{C}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbf{C}$$

défini par  $F \mapsto \text{colim}_{i \in \mathcal{D}} F(i)$ . La propriété universelle des colimites définit le foncteur sur les transformations naturelles (c'est à dire les flèches de  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$ ). De même, si  $\mathbf{C}$  est complète, pour toute catégorie  $\mathcal{D}$ , la limite donne le foncteur

$$\lim_{\mathcal{D}} : \mathbf{C}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbf{C}$$

défini par  $F \mapsto \lim_{i \in \mathcal{D}} F(i)$ .

Réciproquement, on dispose du foncteur constant  $\text{cst} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  qui à tout objet  $C \in \mathbf{C}$  associe le foncteur constant  $\text{cst}(C)$  donné sur les objets de  $\mathcal{D}$  par  $j \mapsto C$  et sur les flèches par  $\alpha \mapsto C \xrightarrow{id} C$ .

**Lemme 2.6.2.** S'il existe, le foncteur  $\text{colim}_{\mathcal{D}} : \mathbf{C}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbf{C}$  est adjoint à gauche du foncteur constant et, s'il existe, le foncteur  $\lim_{\mathcal{D}} : \mathbf{C}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbf{C}$  est adjoint à droite du foncteur constant.

*Démonstration.* On peut consulter la feuille de TD 4. □

*Remarque 2.6.3.* L'unité de l'adjonction  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}} \xrightleftharpoons[\text{cst}]{\text{colim}_{\mathcal{D}}} \mathbf{C}$  nous donne les morphismes canoniques  $F(i) \rightarrow \text{colim}_{\mathcal{D}} F$  de la colimite et de même la counité de l'autre adjonction nous donne les morphismes canoniques  $\lim_{\mathcal{D}} F \rightarrow F(j)$ .

Si, de plus,  $\mathbf{C}$  est munie d'une classe  $\mathcal{W}$  d'équivalences faibles, alors on peut munir la catégorie  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  des  $\mathcal{D}$ -diagrammes dans  $\mathbf{C}$  d'une classe d'équivalences faibles induites. On dira qu'une flèche  $\tau : X \rightarrow Y$  de  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  est une équivalence faible si chaque

<sup>53</sup>. c'est à dire qu'on a un ensemble d'objet

$\tau_i : X_i \rightarrow Y_i$  est une équivalence faible. Autrement dit les équivalences faibles sont définies objet par objet.

*Notation 2.6.4.* On note  $\mathcal{W}^{\mathcal{D}}$  les équivalences faibles de  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$ .

*Remarque 2.6.5.* Bien entendu on peut imaginer des cas où on va se donner une notion différente d'équivalences faibles, ce qui ne changera rien à la définition 2.6.6 ci-dessous ni à la première moitié de chaque énoncé du lemme 2.6.9. En revanche les structures projectives et injectives 2.6.10 n'ont plus lieu d'être considéré dans ce cas bien sûr.

**Définition 2.6.6** ((co)limites homotopiques). Soit  $(\mathbf{C}, \mathcal{W})$  une catégorie avec des équivalences faibles et  $\mathcal{D}$  une petite catégorie.

- (1) une colimite homotopique est un foncteur dérivé total à gauche  $\mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}} : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}^{\mathcal{D}}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  du foncteur  $\text{colim}_{\mathcal{D}} : \mathbf{C}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{C}$ .
- (2) une limite homotopique est un foncteur dérivé total à droite  $\mathbb{R}\text{lim}_{\mathcal{D}} : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}^{\mathcal{D}}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  du foncteur  $\text{lim}_{\mathcal{D}} : \mathbf{C}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{C}$ .

S'ils existent, ces foncteurs de (co)limites homotopiques sont uniques à unique isomorphisme naturel près.

*Notation 2.6.7.* Ces foncteurs sont souvent aussi dénotés  $\text{hocolim} = \mathbb{L}\text{colim}$  et  $\text{holim} = \mathbb{R}\text{lim}$  dans la littérature.

*Remarque 2.6.8.* On prendra garde que  $\mathbb{L}\text{colim}$  n'est pas une colimite dans la catégorie homotopique en général et que  $\mathbb{R}\text{lim}$  n'est pas une limite dans la catégorie homotopique non plus en général. Voir la feuille de TD 4. De manière générale, même si  $\mathbf{C}$  est complète et cocomplète, sa catégorie homotopique ne l'est pas forcément et ses (co)limites n'ont pas forcément le sens voulu. la raison en est que passer à la catégorie homotopique est une opération assez brutale qui oublie beaucoup d'informations et que les (co)limites dans cette catégorie perdent trop d'informations par rapport à  $\mathbf{C}$ . Un moyen de circonvenir à cet ennui (en dehors du cadre de ce cours) est de travailler avec une version enrichie/supérieure des catégories homotopiques appelées  $\infty$ -catégories et de définir des (co)limites dans ce contexte.

Comme on l'a vu dans la partie précédente, il est commode d'avoir des structures de modèle pour garantir l'existence (et comprendre leur structure) des foncteurs dérivés. Ainsi, on a envie, étant donné une structure de modèle  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ , d'en définir une sur  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$ . Rappelons qu'on a défini une structure de catégorie avec équivalences faibles sur  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$ .

On dira qu'une structure de modèle sur  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  étend les équivalences faibles  $\mathcal{W}^{\mathcal{D}}$  si les équivalences faibles de  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  contiennent  $\mathcal{W}^{\mathcal{D}}$ .

**Lemme 2.6.9.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle.

- (1) Si  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  admet une structure de modèle étendant les équivalences faibles telle que le foncteur constant  $cst : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  soit de Quillen à droite, alors la colimite homotopique  $\mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}}$  existe.

De plus si  $\alpha : F \rightarrow F'$  est une transformation naturelle entre diagrammes qui est une équivalence faible objet par objet, alors la flèche naturelle  $\mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}}(\alpha) : \mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}}(F) \rightarrow \mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}}(F')$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ .

- (2) Si  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  admet une structure de modèle étendant les équivalences faibles telle que le foncteur constant  $cst : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  soit de Quillen à gauche, alors la limite homotopique  $\mathbb{R}\lim_{\mathcal{D}}$  existe.

De plus si  $\alpha : F \rightarrow F'$  est une transformation naturelle entre diagrammes qui est une équivalence faible objet par objet, alors la flèche naturelle  $\mathbb{R}\lim_{\mathcal{D}}(\alpha) : \mathbb{R}\lim_{\mathcal{D}}(F) \rightarrow \mathbb{R}\lim_{\mathcal{D}}(F')$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.5.17 et de la définition des équivalences faibles sur les diagrammes.  $\square$

Il n'est cependant pas du tout évident de construire de telles structures de modèles pour des paires  $\mathcal{D}$  et  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  quelconques.

On a cependant des candidats évidents.

**Définition 2.6.10.** Soit  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  une catégorie de modèle et  $\mathcal{D}$  une petite catégorie.

- (1) On appelle structure projective sur  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  la classe dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles objets par objets (soit  $\mathcal{W}^{\mathcal{D}}$ ), les fibrations sont les fibrations objets par objets (soit  $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}$ ) et les cofibrations sont les transformations naturelles ayant la propriété de relèvement par rapport aux fibrations acycliques.
- (2) On appelle structure injective sur  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  la classe dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles objets par objets (soit  $\mathcal{W}^{\mathcal{D}}$ ), les cofibrations sont les cofibrations objets par objets (soit  $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ ) et les fibrations sont les transformations naturelles ayant la propriété de relèvement par rapport aux cofibrations acycliques.

**Proposition 2.6.11.** Si la structure projective définit une structure de catégorie de modèle, alors la colimite homotopique  $\mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}}$  existe et est invariante par équivalences faibles<sup>54</sup>.

Si la structure injective définit une structure de catégorie de modèle, alors la limite homotopique  $\mathbb{R}\lim_{\mathcal{D}}$  existe et est invariante par équivalences faibles<sup>55</sup>.

*Démonstration.* Si la structure projective existe, alors le foncteur constant préserve les fibrations et fibrations acycliques (puisqu'elles sont définies objet par objet). On applique alors le lemme 2.6.9. De même avec la structure injective.  $\square$

*Remarque 2.6.12.* Dans le cas de figure du lemme, d'après la remarque 2.5.18, si la structure projective existe, pour calculer la colimite homotopique, il suffit de remplacer le diagramme  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{C}$  par un remplacement cofibrant  $L(F)$  et de calculer  $\text{colim}_{\mathcal{D}} L(F)$  pour calculer  $\mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}}$ . Cela peut être plus ou moins dur. Mais dans plusieurs cas simples (par exemple un poussé-en-avant ou une suite de flèches composables), on peut faire des constructions plus simples. Voir l'exemple 2.6.19

<sup>54</sup>. c'est à dire qu'une transformation naturelle qui est une équivalence faible objet par objet induit un isomorphisme entre les colimites homotopiques comme dans le lemme 2.6.9.

<sup>55</sup>. c'est à dire qu'une transformation naturelle qui est une équivalence faible objet par objet induit un isomorphisme entre les limites homotopiques.



Nous donnons maintenant un théorème (qui combine plusieurs théorèmes non-triviaux...) garantissant l'existence de ces structures. Avant cela nous introduisons la terminologie suivante.

**Définition 2.6.13.** Nous dirons qu'une *catégorie*  $\mathcal{D}$  est *très petite* si elle a un nombre fini d'objets, un nombre fini de morphismes et qu'il existe un entier  $N$  tel que toute suite  $A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \cdots A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n$  de flèches composables ne contienne qu'au plus  $N$  flèches qui ne sont pas l'identité.

Une classe d'exemple de très petite catégorie est donnée par un ensemble fini partiellement ordonné<sup>56</sup>. C'est en particulier le cas des diagrammes décrivant des poussés-en-avant, tirés en arrières, (co)produits finis. On a bien entendu également toute catégorie avec un nombre fini de flèches.

**Définition 2.6.14.** Une catégorie de modèle est dite *combinatoire* si elle est cofibrement engendrée et qu'il existe un ensemble d'objets  $S$  qui sont compacts<sup>57</sup> tel que tout objet est une colimite filtrée d'objets de  $S$ .

Ces hypothèses supplémentaires sont essentiellement des hypothèses garantissant que la taille des structures de notre catégorie de modèle ne sont pas trop grandes. On appelle parfois ces catégories de modèle présentables.

*Exemple 2.6.15.* Les catégories de modèles  $\mathbf{C} = Ch(R)$ ,  $Ch_{\geq 0}(R)$  (munie des structures projectives ou injectives), celle des ensembles simpliciaux  $\mathbf{sEns}$  (voir Section 2.6) sont combinatoires. La catégorie  $\mathbf{Top}$  (munie de la structure de Quillen) ne l'est pas, mais est Quillen équivalente (Théorème 3.2.18) à  $\mathbf{sEns}$  qui l'est. Ceci garantit que le résultat du Théorème 2.6.16.(3) s'applique à  $\mathbf{Top}$  aussi.

**Théorème 2.6.16.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle et  $\mathcal{D}$  une petite catégorie.

- (1) Les structures projectives et injectives forment une catégorie de modèle si  $\mathcal{D}$  est très petite.
- (2) Si  $\mathbf{C}$  est une catégorie de modèle cofibrement engendrée alors les structures projectives forment une structure de modèle pour toute petite catégorie  $\mathcal{D}$ .
- (3) Si  $\mathbf{C}$  est de plus combinatoire, alors alors les structures injectives forment aussi une structure de modèle pour toute petite catégorie  $\mathcal{D}$ .

*Remarque 2.6.17.* En particulier, il suit des deux derniers points que les (co)limites homotopiques sont toutes définies dans les complexes de chaînes ou espaces topologiques ou ensembles simpliciaux.

Par ailleurs, on peut montrer que si  $\mathbf{C}$  est cofibrement engendrée (resp. combinatoire) alors les structures de modèle sur  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  sont cofibrement engendrée (resp. combinatoires).

Ainsi, lorsque  $\mathbf{C}$  est combinatoire (par exemple donc si  $\mathbf{C} = Ch(R)$  ou si  $\mathbf{C} = \mathbf{sEns}$  est la catégorie de modèle des ensembles simpliciaux), alors la catégorie de modèle  $Fun(\mathcal{S}^{op}, \mathbf{C})$  des préfaisceaux, que l'on a muni de la structure de modèle projective sur les préfaisceaux, est encore combinatoire. On peut donc définir ses (co)limites homotopiques.

56. que l'on voit comme une catégorie avec une flèche  $i \rightarrow j$ , pour  $i \neq j$ , si et seulement si  $i < j$

57. on peut se restreindre à  $\kappa$ -petit pour un cardinal  $\kappa$  à condition d'exiger que les colimites filtrées que l'on prend pour engendrer tout objet soit de taille au plus  $\kappa$

Par ailleurs, il existe d'autres hypothèses sur  $\mathcal{D}$ , par exemple être de Reedy, qui garantissent l'existence de structures de modèles étendant les équivalences faibles pour des catégories de modèles simpliciales.

*Idée de la preuve de (2) et (3).* Que les propriétés d'engendrement par une famille de petits objets d'une catégorie  $\mathbf{C}$  s'étendent aux catégories de foncteurs  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  sont des résultats généraux indépendants des catégories de modèle (mais pas du tout évident). Pour (2) et (3), le reste de l'idée est en fait de montrer que la structure de modèle est encore cofibrement engendrée. Dans le cas projectif, si on note  $\mathcal{I} = (A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i)_{i \in I}$  (respectivement  $\mathcal{J}_{ac} = (A'_j \xrightarrow{\beta_j} B'_j)_{j \in J}$ ) les cofibrations (resp. acycliques) génératrices de  $\mathbf{C}$ , alors on montre en fait que  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  est cofibrement engendrée avec comme cofibrations (resp. acycliques) génératrices l'ensemble

$$\left( F^d(A_i) \xrightarrow{F^d(\alpha_i)} F^d(B_i) \right)_{i \in I, d \in \mathcal{D}}, \quad (\text{resp. } \left( F^d(A'_j) \xrightarrow{F^d(\beta_j)} F^d(B'_j) \right)_{j \in J, d \in \mathcal{D}}).$$

Dans la définition ci-dessus, on a noté, pour tout objet  $d \in \mathcal{D}$  et tout objet  $C \in \mathbf{C}$ ,  $F^d(C) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  le foncteur  $\mathcal{D} \ni x \mapsto \coprod_{\{f:d \rightarrow x\}} C$  et agit sur une flèche  $\phi : x \rightarrow y$

dans  $\mathcal{D}$  en envoyant la “composante”  $C$  correspondant à  $f$  par l'identité sur celle correspondant à  $\phi \circ f$ . Une flèche  $\gamma : C \rightarrow C'$  dans  $\mathbf{C}$  induit alors la transformation naturelle  $F^d(\gamma) : F^d(C) \rightarrow F^d(C')$  donnée, pour tout objet  $d' \in \mathcal{D}$ , par  $\coprod_{\{f:d \rightarrow d'\}} \gamma$ . On

applique alors le Théorème 2.4.9. Démontrer (3) est un peu plus ardu et utilise le fait que la “petitesse” de la catégorie donnée par l'existence des générateurs compacts permet de garantir l'existence de générateurs pour les cofibrations de la structure injective et à partir de là de reproduire le schéma précédent.  $\square$

*Exemple 2.6.18.* Dans  $Ch(R)$ , la colimite homotopique d'un diagramme  $f : P \rightarrow Q$  (autrement dit le conoyau homotopique) est donné par le cône (définition 1.4.14)  $(P_{n-1} \oplus Q_n, d(p, q) = (-d(p), d(q) - f(p)))$  du morphisme (voir la feuille de TD 4).

*Exemple 2.6.19 (Poussé-en-avant homotopique).* Par définition, pour calculer un poussé-en-avant homotopique, c'est à dire la colimite d'un diagramme  $X \in \mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  (avec  $\mathcal{D} = x \leftarrow z \rightarrow y$ ), lorsque la structure projective est de modèle, on calcule  $\mathbb{L} \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} F = \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} L(F)$  où  $L(F)$  est un remplacement cofibrant de  $F := X \leftarrow Z \rightarrow Y$  dans  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$ . D'après le TD 4, un tel remplacement est donné par un diagramme  $L_X \longleftarrow L_Z \longrightarrow L_Y$ , où  $L_Z$  est cofibrant, et une équivalence faible  $L(F) \xrightarrow{\sim} F$ . Dans le cas de **Top** ou **sEns** ou des complexes de chaînes  $Ch(R)$  et plus généralement des catégories propres à gauche<sup>58</sup>, il existe un moyen plus simple :

*Proposition 2.6.20.* Soit  $f : Z \rightarrow Y$  une flèche dans **Top** ou **sEns** munie de leur structure de Quillen ou  $Ch(R)$  munie de la structure projective. Si  $\tilde{f} : Z \rightarrow \tilde{Y}$  est un remplacement de  $f : Z \rightarrow Y$  par une cofibration, c'est à dire que  $f$  se factorise sous la forme  $f : Z \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{Y} \xrightarrow{\sim} Y$ , alors le poussé-en-avant  $X \coprod_Z \tilde{Y}$  est un modèle pour le pushout homotopique de tout diagramme  $X \leftarrow Z \xrightarrow{f} Y$ . Plus précisément, on a

<sup>58</sup>. Plus précisément ce résultat est vrai pour toute catégorie de modèle dite propre à gauche, c'est à dire telle que les poussés en avant d'équivalences faibles sont des équivalences faibles.

une équivalence faible naturelle

$$\begin{aligned} \mathbb{L} \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} (X \leftarrow Z \rightarrow Y) &= \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} (L_X \longleftarrow L_Z \longrightarrow L_Y) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} (X \leftarrow Z \rightarrow \tilde{Y}) = X \coprod_Z \tilde{Y}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Voir les solutions du TD 4.  $\square$

En particulier, étant donné deux applications continues  $A \xrightarrow{i} X$  et  $A \xrightarrow{j} Y$ , leur pushout homotopique est donné par  $X \coprod_A \operatorname{Cyl}(i) \cong X \coprod_A^h Y$  le poussé-en-avant homotopique de la définition 1.8.9. On obtient donc bien que ce dernier est invariant par homotopie faible et en particulier la proposition 1.8.12 en est une conséquence directe.

La linéarité fait que l'exemple 2.6.18 du cône se généralise au poussé-en-avant homotopique dans les complexes.

*Proposition 2.6.21.* Le quotient homotopique d'un complexe de chaînes  $P \xrightarrow{f} Q$ , c'est à dire la colimite homotopique  $\mathbb{L} \operatorname{colim}(P \xrightarrow{f} Q)$ <sup>59</sup> est équivalent au cône  $C(f)$  du morphisme  $f$ . Plus généralement si  $A \xrightarrow{f} P$  et si  $A \xrightarrow{g} Q$  sont des morphismes de complexes, alors le poussé-en-avant homotopique est équivalent au cône  $C(f - g)$  du morphisme  $f - g$ .

*Démonstration.* Voir les solutions du TD 4.  $\square$

De manière duale, dans les catégories de modèles citées ci-dessus (ou celles qui sont propres à droite), un tiré-en-arrière homotopique se calcule en rempaçant une des flèches par une fibration et en prenant le tiré-en-arrière. Dans les complexes de chaînes, on calcule ceci par le cocône  $C(f)[1]$ , qui n'est rien d'autre que le cône décalé de 1.

*Proposition 2.6.22.* Le tiré-en-arrière homotopique de  $f : A \rightarrow X$  et  $g : A \rightarrow Y$  dans les complexes de chaînes est équivalent au cocône  $coC(f - g)$ .

*Exercice 2.6.23.* Démontre le résultat cité ci-dessus sur le calcul du noyau homotopique dans  $Ch(R)$ , ainsi que le poussé-en-avant homotopique.

*Exercice 2.6.24.* On munit **Top** de la structure de Quillen (Exemple 2.1.15).

- (1) Démontrer que le pushout homotopique  $X \coprod_A^h Y$  est bien le poussé-en-avant homotopique au sens de la définition 2.6.6, c'est à dire est un objet représentant cette colimite homotopique dans **Ho(Top)** (on commencera par montrer que les cofibrations de la structure de modèle projective sur les diagrammes  $1 \leftarrow 0 \rightarrow 2$  sont données par les cofibrations objets par objets, puis par identifier la colimite homotopique associée).
- (2) Quel est le tiré-en-arrière homotopique ?

---

59. qui est équivalente au pushout homotopique  $\mathbb{L} \operatorname{colim}(0 \leftarrow P \xrightarrow{f} Q)$

### III. ENSEMBLES SIMPLICIAUX

Les ensembles simpliciaux sont un modèle combinatoire très puissant du type d'homotopie faible des espaces. En topologie algébrique, et plus encore en théorie de l'homotopie, le mot espace (en anglais ou en français) désigne très (voire le plus) souvent un ensemble simplicial.

On pourra consulter [8] pour une introduction aux ensembles simpliciaux, [13] pour une étude détaillée ainsi que les chapitres correspondants de [12] et de [20]. On pourra aussi consulter [1, chapitre Polyèdres, applications et variétés PL]

#### 3.1. COMPLEXES SIMPLICIAUX ET ENSEMBLES SIMPLICIAUX

La notion d'ensemble simplicial est provient (et est une abstraction) de la notion de complexe simplicial, aussi connu comme polyèdres. Nous rappelons ici la notion de complexe simplicial (plongé).

**Définition 3.1.1** (Simplexes). Un *simplexe*  $\sigma$  de dimension  $r$  dans un espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , pour un certain  $n \geq r$ , est l'enveloppe convexe de  $r + 1$  points indépendants<sup>60</sup>  $s_0, \dots, s_r$ . Les  $s_i$  sont appelés *sommets* de  $\sigma$ . Les *faces* de  $\sigma$  sont les simplexes de dimension  $r - 1$  dont les sommets sont des sommets de  $\sigma$ . Une *orientation* de  $\sigma$  est le choix d'un ordre sur ses sommets modulo les permutations paires.

*Exemple 3.1.2. (simplexes standards)* Le simplexe standard de dimension  $n$ ,  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , est le sous-espace

$$\Delta^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_i \geq 0 \text{ (pour tout } i) \text{ et } x_0 + \dots + x_n = 1\}.$$

On peut aussi l'identifier canoniquement avec le sous-ensemble

$$\Delta^n \cong \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n / 0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 1\}$$

via les relations  $t_i = x_0 + \dots + x_{i-1}$ .

La notation  $\Delta^n$  suggère la forme du simplexe standard. On notera que  $\Delta^0$  est juste un point et que  $\Delta^1 \cong [0, 1]$ . Plus généralement,  $\Delta^n \cong [0, 1]^n$  et son bord, c'est à dire la réunion de ses faces,  $\partial\Delta^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$ .

**Définition 3.1.3** (Complexe simplicial). Un *complexe simplicial* dans un espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble  $K$  de simplexes dans  $\mathbb{R}^n$  tel que :

- (1) si  $\sigma \in K$  alors toute face de  $\sigma$  appartient également à  $K$  ;
- (2) si  $\sigma, \tau \in K$  et  $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$  alors  $\sigma \cap \tau$  est le simplexe dont tous les sommets sont des sommets commun à  $\sigma$  et  $\tau$  ;
- (3) si  $x \in \sigma \in K$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $U$  ne rencontre qu'un nombre fini de simplexes de  $K$ .

On appelle *polyèdre* associé à un complexe simplicial  $K$  — ou *réalisation* de  $K$  — la réunion  $|K|$  de ses simplexes :

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

que l'on munit de la topologie induite par celle de l'espace euclidien ambiant.

<sup>60</sup>. C'est-à-dire que les vecteurs  $v_1 = s_1 - s_0, \dots, v_r = s_r - s_0$  sont linéairement indépendants.

La dernière condition est une condition de finitude locale; elle garantit que la topologie de  $K$  est compatible avec celle de la réunion des simplexes. En particulier un sous-espace est fermé si et seulement si son intersection avec tout simplexe est fermée. On a en fait que le polyèdre  $|K|$  est un CW-complexe, pour lequel les applications de recollement sont en fait injectives. Un contre exemple à cette condition est par exemple donné par la réunion d'intervalles dans  $\mathbb{R}^2$  passant par  $(0, 1)$  et les points  $(0, 0)$ ,  $(1/n, 0)$  ( $n > 0$ ).

La dimension maximale d'un simplexe de  $K$  est appelée **dimension de  $K$** . Noter que les complexes simpliciaux forment une catégorie : un morphisme  $f : K \rightarrow L$  est un ensemble d'applications linéaires sur les simplexes compatibles sur les faces.

Par ailleurs un complexe simplicial  $K$  est fini si et seulement si le polyèdre associé  $|K|$  est compact.

La définition ci-dessus est une définition concrète (et essentiellement géométrique) des complexes simpliciaux, c'est à dire provenant d'un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  avec une topologie qui, localement, coïncide avec celle des simplexes.

Il existe aussi une notion *purement combinatoire*, et plus générale, de *complexe simplicial abstrait*. Cette dernière est définie comme un ensemble de sommets  $\{v_i, i \in I\}$  et un ensemble "abstrait" de faces, qui sont des sous-ensembles finis de  $\{v_i, i \in I\}$ , vérifiant les propriétés 3.1.3.(1) et 3.1.3.(2). A un tel espace, on peut définir une réalisation géométrique mais qui ne se plonge pas nécessairement dans  $\mathbb{R}^n$  (à moins de supposer une condition analogue à 3.1.3.(3)); en général on peut cependant le plonger dans un  $\mathbb{R}^I$  de la même manière que les complexes simpliciaux ci-dessus en imposant la topologie de la réunion. On ne va pas s'attarder sur cette définition car nous donnerons directement la définition de la réalisation adéquate pour les ensembles simpliciaux.

Cette version générale des complexes simpliciaux abstrait permet de traiter plus d'exemples mais souffre de trois défauts majeurs des complexes simpliciaux. Premièrement, le produit de deux complexes simpliciaux n'est pas un complexe simplicial. Plus exactement, le produit de deux polyèdres est bien un polyèdre, mais sa structure de complexe simplicial ne se détermine pas directement à partir de la donnée de la structure des complexes simpliciaux (regarder l'exemple de  $\Delta^1 \times \Delta^1$  est parlant). Par ailleurs, il existe un certain nombre de CW-complexes simples<sup>61</sup> que l'on souhaite voir comme des objets triangulés mais qui ne sont pas des polyèdres. Par exemple, la présentation d'un cercle comme la donnée d'un intervalle dont on a identifié les deux extrémités n'est pas un polyèdre. Ce dernier point est lié au fait qu'il n'y a que trop peu d'applications "simpliciales" en tout cas dans un sens naïf. Enfin, la donnée combinatoire donnée, n'est pas suffisante pour encoder toute la structure homotopique d'un polyèdre. Un premier indice de ce point est que pour voir l'invariance par homotopie de l'homologie singulière, il faut décomposer des prismes en sous-simplexes et que de même, l'invariance de l'homologie simpliciale n'est pas aisée.

Ces problèmes peuvent être résolus par les *ensembles simpliciaux*, qui consistent à rajouter aux complexes simpliciaux des simplexes "dégénérés"<sup>62</sup>, c'est à dire des

61. par exemple les  $\Delta$ -complexes de [10]

62. plus précisément, on va autoriser dans un simplexe à avoir plusieurs fois un même sommet. En particulier pour chaque  $i$ -simplexe on aura  $i+1$  simplexes dégénérés de dimension  $i+1$  correspondant aux  $i+1$  sommets qu'on peut doubler. Chacun de ces  $i+1$ -simplexes va lui même engendrer  $i+2$  simplexes de dimension  $i+2$  etc...

simplexes qu'on a écrasé sur des faces (voir des sous-faces), qui tiennent compte de la structure cellulaire des produits et de données homotopiques.

Pour cela nous introduisons la catégorie suivante

**Définition 3.1.4.** La catégorie  $\Delta$  est la catégorie des ordinaux finis et des applications préservant l'ordre. Précisément, ses *objets* sont les ensembles ordonnés  $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$  (munis de l'ordre naturel  $0 < 1 < \dots$ ) et ses morphismes sont les applications croissantes (au sens large).

On a donc un objet par entier naturel.

**Lemme 3.1.5.** Toute application  $[n] \rightarrow [m]$  dans  $\Delta$  se factorise *uniquement* sous la forme de la composée d'une surjection croissante suivie d'une inclusion croissante. De plus

- Les injections croissantes sont engendrées par les applications  $d^i : [n-1] \rightarrow [n]$  (où  $i = 0, \dots, n$ ) définies par

$$d^i(j) = j \text{ si } j < i \text{ et } d^i(j) = j + 1 \text{ si } j \geq i,$$

- les surjections croissantes sont engendrées par les  $s^j : [n] \rightarrow [n-1]$  (où  $j = 0 \dots n-1$ ) définies par

$$s^j(k) = k \text{ si } k \leq j \text{ et } s^j(k) = k - 1 \text{ si } k \geq j + 1.$$

- Les relations entre les  $s^j$  et  $d^i$  sont engendrées par

$$(13) \quad \begin{cases} d^j d^i = d^i d^{j-1} & (\text{si } i < j) \\ s^j d^i = d^i s^{j-1} & (\text{si } i < j) \\ s^j d^i = id & (\text{si } i = j, j+1) \\ s^j d^i = d^{i-1} s^j & (\text{si } i > j+1) \\ s^j s^i = s^{i-1} s^j & (\text{si } i > j) \end{cases}$$

Les relations (13) sont appelées les relations cosimpliciales.

**Définition 3.1.6** (*ensemble (co)simplicial*). Soit **Ens** la catégorie des ensembles.

- Un ensemble simplicial est un foncteur  $\Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ .
- Un ensemble cosimplicial est un foncteur  $\Delta \rightarrow \mathbf{Ens}$ .
- Plus généralement un objet simplicial dans une catégorie **C** est un foncteur  $\Delta^{op} \rightarrow \mathbf{C}$  et un objet cosimplicial dans **C** est un foncteur  $\Delta \rightarrow \mathbf{C}$ .
- Les morphismes entre ensembles (co)simpliciaux sont les transformations naturelles.

*Notation 3.1.7.* On notera **sEns** la catégorie des ensembles simpliciaux ainsi définie, et plus généralement **sC** la catégorie des objets simpliciaux de **C**.

*Exemple 3.1.8 (le retour des simplexes standards).* La collection des simplexes standards  $\Delta^n$  (exemple 3.1.2) forme un *espace topologique cosimplicial*<sup>63</sup>. Plus précisément on définit le foncteur  $[n] \mapsto \Delta^n$  sur les objets et, sur les flèches génératrices de  $\Delta$ , on définit  $d_*^i : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n+1}$  et  $s_*^j : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}$  par les formules

$$\begin{aligned} d_*^i(x_0, \dots, x_n) &= (x_0, \dots, x_i, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ s_*^j(x_0, \dots, x_n) &= (x_0, \dots, x_{j-1}, x_j + x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

63. autrement dit un objet cosimplicial dans **Top**

En termes des coordonnées  $\underline{t} = (t_1 \leq \dots \leq t_n)$ , on a de manière équivalente :

$$\begin{aligned} d_*^i(\underline{t}) &= (t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_i \leq t_i \leq t_{i+1} \leq \dots \leq t_n) \\ s_*^j(\underline{t}) &= (t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq \hat{t}_j \leq \dots \leq t_n). \end{aligned}$$

(avec la convention  $t_0 = 0$ ,  $t_{n+1} = 1$ ).

Cet exemple, outre qu'il est fondamental comme nous allons le voir, à la vertu qu'il permet de se retrouver facilement les identités cosimpliciales.

Le lemme 3.1.5 implique

**Proposition 3.1.9.** Un ensemble simplicial est la même chose que la donnée d'une suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  d'ensembles et d'applications, *appelées faces*,  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$  ( $i = 0 \dots n$ ) et  $s_j : X_n \rightarrow X_{n+1}$  ( $j = 0 \dots n$ ), *appelées dégénérescences*, soumis aux relations

$$(14) \quad \begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i & (\text{si } i < j) \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & (\text{si } i < j) \\ d_i s_j = id & (\text{si } i = j, j+1) \\ d_i s_j = s_j d_{i-1} & (\text{si } i > j+1) \\ s_i s_j = s_j s_{i-1} & (\text{si } i > j) \end{cases}$$

De même, un ensemble cosimplicial est la même chose que la donnée d'une suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  d'ensembles et d'applications, *appelées cofaces*,  $d^i : X_{n-1} \rightarrow X_n$  ( $i = 0 \dots n$ ) et  $s^j : X_{n+1} \rightarrow X_n$  ( $j = 0 \dots n$ ), *appelées codégénérescences*, soumis aux relations 13.

Un *morphisme entre ensembles (co)simpliciaux* est la donnée d'une suite d'applications  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$  qui commutent avec les (co)faces et (co)dégénérescences.

La même description s'applique pour les objets (co)simpliciaux dans  $\mathbf{C}$ , en prenant une suite d'objets et en imposant que les (co)faces, (co)dégénérescences soit des flèches de  $\mathbf{C}$  bien sûr.

On appelle un élément de  $X_n$  (dans le cas d'un ensemble ou objet simplicial  $X_\bullet$ ), un  **$n$ -simplexe** de  $X_\bullet$ . On qualifiera parfois  $n$  de dimension ou de degré du simplexe.

*Notation 3.1.10.* On rencontre souvent la notation suivante

$$\begin{array}{ccccccc} & & \xrightarrow{d_3} & & \xrightarrow{d_2} & & \xrightarrow{d_1} \\ & & \xleftarrow{s_2} & & \xleftarrow{s_1} & & \xleftarrow{s_0} \\ & & \xrightarrow{d_2} & & \xrightarrow{d_1} & & \xrightarrow{d_0} \\ \cdots & X_3 & \xleftarrow{s_1} & X_2 & \xleftarrow{s_0} & X_1 & \xleftarrow{s_0} X_0 \\ & & \xrightarrow{d_1} & & \xrightarrow{s_0} & & \\ & & \xleftarrow{s_0} & & \xleftarrow{d_0} & & \\ & & \xrightarrow{d_0} & & & & \end{array}$$

pour un objet simplicial (qui permet de se rappeler du nombre de faces et de dégénérescences).

Les identités simpliciales 14 ont la conséquence suivante : on peut écrire toute itération de dégénérescences sous la forme  $s_{i_0} \dots s_{i_k}$  avec  $i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k$  et toute composée de faces sous la forme  $d_{l_m} \dots d_{l_0}$  avec  $l_0 \leq \dots \leq l_m$ .

**Définition 3.1.11** (*simplexes (non)-dégénérés*). Soit  $X$  un ensemble simplicial et  $x \in X_n$ . On dira que  $x$  est *dégénéré* s'il est dans l'image d'une dégénérescence (c'est

à dire dans  $\mathfrak{S}(s_j)$  pour un  $j$  quelconque). Dans le cas contraire on dira qu'il est *non-dégénéré*.

On dira qu'un ensemble simplicial est fini s'il n'a qu'un nombre fini de simplexes non-dégénérés.

*Exemple 3.1.12 (le  $n$ -simplexe simplicial).* On note  $\Delta_\bullet^n$  l'ensemble simplicial  $\text{Hom}_\Delta(-, [n])$  c'est à dire

$$[k] \mapsto \text{Hom}_\Delta([k], [n]).$$

Le lemme de Yoneda donne

*Lemme 3.1.13.* On a un isomorphisme naturel

$$\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta_\bullet^n, X_\bullet) \cong X_n$$

donné par  $f \mapsto f([n] \xrightarrow{id} [n])$ .

*Démonstration.* Les identités simpliciales (14) assurent qu'il suffit de connaître un morphisme d'ensembles simpliciaux sur les simplexes non-dégénérés pour le connaître sur tout  $X_\bullet$ . Notons que  $\Delta_\bullet^n$  a exactement un simplexe non-dégénéré en dimension  $n$ , donné par l'identité de  $[n] \xrightarrow{id} [n]$  et aucun en dimension  $\geq n+1$ . Il suit alors des relations simpliciales que si  $f_\bullet : \Delta_\bullet^n \rightarrow X_\bullet$  est un morphisme d'ensemble simpliciaux, alors  $f_{>n}$  est déterminée par les  $f_{\leq n}$ . Par ailleurs, tous les simplexes non-dégénérés de  $\Delta_\bullet^n$  en dimension  $< n$  sont des (itérations de) faces de  $[n] \xrightarrow{id} [n]$ . Ainsi en vertu des identités simpliciales, il suffit de connaître l'image de  $[n] \xrightarrow{id} [n]$  pour connaître leur valeur. Réciproquement étant donné  $x_n \in X_n$ , on peut lui associer  $[n] \xrightarrow{id} [n] \mapsto x_n$  et en vertu des relations simpliciales ceci s'étend bien en un morphisme d'ensemble simpliciaux (on a pas d'autres relations à vérifier puisque  $\Delta_\bullet^n$  est l'ensemble des morphismes  $[k] \rightarrow [n]$  dans  $\Delta$  sans aucune autre condition.  $\square$

On déduit du lemme précédent que pour tout ensemble simplicial  $X_\bullet$ , on a un isomorphisme naturel

$$(15) \quad \text{colim}_{\substack{\Delta_\bullet^n \rightarrow X_\bullet \\ (n \geq 0)}} \Delta_\bullet^n \cong X_\bullet.$$

*Remarque 3.1.14.* La collection des ensembles simpliciaux  $\Delta_\bullet^n$  forme elle même un objet cosimplicial dans les ensembles simpliciaux. C'est une instance du fait que  $\text{Hom}_\Delta(-, -)$  est un foncteur  $\Delta^{op} \times \Delta \rightarrow \mathbf{Ens}$  et donc naturellement un objet simplicial et cosimplicial.

Le lemme suivant explique pourquoi la connaissance des simplexes non-dégénérés détermine canoniquement un ensemble simplicial.

**Lemme 3.1.15.** Un simplexe dégénéré est obtenu comme une composée de dégénérescences d'un *unique* simplexe non-dégénéré.

*Démonstration.* La preuve est liée au fait que l'on peut scinder les dégénérescences. Supposons qu'un simplexe dégénéré s'écrive  $a = s_{i_0} \circ \cdots \circ s_{i_k}(x) = s_{j_0} \circ \cdots \circ s_{j_\ell}(y)$  avec  $x, y$  non-dégénérés (les  $i$  et  $j$  étant en ordre croissant); notons  $|x|$  et  $|y|$  la dimension de  $x$  et  $y$ . Alors, en vertu des identités simpliciales,

$$x = d_{i_k} \circ \cdots \circ d_{i_0}(a) = d_{i_k} \circ \cdots \circ d_{i_0}(s_{j_0} \circ \cdots \circ s_{j_\ell}(y)).$$



En utilisant les identités simpliciales, on peut faire passer tous les  $s_{j_k}$  à gauche dans l'écriture de droite pour obtenir  $x = s_{j'_1} \circ \cdots \circ s_{j'_m} d_{i'_1} \circ \cdots \circ d_{i'_n}(y)$ . Mais comme  $x$  est non-dégénéré par hypothèse, nécessairement  $m = 0$  et donc  $x = d_{i'_1} \circ \cdots \circ d_{i'_n}(y)$ . En particulier  $|x| = |y| - n$ . Mais en inversant les rôles de  $y$  et  $x$  on obtient aussi que  $|y| \leq |x|$  ce qui prouve que  $|x| = |y|$  et donc  $n = 0$  et  $x = y$ .  $\square$

**Exemple 3.1.16 (complexes simpliciaux).** Tout complexe simplicial donne lieu à un ensemble simplicial canonique<sup>64</sup> obtenu comme l'ensemble simplicial dont les simplexes non-dégénérés sont exactement les simplexes de  $K$  auquel on a rajouté "librement" toutes leur dégénérescences itérées (en respectant bien sûr les relations simpliciales (14) ce qui détermine les faces des simplexes dégénérés ainsi ajoutés et lesquels sont identifiés entre eux). Une formule précise est obtenue ainsi. On choisit un ordre total (préservant l'orientation si on en a choisi une) sur les sommets  $\{v_i, i \in I\}$  de  $K$  et on considère l'ensemble simplicial  $K_\bullet$  donné par

$$K_n := \{(v_{i_0} \leq v_{i_1} \leq \cdots \leq v_{i_n}) / \{v_{i_0}, \dots, v_{i_n}\} \text{ est un simplexe de } K\}$$

les suites ordonnées de sommets (avec répétitions éventuelles) de longueur  $n + 1$  dont la réunion des sommets distincts est un simplexe de  $K$  (de dimension forcément inférieure ou égale à  $n$ ). On définit les faces et dégénérescences par

$$\begin{aligned} d_j(v_{i_0} \leq v_{i_1} \leq \cdots \leq v_{i_n}) &= (v_{i_0} \leq \cdots \leq v_{i_{j-1}} \leq v_{i_{j+1}} \leq \cdots \leq v_{i_n}), \\ s_j(v_{i_0} \leq v_{i_1} \leq \cdots \leq v_{i_n}) &= (v_{i_0} \leq v_{i_0} \leq \cdots \leq v_{i_j} \leq v_{i_j} \leq \cdots \leq v_{i_n}), \end{aligned}$$

c'est à dire en omettant le  $j$ -ième sommet ou en doublant le  $j$ -ième sommet respectivement.

Un simplexe non-dégénéré de dimension  $n$  est donc précisément une suite strictement croissante  $(v_{i_0} < v_{i_1} < \cdots < v_{i_n})$  qui correspond à un simplexe de dimension  $n$  de  $K$ . Les faces d'un simplexe non-dégénéré sont alors exactement les restrictions aux faces respectives du simplexe dans  $K$ .

**Remarque 3.1.17.** L'ensemble simplicial correspondant (via la construction précédente) au simplexe standard  $\Delta^n$  (muni de l'ordre correspondant à la numérotation des coordonnées) est exactement le  $n$ -simplexe simplicial  $\Delta_\bullet^n$  de l'exemple 3.1.2.

**Définition 3.1.18 (réalisation géométrique).** Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. Sa réalisation géométrique est l'espace topologique quotient

$$|X_\bullet| := \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n / \sim$$

où  $X_n$  est muni de la topologie discrète et la relation d'équivalence est donnée par

$$(d_i(x), \underline{t}) \sim (x, d^i(\underline{t})), \quad (s_j(y), \underline{t}) \sim (y, s^j(\underline{t})) \quad \text{pour } .$$

L'ensemble singulier d'un espace topologique  $Y$  est l'ensemble simplicial

$$\text{Sing}_\bullet(Y) := \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_\bullet, Y)$$

où la structure simpliciale est donnée par la structure cosimpliciale des simplexes standards (voir exemple 3.1.8).

La réalisation géométrique et l'ensemble singuliers réalisent naturellement des foncteurs  $\mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{Top}$ ,  $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sEns}$  respectivement.

<sup>64</sup>. à un choix de bijection entre les sommets de  $K$  près

**Proposition 3.1.19.**

- (1) La réalisation géométrique est adjoint à gauche du foncteur ensemble singulier :  $|-| : \mathbf{sEns} \rightleftarrows \mathbf{Top} : \text{Sing}_\bullet(-)$ .
- (2) La réalisation géométrique  $|X_\bullet|$  d'un complexe simplicial est un CW-complexe dont les cellules de dimension  $n$  sont en bijection avec les  $n$ -simplexes non-dégénérés de  $X$  et les applications de recollement sont données par la réunion des faces.

*Remarque 3.1.20.*

- (1) En particulier la réalisation géométrique commute avec les colimites (comme tout adjoint à gauche) et le foncteur ensemble singulier  $\text{Sing}_\bullet(-)$  commute avec les limites (comme tout adjoint à droite).
- (2) Si  $X_\bullet$  est fini, alors sa réalisation géométrique est un CW-complexe fini et donc est compact.
- (3) L'adjonction de la proposition s'étend aux catégories pointées.

*Démonstration.* Soit  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, \text{Sing}_\bullet(Y))$ . Par définition cela veut dire que p on a des applications  $f_n : X_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n, Y)$  qui commutent avec les faces et dégénérescences. On lui associe une application  $\bar{\psi}(f_\bullet) : \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n \rightarrow Y$  définie sur chaque composante  $X_n \times \Delta^n$  par la formule  $(x_n, \bar{t}) \mapsto f_n(x_n)(\bar{t})$ . Cette application est continue puisque  $X_n$  est discret et que  $f_n(x_n) : \Delta^n \rightarrow Y$  l'est. Par ailleurs, puisque  $f_\bullet$  est simpliciale, on a que  $f_n(d_i(x_{n+1}))(\bar{t}) = (d_i f_{n+1}(x_{n+1}))(\bar{t}) = f_{n+1}(x_{n+1})(d_i^*(\bar{t}))$  et de même  $f_n(s_j(x_{n-1}))(\bar{t}) = f_{n-1}(x_{n-1})(s_j^*(\bar{t}))$ . Il suit que  $\bar{\psi}(f_\bullet)$  passe au quotient pour définir une application continue  $\psi(f_\bullet) : |X_\bullet| \rightarrow Y$ .

Réciproquement, si  $h : |X_\bullet| \rightarrow Y$  est une application continue, on lui associe, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'application  $\phi(h)_n : X_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n, Y)$  donnée par  $x_n \mapsto \phi(h)_n(x_n) = (t \mapsto h([x_n, \bar{t}]))$  où  $[x_n, \bar{t}] \in |X_\bullet|$  est la classe de  $(x_n, \bar{t}) \in X_n \times \Delta^n$  vu dans le quotient qu'est la réalisation géométrique. De manière analogue à ci-dessus, on voit que pour tout  $x_n \in X_n$  on a que  $\phi(h)_n(x_n)$  est bien continue et que la collection  $\phi(h) = (\phi(h)_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un morphisme d'ensemble simpliciaux. Les formules explicites nous donnent que  $\phi \circ \psi(f_\bullet) = f_\bullet$  et que  $\psi \circ \phi(h) = h$  et ce sont donc des bijections. Leur naturalité se déduit des mêmes formules. Ainsi  $\phi$  est un isomorphisme naturel  $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X_\bullet|, Y) \cong \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, \text{Sing}_\bullet(Y))$  (d'inverse  $\psi$ ).  $\square$

*Remarque 3.1.21.* De la preuve découle immédiatement que l'unité de l'adjonction est le morphisme  $\eta_{X_\bullet} : X_\bullet \rightarrow \text{Sing}_\bullet(|X_\bullet|)$  donné par  $X_n \ni x \mapsto (\bar{t} \mapsto [(x, \bar{t})])$  où  $[-]$  désigne la classe dans le quotient définissant la réalisation géométrique.

La counité de l'adjonction est l'application naturelle  $\delta_Y : |\text{Sing}_\bullet(Y)| \rightarrow Y$  donnée par  $[(\Delta^n \xrightarrow{f} Y, \bar{t})] \mapsto f(\bar{t})$ .

*Exemple 3.1.22 (le retour des complexes simpliciaux).* La réalisation géométrique de l'ensemble simplicial  $K_\bullet$  associé à un complexe simplicial (exemple 3.1.16) est canoniquement homéomorphe à la réalisation du complexe simplicial  $|K|$ . En effet, il s'agit simplement du complexe cellulaire obtenu en identifiant en dimension  $n$  les faces de chaque  $n$ -simplexe de  $K$  à leur image dans  $K^{(n-1)}$  ! En fait, la réalisation  $|K|$  est un CW-complexe dont les applications de recollement sont injectives (et affines une fois plongée).

*Exercice 3.1.23.* Identifier la structure simpliciale de l'ensemble simplicial qui a exactement deux simplexes non-dégénérés, un en degré 0 et 1 en degré 1. Démontrer que sa réalisation géométrique est un cercle.

Donner un ensemble simplicial  $S_k^n$  modélisant une sphère de dimension  $n$  tel que  $S_k^n$  est de cardinal  $1 + k^n$ .

*Exemple 3.1.24 (ensemble simplicial constant).* Un ensemble  $E$  donne lieu à un ensemble simplicial constant  $E_\bullet$  défini par  $E_n = E$  avec les faces et les dégénérescences données par l'identité. Sa réalisation géométrique est juste  $E$  muni de la topologie discrète.

Plus généralement tout ensemble simplicial dont la réalisation géométrique est homotope (faiblement homotope suffit en vertu du théorème de Whitehead) à un espace topologique discret est appelé discret également.

*Remarque 3.1.25.* La construction de la réalisation géométrique utilise le fait qu'on a un espace topologique cosimplicial "naturel", donné par les  $\Delta^n$ . Cette construction s'applique ainsi plus généralement pour des objets simpliciaux lorsque on a un objet cosimplicial naturel, voir l'exercice 6 de la feuille de TD 5.

Une conséquence de la proposition 3.1.19 est que la réalisation géométrique a son image essentielle dans la catégorie des CW-complexes et en particulier dans celle des espaces Hausdorff compactement engendrés<sup>65</sup>. On note **CGH** – **Top** cette sous-catégorie de **Top**. La réalisation géométrique a la propriété remarquable suivante.

**Proposition 3.1.26.** Le foncteur de réalisation géométrique commute aux limites (en particulier aux produits) finies dans **CGH** – **Top**. En particulier, la réalisation géométrique d'un produit d'ensembles simpliciaux *finis* commute avec les produits.

*Démonstration.* Le point essentiel pour les produits est le fait que  $\Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^m$  est une décomposition cellulaire de  $I^{n+m} \cong \Delta^{n+m} \cong |\Delta_\bullet^{n+m}|$ . Voir [13] pour une preuve.  $\square$

Des propriétés de finitude sont essentielles si on veut obtenir des limites dans **Top**. En effet, le produit dans **Top** de deux CW-complexes non localement finis n'est pas un CW-complexe en général.

*Remarque 3.1.27 (Filtration canonique).* On a vu que la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial est un CW-complexe. La filtration canonique de ce CW-complexe provient en fait d'une filtration au niveau de l'ensemble simplicial. Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. Le *n-squelette* de  $X_\bullet$  est le sous-ensemble simplicial  $X_\bullet^{\leq n} \subset X_\bullet$  engendré par les simplexes non-dégénérés de  $X_\bullet$  de dimension  $\leq n$  (autrement dit, on retire tous les simplexes non-dégénérés de dimension  $> n$  et leurs dégénérescences). On a

$$(16) \quad X_\bullet = \operatorname{colim}_n X_\bullet^{\leq n}.$$

Tout comme les CW-complexes s'obtiennent inductivement en recollant des cellules de dimension de plus en plus grande, les ensembles simpliciaux se reconstruisent à partir de leurs sommets. Soit  $X_\bullet \in \mathbf{sEns}$ . Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $ND(X)_n$  le sous-ensemble des  $n$ -simplexes non-dégénérés de  $X_\bullet$ . Pour tout  $x \in ND(X)_n$ , par l'exemple 3.1.12, on obtient un morphisme d'ensemble simplicial  $x : \Delta_\bullet^n \rightarrow X_\bullet^{\leq n}$ . La

<sup>65</sup>. c'est à dire ceux qui sont Hausdorff et tels qu'un ensemble est fermé si et seulement si son intersection avec tout compact est fermée. Par exemple un CW-complexe !

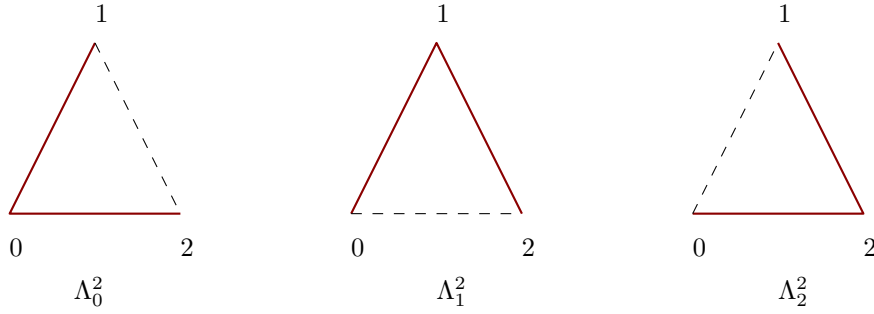


FIGURE 8. La réalisation (en rouge) des 3 cornets possibles dans  $\Delta^2$  (la face retirée est représentée en pointillé).

composition  $\partial\Delta_{\bullet}^n \hookrightarrow \Delta_{\bullet}^n \xrightarrow{x} X_{\bullet}^{\leq n}$  a son image dans  $X_{\bullet}^{\leq n-1}$  puisque  $\partial\Delta_{\bullet}^n$  n'a que des simplexes non-dégénérés en degré  $\leq n-1$ .

*Lemme 3.1.28.* Le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{ND(X)_n} \partial\Delta_{\bullet}^n & \longrightarrow & X_{\bullet}^{\leq n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{ND(X)_n} \Delta_{\bullet}^n & \longrightarrow & X_{\bullet}^{\leq n} \end{array}$$

est un poussé en avant ; autrement dit  $X_{\bullet}^{\leq n} \cong \left( \coprod_{ND(X)_n} \Delta_{\bullet}^n \right) \coprod_{\coprod_{ND(X)_n} \partial\Delta_{\bullet}^n} X_{\bullet}^{\leq n-1}$ .

*Démonstration.* Cela suit du lemme 3.1.13 et du fait que les (co)limites se calculent degré par degré dans **sEns**.  $\square$

### 3.2. STRUCTURE DE MODÈLE

On va ici définir une structure de modèle Quillen équivalente à celle de **Top**. On commence par définir deux familles d'ensembles simpliciaux utiles.

**Définition 3.2.1.** On note  $\partial\Delta_{\bullet}^n$  le sous-ensemble simplicial déduit de  $\Delta_{\bullet}^n$  en enlevant le  $n$ -simplexe non-dégénéré.

Pour tout  $0 \leq r \leq n$ , on définit aussi  $\Lambda_{r,\bullet}^n$ , appelé le  $r$ -corne, le sous-ensemble simplicial de  $\partial\Delta_{\bullet}^n$  obtenu en retirant aussi la face opposée au sommet  $r$ . Autrement dit  $\Lambda_{r,m}^n$  est le sous-ensemble des applications croissantes  $f : [m] \rightarrow [n]$  dont l'image ne contient pas l'ensemble  $[n] - \{r\}$ .

Par définition,  $\partial\Delta_{\bullet}^n$  est l'ensemble simplicial correspondant au complexe simplicial  $\partial\Delta^n$  obtenu en prenant toutes les faces du complexe standard. Sa structure est donc donnée par l'exemple 3.1.16 et sa réalisation géométrique est la sphère de dimension  $n-1$ . On a en particulier que  $\partial\Delta_k^n = \{f : [k] \rightarrow [n] \in \Delta, f \text{ non-surjective}\}$

De même, le  $r$ -corne  $\Lambda_{r,\bullet}^n$  est l'ensemble simplicial correspondant au complexe simplicial obtenu en prenant toutes les faces sauf l'intérieur de la  $r$ -ième dans le complexe simplicial standard. Sa réalisation géométrique est donc un cône de sommet  $r$ . En particulier,  $|\partial\Delta_{\bullet}^n| \cong \partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n = |\Delta_{\bullet}^n|$  est une cofibration et  $\Lambda_r^n := |\Lambda_{r,\bullet}^n| \hookrightarrow$

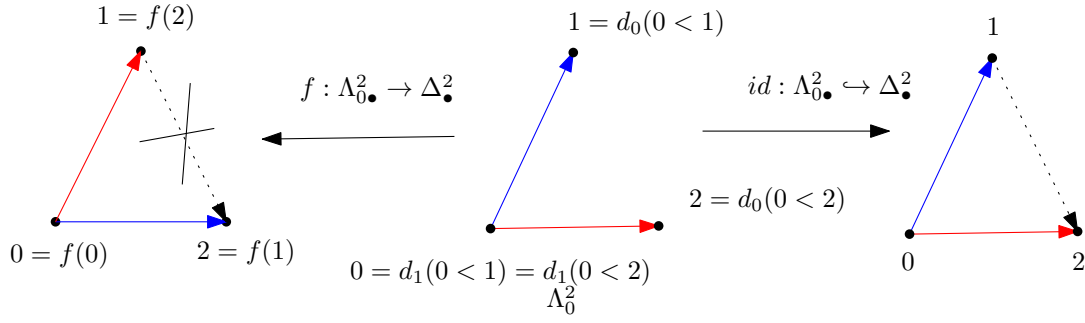


FIGURE 9. Deux morphismes de  $\Lambda_{0,\bullet}^2 \rightarrow \Delta_{\bullet}^2$ . Celui de droite, qui est l'identité admet évidemment un relèvement depuis  $\Delta_{\bullet}^2$  mais celui de gauche n'en admet pas car  $f(1) > f(2)$ .

$\Delta^n = |\Delta_{\bullet}^n|$  est une cofibration acyclique (et même un rétract par déformation forte, homéomorphe à l'inclusion d'une face  $I^{n-1} \times \{0\}$  un cube  $I^n$ ).

On notera aussi  $*_{\bullet}$  l'ensemble simplicial terminal qui est donné par le point  $\{*\}$  en tout degré  $n$ .

**Définition 3.2.2** (*Fibrations de Kan*). Un morphisme  $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$  d'ensemble simpliciaux est une fibration de Kan si elle vérifie la propriété de relèvement à droite par rapport aux inclusions  $\Lambda_{r,\bullet}^n \hookrightarrow \Delta_{\bullet}^n$  pour tout  $n$  et tout  $r = 0 \dots n$ . C'est à dire qu'il existe un relèvement  $h$  dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{r,\bullet}^n & \longrightarrow & X_{\bullet} \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ \Delta_{\bullet}^n & \longrightarrow & Y_{\bullet} \end{array}$$

rendant les deux triangles commutatifs.

Un ensemble simplicial  $X_{\bullet}$  est *fibrant* (on dit aussi de Kan ou Kan-fibrant) si  $X_{\bullet} \rightarrow *_{\bullet}$  est une fibration de Kan.

De la définition des cornets comme sous-ensembles simpliciaux de  $\Delta_{\bullet}^n$  et du lemme de Yoneda 3.1.13 on déduit

**Lemme 3.2.3.** L'ensemble  $\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Lambda_{r,\bullet}^n, X_{\bullet})$  est en bijection avec l'ensemble des  $n$ -uplets de  $n-1$ -simplexes  $(x_0, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_n)$  de  $X_{\bullet}$  vérifiant que pour tout  $i, j \neq r$  et  $i < j$ , on a  $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ .

*Démonstration.* Voir le TD 5. □

*Remarque 3.2.4.* Un ensemble simplicial n'est pas toujours fibrant. Par exemple  $\Delta_{\bullet}^n$  n'est pas fibrant pour  $n \geq 1$  comme le montre la figure 9 ou l'exemple 3.3.4).

**Lemme 3.2.5.** Une application  $f : X \rightarrow Y$  entre espaces topologiques est une fibration de Serre si et seulement si  $\text{Sing}_{\bullet}(f) : \text{Sing}_{\bullet}(X) \rightarrow \text{Sing}_{\bullet}(Y)$  est une fibration de Kan.

En particulier  $\text{Sing}_{\bullet}(X)$  est fibrant.

*Démonstration.* L'adjonction 3.1.19 donnée par la réalisation géométrique donne une bijection entre les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{r,\bullet}^n & \longrightarrow & \text{Sing}_\bullet(X) \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow \text{Sing}_\bullet(f) \\ \Delta_\bullet^n & \longrightarrow & \text{Sing}_\bullet(Y) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_r^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \Phi_h & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

Comme  $\Lambda_r^n$  est un rétracte par déformation de  $\Delta^n$  et un sous complexe, la propriété de relèvement à droite caractérise les fibrations de Serre (cf lemme 1.6.9). Le résultat en découle.  $\square$

**Théorème 3.2.6** (Quillen). La catégorie **sEns** a une structure de modèle dont les **équivalences faibles** : sont les morphismes  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  tels que  $|f| : |X_\bullet| \rightarrow |Y_\bullet|$  sont des équivalences d'homotopie faibles,

**fibrations** : sont les fibrations de Kan,

**cofibrations** : sont les morphismes  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques.

Muni de cette structure de modèle, **sEns** est cofibrement engendrée, combinatoire, avec les applications  $(\partial\Delta_\bullet^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n)_{n \in \mathbb{N}}$  comme cofibrations génératrices et les applications  $\Lambda_r^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n$  (où  $0 \leq r \leq n$  et  $n > 0$ ) comme cofibrations acycliques génératrices.

Quillen démontre aussi la caractérisation très simple et remarquable suivante des *cofibrations* : il s'agit de celles qui sont des inclusions en chaque degré, cf le corollaire 3.2.7 ci-dessous.

Nous renvoyons à [9], [12] et [14] pour une preuve détaillée. Nous nous bornons ci-dessous à donner les grandes lignes et résultats intermédiaires principaux et importants.

**Corollaire 3.2.7.** Un morphisme  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est une cofibration si et seulement si c'est une inclusion en tout degré.

*Démonstration.* Cela découle essentiellement du point (1) de la proposition 3.2.6. Notons que la propriété d'être une injection est stable par rétracte comme on l'a vu, mais aussi par poussé-en-avant et colimite indicée par un ordinal. Il suit alors que, comme les morphismes  $\partial\Delta_\bullet^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n$  sont injectifs et les cofibrations des rétractes de compositions de poussés-en-avant par des cofibrations génératrices, que toute cofibration est injective. La réciproque se voit ainsi : il suffit de montrer que tout morphisme  $X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  injectif est une colimite séquentielle de tels poussés en avant. On pose  $Y^0 = X_\bullet$  et on construit inductivement  $Y^{n+1} \hookrightarrow Y_\bullet$  comme le poussé en avant  $Y^{n+1} = Y^n \coprod_{\coprod_{ND_n} \partial\Delta_\bullet^n} \coprod_{ND_n} \Delta_n$  où  $ND_n$  est l'ensemble des  $n$ -simplexes

non dégénérés de  $Y_\bullet$  qui ne sont pas dans  $Y^n$  ; chaque tel simplexe définissant un morphisme simplicial  $x : \Delta_\bullet^n \rightarrow Y_\bullet$  par le lemme 3.1.13 dont la restriction à  $\partial\Delta_\bullet^n$  a son image dans  $Y^n$ . L'application  $Y^{n+1} \hookrightarrow Y_\bullet$  est alors donné par le poussé en avant. On peut vérifier que l'inclusion  $Y^{n+1} \hookrightarrow Y_\bullet$  ainsi définie est un isomorphisme en degré inférieur ou égal à  $n$ . La colimite  $\text{colim}_n Y^n$  est égale à  $Y_\bullet$ .  $\square$

*Remarque 3.2.8.* En particulier, tout *ensemble simplicial* est cofibrant.

Les fibrations et fibrations acycliques sont caractérisées par le lemme suivant qui est un point clé de la preuve..

**Lemme 3.2.9.** Soit  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  un morphisme dans  $\mathbf{sEns}$ .

- (1) On a que  $f$  est une fibration acyclique si et seulement si elle a la propriété de relèvement par rapport aux applications  $\partial\Delta_\bullet^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n$ .
- (2) On a que  $f$  est une fibration si et seulement si elle a la propriété de relèvement par rapport aux applications  $L_\bullet \times \Delta_\bullet^1 \cup K_\bullet \times \{0\} \hookrightarrow K_\bullet \times \Delta_\bullet^1$  pour toute inclusion (degré par degré)  $L_\bullet \hookrightarrow K_\bullet$ .
- (3) Si  $A_\bullet \xrightarrow{\sim} B_\bullet$  est une cofibration acyclique, alors pour toute inclusion (degré par degré)  $L_\bullet \hookrightarrow K_\bullet$ , le morphisme  $L_\bullet \times B_\bullet \cup_{L_\bullet \times A_\bullet} K_\bullet \times A_\bullet \hookrightarrow K_\bullet \times B_\bullet$  est une cofibration acyclique.

*Démonstration.* Pour le point (1), on renvoie à [12] ou [9] pour une preuve complète (et non-triviale ; les ingrédients sont la théorie des fibrations de Kan minimales et la proposition 3.2.11).

Explicitons un peu la preuve de (2). L'idée est de montrer que la classe des applications stables par poussés-en-avant et rétractes à partir des inclusions de cornet ou à partir des inclusions de type (2) sont les mêmes. En effet, si c'est le cas, les applications définies par propriété de relèvement à droite seront bien les mêmes et la première classe est par définition celle des fibrations.

Esquissons pourquoi  $L_\bullet \times \Delta_\bullet^1 \cup K_\bullet \times \{0\} \hookrightarrow K_\bullet \times \Delta_\bullet^1$ , avec  $L_\bullet \hookrightarrow K_\bullet$  une inclusion, est une composition (dénombrable) de pushouts par des applications du type  $\Lambda_r^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n$ , on procède comme suit. Notons pour simplifier  $Y^0 := L_\bullet \times \Delta_\bullet^1 \cup K_\bullet \times \{0\}$ . On note  $S_0$  les 0-simplexes de  $K_\bullet \times \Delta_\bullet^1$  qui ne sont pas dans  $Y^0$ . Un simplexe  $s \in S_0$  est un simplexe de la forme  $k \times \{1\} \in K_\bullet \times \Delta_\bullet^1$  où  $k \notin L_0$ . On note  $Y^1 := Y^0 \coprod_{\coprod_{S_0} \Lambda_1^1} (\coprod_{S_0} \Delta_\bullet^1)$  le

poussé en avant obtenu en recollant les points de  $S_0$  comme l'extrémité d'un segment  $\Delta_\bullet^1$  (faire un dessin). Par construction, tout sommet de  $K_\bullet \times \Delta_\bullet^1$  est inclus dans  $Y^1$ , de même que tout 1-simplexe de la forme  $v \times id_{[1]}$  où  $v \in K_1$  est dégénéré (autrement dit l'image d'un sommet) et  $id_{[1]} \in \Delta_1^1$  est l'unique 1-simplexe non dégénéré. Soit  $z \in Y_1$ , un 1-simplexe de  $K_\bullet \times \Delta_\bullet^1$  qui ne soit pas dans  $Y^1$ . Alors  $z$  s'écrit sous la forme  $z = k_1 \times \{1\}$  ou  $z = k_1 \times id_{[1]}$  (avec  $k_1 \notin L_1$  et non dégénéré) (en effet tous ceux de la forme  $z = k_0 \times id_{[1]}$ , avec  $k_0$  un simplexe dégénéré identifié avec un sommet de  $K_0 \setminus L_0$ , ont été ajouté à la première étape et les autres sont déjà dans  $Y^0$ ). Soit  $S_1$  l'ensemble de ceux de la première forme. Considérons ce premier cas : alors  $d_i(k_1 \times \{1\}) = d_i(k_1) \times \{1\}$  et on est dans une situation correspondant au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 d_0(k_1) \times \{0\} & \xrightarrow{d_0(k_1) \times id_{[1]}} & d_0(k_1) \times \{1\} \\
 \uparrow k_1 \times \{0\} & \nearrow k_1 \times id_{[1]} & \uparrow k_1 \times \{1\} \\
 d_1(k_1) \times \{0\} & \xrightarrow{d_1(k_1) \times id_{[1]}} & d_1(k_1) \times \{1\}
 \end{array}$$

dans lequel les flèches solides représentent des 1-simplexes de  $Y^1$ , les pointillées et les faces<sup>66</sup> sont dans  $(K_\bullet \times \Delta_\bullet^1)^{\leq 2}$ . On a une application canonique de  $\Lambda_1^2 \rightarrow Y^1$  donnée par la flèche verticale de gauche et la flèche horizontale du dessus. Le poussé en avant  $\Delta_\bullet^2 \coprod_{\Lambda_1^2} Y^1$  associé permet de rajouter le triangle supérieur du diagramme à  $Y^1$ .

<sup>66.</sup> ces faces sont précisément données par  $s_0(k_1) \times s_1(id_{[1]})$  et  $s_1(k_1) \times s_0(id_{[1]})$  qui ne sont pas dégénérées

Ce faisant, nous avons aussi nécessairement recollé tous les 1-simplexes de la forme  $k_1 \times id_{[1]}$  (puisque ceux-ci viennent nécessairement en compagnie d'un 1-simplexe adjacent  $k_1 \times \{1\}$ ). On appelle  $Y^2$  le recollement obtenu indicé par tous les éléments de  $S_1$ . On construit de même  $S_2$  et  $Y_3$  en recollant des prismes ouverts et ainsi de suite. On renvoie à [9] pour une preuve détaillée.

Pour démontrer que les rétractes et compositions vis à vis des cornets sont bien dans la classe des applications stables par poussés-en-avant et rétractes à partir de celles données par (2), il suffit de remarquer que les inclusions de cornet sont des rétractes d'applications simpliciales du type (2), plus précisément un rétract de  $\Lambda_{k,\bullet}^n \times \Delta_\bullet^1 \cup \Delta_\bullet^n \times \{0\} \rightarrow \Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^1$  si  $k < n$ , et de  $\Lambda_{n,\bullet}^n \times \Delta_\bullet^1 \cup \Delta_\bullet^n \times \{1\} \rightarrow \Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^1$  si  $k = n$ .

Pour (3), l'idée est similaire à (2). Ayant fixé  $L_\bullet \hookrightarrow K_\bullet$ , on obtient que la classe des morphismes de la forme  $L_\bullet \times B'_\bullet \cup_{L_\bullet \times A'_\bullet} K_\bullet \times A'_\bullet \hookrightarrow K_\bullet \times B'_\bullet$  stables par poussés-en-avant et rétractes des morphismes [13] ou [12].  $\square$

Armé du lemme 3.2.9 on peut maintenant passer à la

*Preuve du Théorème 3.2.6 sur la structure de modèle de  $\mathbf{sEns}$ .* Par définition, les fibrations de Kan sont exactement les applications avec la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations acycliques génératrices énoncées. Puisque la donnée des fibrations et équivalence fiable détermine toute la structure, il suffit donc de vérifier les hypothèses du Théorème 2.4.9 pour vérifier que les cofibrations et cofibration acycliques génératrices engendrent bien une structure de modèle sur  $\mathbf{sEns}$ . La vérification de la propriété (1) pour les équivalences faibles se ramène à celle dans **Top** qui a déjà été vue (en TD). Il suit essentiellement du Lemme 3.1.13 que les sources des cofibrations génératrices sont petites (et qu'en fait tout ensemble simplicial est petit relativement au cardinal de l'ensemble de ses sommets comme il suit de (16) et du lemme 3.1.28). Le reste des axiomes découle pour moitié de la définition des fibrations comme étant exactement celles qui sont injectives par rapport aux cofibrations acycliques génératrices et le lemme 3.2.9.(3) garantit que les  $\mathcal{J}_{ac}$ -cellulaires sont bien des cofibrations acycliques. Finalement le Lemme 3.2.9(1) assure que les fibrations sont bien les applications injectives par rapport à l'ensemble  $(\partial\Delta_\bullet^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ce qui démontre l'autre moitié restante des propriétés énoncées dans les hypothèses du théorème 2.4.9.

Sachant maintenant que la catégorie est cofibrement engendrée, qu'elle soit combinatoire découle du lemme 3.1.28 ; les objets  $(\partial\Delta_\bullet^n, \Delta_\bullet^n)_{n \geq 0}$  sont en effet générateurs de la catégorie (et compacts, en particulier petits).  $\square$

*Exercice 3.2.10.* (1) Démontrer qu'il existe des fibrations de Kan qui ne sont *pas* surjectives en tout degré simplicial. A quelle autre structure de modèle ce résultat vous-fait-il penser ?  
 (2) Démontrer qu'une fibration de Kan acyclique est surjective en tout degré simplicial.

La réalisation géométrique se comporte par ailleurs bien par rapport aux fibrations :

**Proposition 3.2.11** (Quillen). La réalisation géométrique d'une fibration de Kan est une fibration de Serre.



On renvoie à [12] pour une preuve<sup>67</sup>.

Soit  $X_\bullet, Y_\bullet$  des ensembles simpliciaux. L'ensemble des morphismes  $\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, Y_\bullet)$  peut être *enrichi* dans  $\mathbf{sEns}$  (c'est à dire muni d'une structure d'ensemble simplicial dont les sommets sont exactement les morphismes d'ensembles simpliciaux).

**Définition 3.2.12.** On note  $\text{Map}_\bullet(X_\bullet, Y_\bullet)$  l'ensemble simplicial dont les  $n$ -simplexes sont

$$\text{Map}_n(X_\bullet, Y_\bullet) := \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet \times \Delta_\bullet^n, Y_\bullet)$$

dont la structure simpliciale est donnée par la structure cosimpliciale de  $n \mapsto \Delta_\bullet^n$  (voir remarque 3.1.14).

*Terminologie 3.2.13.* On appellera  $\text{Map}_\bullet(X_\bullet, Y_\bullet)$  l'espace des morphismes simpliciaux de  $X_\bullet$  vers  $Y_\bullet$ .

Les 0-simplexes de  $\text{Map}_\bullet(X_\bullet, Y_\bullet)$  sont donc précisément les morphismes d'ensembles simpliciaux de  $X_\bullet$  vers  $Y_\bullet$ <sup>68</sup>.

*Remarque 3.2.14.* Le lemme de Yoneda pour les ensembles simpliciaux 3.1.13 se retraduit en termes d'espace des morphismes.

*Lemme 3.2.15.* Il y a un isomorphisme naturel  $\text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^0, X_\bullet) \cong X_\bullet$  d'ensembles simpliciaux.

*Démonstration.* Comme  $\Delta_\bullet^0 \times \Delta_\bullet^n \cong \Delta_\bullet^n$ , le lemme 3.1.13 nous donne pour chaque  $n$  un isomorphisme  $\psi_n : \text{Map}_n(\Delta_\bullet^0, X_\bullet) \cong \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta_\bullet^n, X_\bullet) \cong X_n$ , qui est défini par  $f_\bullet \mapsto f_n([n] \xrightarrow{\text{id}} [n])$ . La structure simpliciale de  $\text{Map}_\bullet(X_\bullet, Y_\bullet)$  est déterminée par la structure cosimpliciale de  $([n] \mapsto \Delta_\bullet^n = \text{Hom}_\Delta([\bullet], [n]))$  donnée par composition au but, notée  $h_*$ . Ainsi pour tout  $h : [n] \rightarrow [m]$  croissante et  $f_\bullet : \text{Hom}_\Delta([\bullet], [m]) \rightarrow X_\bullet$ , on a

$$\psi_n \circ h^*(f_\bullet) = \psi_n(f_\bullet \circ h_*) = ((f_\bullet \circ h_*)_n(\text{id}_{[n]})) = f_m(h) = h^* \circ \psi_m(f_\bullet)$$

ce qui nous donne bien que  $\psi_\bullet$  est un morphisme d'ensembles simpliciaux.  $\square$

**Lemme 3.2.16.** On a un isomorphisme naturel (en les 3 variables)

$$\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(L_\bullet, \text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet)) \cong \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(L_\bullet \times K_\bullet, X_\bullet)$$

*Démonstration.* L'application  $\psi : \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(L_\bullet, \text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(L_\bullet \times K_\bullet, X_\bullet)$  est donnée explicitement par

$$f = (f_n)_{n \geq 0} \mapsto (L_\bullet \times K_\bullet \xrightarrow{f \times \text{id}} \text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet) \times K_\bullet \xrightarrow{\text{eval}} X_\bullet)$$

où le morphisme d'évaluation  $\text{eval} = (\text{eval}_n : \text{Map}_n(K_\bullet, X_\bullet) \times K_n \rightarrow X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donnée, en tout degré  $n \in \mathbb{N}$ , pour  $h_n \in \text{Map}_n(K_\bullet, X_\bullet) = \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(K_\bullet \times \Delta_\bullet^n, X_\bullet)$ <sup>69</sup> et  $\kappa_n \in K_n$ , par

$$\text{eval}_n(h_n, \kappa_n) := h_n(\kappa_n, [n] \xrightarrow{\text{id}} [n]).$$

67. si la fibration de Kan  $X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est acyclique, on peut démontrer plus facilement que sa réalisation est un rétracte d'une projection  $|W_\bullet| \times |Y_\bullet| \rightarrow |Y_\bullet|$  (ce qui provient du résultat analogue avant de passer aux réalisations) où  $W_\bullet$  est contractile et donc une fibration de Serre; forcément acyclique par définition des équivalences faibles

68. et on doit penser à ses 1-simplexes comme les chemins ou homotopies entre morphismes etc

69. on a donc que chaque  $h_n$  est une collection  $h_{n,i} : K_i \times \Delta_i^n \rightarrow X_i$  (pour  $i \in \mathbb{N}$ ) qui commute avec les opérateurs de face et dégénérescences. On omettra l'indice  $i$  dans la notation dans la suite

On notera que dans la formule on utilise que la composante  $h_{n,n}$  de de degré  $n$  dans  $h_n = (h_{n,i} : K_i \times \Delta_i^n \rightarrow X_i)_{i \geq 0}$ . On a que pour tout  $h_n : K_\bullet \times \Delta_\bullet^n \rightarrow X_\bullet$ ,  $\kappa_n \in K_n$ ,

$$d_i(\text{eval}_n(h_n, \kappa_n)) = d_i(h_n(\kappa_n, [n] \xrightarrow{id} [n])) = h_n(d_i(\kappa_n), [n-1] \xrightarrow{d^i} [n]) \text{ car } h_n \text{ est simpliciale.}$$

Mais, comme la face  $d_i(h_n) : K_\bullet \times \Delta_\bullet^{n-1} \rightarrow X_\bullet$  est donné, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , par  $d_i(h_n)(\kappa_j, [j] \xrightarrow{p} [n-1]) = h_n(\kappa_j, [j] \xrightarrow{d^{i \circ p}} [n])$ , on a aussi que

$$\begin{aligned} \text{eval}_{n-1}(d_i(h_n), d_i(\kappa_n)) &= d_i(h_n)(d_i(\kappa_n), [n-1] \xrightarrow{id} [n-1]) \\ &= h_n(d_i(\kappa_n), [n-1] \xrightarrow{d^i} [n]) \end{aligned}$$

ce qui assure que  $\text{eval}$  commute bien avec les faces. On montre de même qu'il commute avec les  $s_j$  et ainsi que  $\text{eval}$  est bien un morphisme d'ensembles simpliciaux. Donc  $\text{eval} \circ f \times id$  est également un morphisme d'ensembles simpliciaux. la réciproque de  $\psi$  est construite comme suit. Notons, pour tout morphisme  $f : [k] \rightarrow [m]$  dans  $\Delta$  et tout ensemble simplicial  $Z_\bullet$ ,  $f^* : Z_m \rightarrow Z_k$  l'application induite par la structure simpliciale de  $Z_\bullet$ . On définit  $\varphi : \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(L_\bullet \times K_\bullet, X_\bullet) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(L_\bullet, \text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet))$  comme donné, pour tout morphisme simplicial  $h_\bullet : L_\bullet \times K_\bullet \rightarrow X_\bullet$  et pour tout  $\ell_n \in L_n$ , par l'élément  $\varphi(h_\bullet)(\ell_n) : K_\bullet \times \Delta_\bullet^n \rightarrow X_\bullet$ , défini par la formule, pour tout  $\kappa_i \in K_i$  et  $[i] \xrightarrow{f} [n] \in \Delta_i^n$ , donnée par

$$\varphi(h_\bullet)(\ell_n)(\kappa_i, [i] \xrightarrow{f} [n]) = h_i(f^*(\ell_n), \kappa_i) \in X_i.$$

Que  $\varphi(h_\bullet)(\ell_n) : K_\bullet \times \Delta_\bullet^n \rightarrow X_\bullet$  soit un morphisme d'ensemble simpliciaux découle du fait que  $h_\bullet$  en est un et que  $d_i = (d^i)^*$ . Par ailleurs, on vérifie comme pour  $\psi$  que  $\ell_n \mapsto \varphi(h_\bullet)$  est un morphisme d'ensembles simpliciaux de  $L_\bullet$  dans  $\text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet)$ .

On vérifie alors que  $\varphi$  est bien un inverse de  $\psi$  (ce qui revient au même genre de calcul que le dernier point).  $\square$

Le point suivant est un point important et a des variantes et généralisations dans de nombreuses catégories de modèles. Notons que si  $i : L_\bullet \rightarrow K_\bullet$  et  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  sont des morphismes simpliciaux, alors, la pré-composition par  $i$  et la post-composition par  $f$  donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet) & \xrightarrow{f \circ -} & \text{Map}_\bullet(K_\bullet, Y_\bullet) \\ \downarrow - \circ i & & \downarrow - \circ i \\ \text{Map}_\bullet(L_\bullet, X_\bullet) & \xrightarrow{f \circ -} & \text{Map}_\bullet(L_\bullet, Y_\bullet) \end{array}$$

dont on déduit un morphisme d'ensemble simplicial canonique  $\text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet) \rightarrow \text{Map}_\bullet(L_\bullet, X_\bullet) \times_{\text{Map}_\bullet(L_\bullet, Y_\bullet)} \text{Map}_\bullet(K_\bullet, Y_\bullet)$ .

**Lemme 3.2.17.** Soit  $L_\bullet \subset K_\bullet$  une cofibration et  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  une fibration de Kan. Alors le morphisme canonique

$$\text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet) \rightarrow \text{Map}_\bullet(L_\bullet, X_\bullet) \times_{\text{Map}_\bullet(L_\bullet, Y_\bullet)} \text{Map}_\bullet(K_\bullet, Y_\bullet)$$

est une fibration de Kan.

Si de plus  $L_\bullet \subset K_\bullet$  est une cofibration acyclique<sup>70</sup> ou que  $f$  est une fibration acyclique, alors c'est une fibration acyclique.

<sup>70.</sup> ce qui implique que sa réalisation géométrique est un rétracte par déformation

*Démonstration.* Pour la première assertion, il faut montrer que  $\text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^1, X_\bullet) \rightarrow X_\bullet$  a la propriété de relèvement à droite par rapport aux inclusions  $\Lambda_{r,\bullet}^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n$ . Pour la deuxième partie, par la caractérisation des fibrations acycliques (lemme 3.2.9), il faut montrer que  $\text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^1, X_\bullet) \rightarrow X_\bullet$  a la propriété de relèvement à droite par rapport aux inclusions  $\partial\Delta_\bullet^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n$ . Démontrons la deuxième dans le cas  $L_\bullet \subset K_\bullet$  est une cofibration acyclique.

De la propriété fondamentale de  $\text{Map}_\bullet(Z_\bullet, W_\bullet)$  donnée par le lemme 3.2.16, on déduit qu'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_\bullet^n & \xrightarrow{\quad} & \text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta_\bullet^n & \xrightarrow{\quad} & \text{Map}_\bullet(L_\bullet, X_\bullet) \times_{\text{Map}_\bullet(L_\bullet, Y_\bullet)} \text{Map}_\bullet(K_\bullet, Y_\bullet) \end{array}$$

est équivalent à un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_\bullet^n \times K_\bullet \cup_{\partial\Delta_\bullet^n \times L_\bullet} \Delta_\bullet^n \times L_\bullet & \xrightarrow{\quad} & X_\bullet \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta_\bullet^n \times K_\bullet & \xrightarrow{\quad} & Y_\bullet \end{array}$$

La flèche de gauche est une cofibration acyclique, c'est à dire a la propriété de relèvement par rapport à toutes les fibrations de Kan, d'après le lemme 3.2.9.(3). Le relèvement existe donc puisque la flèche de droite est une fibration de Kan. Si on a supposé que c'est  $f : X \rightarrow Y$  qui est une fibration acyclique, alors on raisonne de la même façon en utilisant seulement que la flèche de gauche est une cofibration (elle est injective).

Pour la première assertion, par le même argument, on est ramené à étudier l'existence de relèvement dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{r,\bullet}^n \times K_\bullet \cup_{\Lambda_{r,\bullet}^n \times L_\bullet} \Delta_\bullet^n \times L_\bullet & \xrightarrow{\quad} & X_\bullet \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta_\bullet^n \times K_\bullet & \xrightarrow{\quad} & Y_\bullet \end{array}$$

et on a encore que la flèche de gauche est une cofibration acyclique (cette fois ci car  $\Lambda_{r,\bullet}^n \subset \Delta_\bullet^n$  l'est).  $\square$

La structure de modèle a pour conséquence le corollaire important suivant, qui explique pourquoi les ensembles simpliciaux encodent les types d'homotopie faibles.

**Corollaire 3.2.18** (Quillen). ) L'adjonction  $| - | : \mathbf{sEns} \rightleftarrows \mathbf{Top} : \text{Sing}_\bullet(-)$  est une équivalence de Quillen. En particulier les catégories homotopiques de  $\mathbf{Top}$  et  $\mathbf{sEns}$  sont équivalentes.

*Remarque 3.2.19.* Comme la réalisation géométrique se factorise au travers des CW-complexes et donc des espaces compactement engendrés de Hausdorff, cette équivalence de Quillen identifie aussi les catégories homotopiques des ensembles simpliciaux avec celle des types d'homotopies d'espaces homotopes à des CW-complexes.

En particulier la counité de l'adjonction  $\delta_Y : |\mathrm{Sing}_\bullet(Y)| \rightarrow Y$  est donc une équivalence d'homotopie faible pour tout espace  $Y$ . Comme  $|\mathrm{Sing}_\bullet(Y)|$  est un CW-complexe, cela prouve que tout espace topologique est fonctoriellement faiblement homotopiquement équivalent à un CW-complexe.

*Démonstration.* Nous ne donnons que les grandes lignes de l'argument. Il faut commencer par montrer que l'adjonction est de Quillen. Pour cela, il suffit de voir que l'ensemble simplicial  $\mathrm{Sing}_\bullet$  préserve fibrations et fibrations acycliques (d'où il découlera immédiatement que la réalisation géométrique préserve cofibrations et cofibrations acycliques Lemme 2.5.5). Or on a vu que  $\mathrm{Sing}_\bullet$  préserve les fibrations (lemme 3.2.5). Il préserve aussi les fibrations acycliques. En effet : par le lemme 3.2.9.(1) et l'argument du lemme 3.2.5, on a que  $\mathrm{Sing}_\bullet$  envoie les fibrations acycliques sur les applications ayant la propriété de relèvement par rapport aux inclusions  $S^{n-1} \hookrightarrow I^n$ . Or ces dernières sont exactement les fibrations de Serre acycliques (voir la feuille de TD 3). Ainsi  $\mathrm{Sing}_\bullet$  est de Quillen à droite et donc  $|-|$  de Quillen à gauche.

Pour voir que c'est une équivalence de Quillen, en vertu de la Proposition 2.5.22, il suffit de montrer que pour tout ensemble simplicial  $A_\bullet$  (nécessairement cofibrant) et tout espace topologique  $Y$  (nécessairement fibrant), on a qu'une application continue  $f : |A_\bullet| \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie faible si et seulement si le morphisme adjoint  $\phi_f : A_\bullet \rightarrow \mathrm{Sing}_\bullet(Y)$  est une équivalence faible dans  $\mathbf{sEns}$ , c'est à dire que  $|\phi_f| : |A_\bullet| \rightarrow |\mathrm{Sing}_\bullet(Y)|$  est une équivalence d'homotopie faible.

La counité de l'adjonction nous donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} |A_\bullet| & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow |\phi_f| & \nearrow \delta_Y \\ & |\mathrm{Sing}_\bullet(Y)| & \end{array}$$

Ainsi il suffit de montrer que la counité  $\delta_Y : |\mathrm{Sing}_\bullet(Y)| \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie faible. Pour cela on va utiliser les groupes d'homotopie simpliciaux de la section 3.3.

Comme  $\mathrm{Sing}_\bullet(Y)$  est fibrant, il résulte de la proposition 3.3.13 dans la section suivante que pour tout  $v \in Y$  (également identifié avec l'application constante  $\Delta^n \rightarrow Y$  qui vaut  $v$  en tout point), on a  $\pi_n(|\mathrm{Sing}_\bullet(Y)|, |v|) \cong \pi_n(\mathrm{Sing}_\bullet(Y), v)$  où les groupes d'homotopie à droite sont les groupes d'homotopie simpliciaux. Or on a vu dans le lemme 3.3.9 que tout élément de  $\pi_n(\mathrm{Sing}_\bullet(Y), v)$  est représenté par un morphisme  $\alpha : \Delta_\bullet^n \rightarrow \mathrm{Sing}_\bullet(Y)$  dont la restriction à  $\partial\Delta_\bullet^n$  est le morphisme constant  $v$ . Par adjonction, on a que ces morphismes sont en bijection avec ceux de  $\Delta_\bullet^n \cong |\Delta_\bullet^n| \rightarrow Y$  qui envoie  $S^{n-1} \cong |\partial\Delta_\bullet^n|$  sur  $v$ . De même,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^1, \mathrm{Sing}_\bullet(Y)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^1|, Y) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta_\bullet^n| \times |\Delta_\bullet^1|, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n \times I, Y) \end{aligned}$$

car le produit d'ensembles simpliciaux finis commute avec la réalisation géométrique (Proposition 3.1.26).  $\square$



FIGURE 10. La relation de symétrie à gauche et de transitivité à droite.

### 3.3. GROUPES D'HOMOTOPIE SIMPLICIAUX

On explique ici une version purement combinatoire des groupes d'homotopie. Au vu de la Proposition 2.2.20, les relations d'homotopie donnent une relation d'équivalence sur les morphismes si la source est cofibrante et la cible est fibrante. Dans les espaces topologiques, pour étudier les groupes d'homotopie, cela ne pose aucun problème puisque tout espace est fibrant et que les sphères sont cofibrantes (voir par ailleurs exercice 2.2.30). En revanche cette hypothèse ne tient plus pour des ensembles simpliciaux et va nous obliger à considérer des ensembles simpliciaux fibrants.

Commençons par la relation d'homotopie entre sommets.

**Définition 3.3.1.** Deux sommets  $x_0, x_1$  dans  $X_0$  sont dits homotopes, noté  $x_0 \sim x_1$  si il existe un 1-simplexe  $H \in X_1$  tel que

$$d_0(\sigma) = x_1 \quad \text{et} \quad d_1(\sigma) = x_0.$$

**Lemme 3.3.2.** Si  $X_\bullet$  est fibrant, la relation d'homotopie entre les sommets est une relation d'équivalence.

*Notation 3.3.3.* On note  $\pi_0(X_\bullet) := X_0 / \sim$  le quotient de  $X_0$  par la relation d'homotopie sur les sommets.

*Démonstration.* La réflexivité de  $\sim$  est donnée par  $s_0(x)$  et la relation  $d_0 s_0(x) = d_1 s_0(x) = x$ . La symétrie et la transitivité sont exhibées par la figure 10 où on a dessiné en rouge deux arêtes données et en pointillé bleu l'arête qui existe par propriété de relèvement d'un morphisme du 2-simplexe par rapport à un morphisme défini seulement sur un cornet.

□

*Exemple 3.3.4.* Montrons que la relation d'homotopie n'est pas symétrique sur  $\Delta_\bullet^n$  (pour  $n \geq 1$ ). Ce qui en particulier prouve que ce dernier n'est pas fibrant. Considérons les sommets 0 et 1 (donné par les applications  $0 \mapsto 0, 1$ ), le 1-simplexe non dégénéré  $f(0) = 0, f(1) = 1$  donne une homotopie entre 0 et 1. Mais il n'y a aucune arête de 1 vers 0 car une telle arête serait une application strictement décroissante de  $[1]$  dans  $[n]$ .

**Lemme 3.3.5.** Si  $X_\bullet$  est fibrant, on a un isomorphisme naturel  $\pi_0(X_\bullet) \cong \pi_0(|X_\bullet|)$ .

*Démonstration.* Notons, pour  $v \in X_0$ ,  $X_{\bullet|v}$  le sous-ensemble simplicial formés de tous les simplexes dont l'une des faces itérées est  $v$ . Par le lemme précédent, on a

que si  $v \sim w$ , alors  $X_{\bullet|v} = X_{\bullet|w}$ . On en déduit que  $X_{\bullet} = \coprod_{[v] \in \pi_0(X_{\bullet})} X_{\bullet|v}$ . Puisque la réalisation géométrique commute avec les colimites, on a  $|X_{\bullet}| \cong \coprod_{[v] \in \pi_0(X_{\bullet})} |X_{\bullet|v}|$ . Par ailleurs, tout simplexe de  $X_{\bullet|v}$  est relié à  $v$  par une suite de faces. Il suit de la description explicite de la réalisation géométrique que  $|X_{\bullet|v}|$  est connexe par arcs. Ce qui conclut la preuve.  $\square$

Il y a plusieurs façons équivalentes de définir les groupes d'homotopie supérieurs. Nous allons en donner une qui généralise trivialement la précédente. Remarquons que les groupes d'homotopie supérieurs  $\pi_n(X, x)$  d'un espace topologique sont simplement les classes d'homotopie de l'espace topologique (muni de la topologie compact-ouverte)  $\Omega_x^n X := \{f : I^n \rightarrow X, / f(\partial I^n) = x\}$ . Cet espace étant la fibre de l'application de restriction envoyant  $f : I^n \rightarrow X$  sur  $f : \partial I^n \rightarrow X$ , on généralise cette définition comme suit. On définit

*Notation 3.3.6.* Soit  $v \in X_0$ . On note

$$\Omega_v^n(X_{\bullet})_{\bullet} := \text{Fibre}_v(\text{Map}_{\bullet}(\Delta_{\bullet}^n, X_{\bullet}) \rightarrow \text{Map}_{\bullet}(\partial \Delta_{\bullet}^n, X_{\bullet}))$$

la fibre en l'application constante  $v$  de l'application de restriction.

Comme  $\partial \Delta_{\bullet}^n \rightarrow \Delta_{\bullet}^n$  est une cofibration (elle est injective), l'ensemble simplicial  $\Omega_v^n(X_{\bullet})_{\bullet}$  est fibrant par le lemme 3.2.17.

**Définition 3.3.7.** Soit  $X_{\bullet}$  un ensemble simplicial fibrant. Pour tout sommet  $v \in X_{\bullet}$ , on définit, le  $n$ ième groupe d'homotopie simpliciale en  $v$  de  $X_{\bullet}$  par

$$\pi_n(X_{\bullet}, v) := \pi_0(\Omega_v^n(X_{\bullet})_{\bullet})$$

*Remarque 3.3.8.* Les 0-simplexes de  $\Omega_v^n(X_{\bullet})_{\bullet}$  sont donc exactement les morphismes d'ensembles simpliciaux  $\Delta_{\bullet}^n \rightarrow X_{\bullet}$  dont la restriction à  $\partial \Delta_{\bullet}^n$  est constante égale à  $v$ . Leur réalisation est donc une application continue de  $I^n$  dans  $|X_{\bullet}|$  dont la restriction au bord est constante égale au point  $|v|$ . En particulier un 0-simplexe définit un élément de  $\pi_n(|X_{\bullet}|, |v|)$ .

Par ailleurs les 1-simplexes de  $\Omega_v^n(X_{\bullet})_{\bullet}$  sont exactement les morphismes d'ensembles simpliciaux  $\Delta_{\bullet}^n \times \Delta_{\bullet}^1 \rightarrow X_{\bullet}$  dont la restriction à  $\partial(\Delta_{\bullet}^n \times \Delta_{\bullet}^1)$  est constante égale à  $v$ . Ses restriction à  $\Delta_{\bullet}^n \times \{0\}$  et  $\Delta_{\bullet}^n \times \{1\}$  définissent deux 0-simplexes  $f_{\bullet}, g_{\bullet}$  comme ci-dessus et sa réalisation géométrique définit une homotopie entre les réalisations de  $f_{\bullet}$  et  $g_{\bullet}$ .

Le lemme suivant donne deux autres caractérisations naturelles des groupes d'homotopie supérieurs. Le premier point découle essentiellement de la remarque précédente.

**Lemme 3.3.9.** Soit  $X_{\bullet}$  un ensemble simplicial fibrant et  $v \in X_0$ . On a des bijections naturelles entre  $\pi_n(X_{\bullet}, v)$  et

- (1) l'ensemble des classes d'équivalence  $\{f \in \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta_{\bullet}^n, X_{\bullet}) / f(\partial \Delta_{\bullet}^n) = v\} / \sim$   
où la relation d'homotopie est la relation  $f \sim g$  si il existe  $H : \Delta_{\bullet}^n \times \Delta_{\bullet}^1 \rightarrow X_{\bullet}$   
tel que  $H|_{\partial \Delta_{\bullet}^n \times \Delta_{\bullet}^1} = v$ ,  $H|_{\Delta_{\bullet}^n \times \{0\}} = f$  et  $H|_{\Delta_{\bullet}^n \times \{1\}} = g$ <sup>71</sup>,

<sup>71</sup>. on utilise la notation évidente  $\{0\}$  et  $\{1\}$  pour les deux sommets de  $\Delta_{\bullet}^1$ , c'est à dire que  $d_0([1] \xrightarrow{id} [1]) = \{1\}$  et  $d_1([1] \xrightarrow{id} [1]) = \{0\}$

- (2) ainsi que l'ensemble des classes d'équivalences de  $\{\sigma \in X_n / d_i(\sigma) = v\} / \sim$  de  $n$ -simplexes dont toutes les faces sont (l'image par des dégénérescences de)  $v$  et où la relation  $\sim$  est donnée par  $\sigma \sim \tau$  si il existe un  $n+1$ -simplexe  $K \in X_{n+1}$  tel que  $d_{n+1}(K) = \sigma$ ,  $d_n(K) = \tau$  et  $d_{i < n}(K) = v$ .

Le fait que les relations sont bien des relations d'équivalence se démontre par des méthodes similaires à celle du lemme 3.3.2. On peut remarquer que  $\Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^1 \xrightarrow{proj} \Delta_\bullet^n$  est un cylindre fonctoriel pour  $\Delta_\bullet^n$  (et utiliser une preuve similaire à celle de la proposition 2.2.20 et l'universalité de ce cylindre pour en déduire le résultat).

*Remarque 3.3.10.* Si  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est un morphisme d'ensembles simpliciaux, alors les morphismes induits  $\text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^n, X_\bullet) \rightarrow \text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^n, Y_\bullet)$ ,  $\text{Map}_\bullet(\partial\Delta_\bullet^n, X_\bullet) \rightarrow \text{Map}_\bullet(\partial\Delta_\bullet^n, Y_\bullet)$  et par suite des applications  $f_* : \pi_n(X_\bullet, v) \rightarrow \pi_n(Y_\bullet, f(v))$  (pour n'importe quel modèle choisi) vérifiant évidemment  $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ ,  $id_* = id$ .

**Lemme 3.3.11.** Soit  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  une fibration de Kan acyclique entre ensembles simpliciaux fibrants. Alors  $f_* : \pi_0(X_\bullet) \rightarrow \pi_0(Y_\bullet)$  est une bijection et, pour tout  $v \in X_0$ ,  $n > 0$ ,  $f_* : \pi_n(X_\bullet, v) \rightarrow \pi_n(Y_\bullet, f(v))$  est également une bijection.

*Remarque 3.3.12.* En utilisant le lemme de Brown 2.5.8, on en déduit que toute équivalence faible entre ensembles simpliciaux fibrants induits des bijection sur les  $\pi_n$ .

*Preuve du Lemme 3.3.11.* Montrons l'injectivité de  $f_*$ . Soit  $\alpha, \beta : \Delta^n \rightarrow X_\bullet$  représentant des classes de  $\pi_n(X_\bullet, v)$ ; on note encore  $\alpha$  et  $\beta$  leurs restrictions, qui sont constantes égales à  $v$ , à  $\partial\Delta_\bullet^n$ . Supposons que  $\alpha$  et  $\beta$  sont équivalentes dans  $Y_\bullet$ . Donc qu'il existe  $H : \Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^1 \rightarrow Y_\bullet$  une homotopie entre  $f \circ \alpha$  et  $f \circ \beta$ . On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta_\bullet^n \times \partial\Delta_\bullet^1 & \xrightarrow{\alpha \cup \beta} & X_\bullet \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow \wr \\ \Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^1 & \xrightarrow{H} & Y_\bullet \end{array}$$

Le relèvement  $\tilde{H}$  existe car la flèche verticale de gauche est une cofibration (elle est injective) et donne que  $\alpha \sim \beta$ . La surjectivité est similaire en utilisant le relèvement :

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_\bullet^n & \xrightarrow{t \mapsto v} & X_\bullet \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow \wr \\ \Delta_\bullet^n & \xrightarrow{\alpha} & Y_\bullet \end{array}$$

□

Les groupes d'homotopie d'un ensemble simplicial fibrant s'identifient avec ceux de la réalisation géométrique.

**Proposition 3.3.13.** Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial fibrant. On a une bijection naturelle

$$\pi_n(X_\bullet, v) \cong \pi_n(|X_\bullet|, |v|)$$

Ceci démontre qu'en particulier les groupes d'homotopie simpliciaux sont bien des groupes pour  $n \geq 1$ .

*Exercice 3.3.14.* Définir la structure de groupe de  $\pi_n(X_\bullet, v)$  en utilisant les modèles simpliciaux du lemme 3.3.9.

Une méthode pour démontrer la proposition précédente est d'utiliser la longue suite exacte d'une fibration de Kan. Soit  $p : E_\bullet \rightarrow B_\bullet$  une fibration de Kan entre ensembles simpliciaux fibrants. Soit  $b \in B_0$  et  $v \in E_0$  tel que  $p(v) = b$ . On note  $F_{b,\bullet}$  la fibre en  $b$  de  $p$ , et  $i$  son inclusion dans  $E_\bullet$ . Cette fibre est fibrante puisque le tiré en arrière d'une fibration est une fibration. On a une application naturelle  $\partial : \pi_n(B_\bullet, b) \rightarrow \pi_{n-1}(F_{b,\bullet}, v)$  donnée par la construction suivante. Soit  $f : \Delta_\bullet^n \rightarrow B_\bullet$  un représentant d'une classe dans  $\pi_n(B_\bullet, b)$ . On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{n,\bullet}^n & \xrightarrow{\{v\}} & E_\bullet \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ \Delta_\bullet^n & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

et, comme  $p$  est une fibration de Kan, le relèvement  $h$  dans ce diagramme existe et fait commuter les triangles. En particulier,  $p \circ d_n(h) = b$  implique<sup>72</sup> que  $d_n(h) : \Delta_\bullet^{n-1} \rightarrow E_\bullet$  est à valeur dans  $F_{b,\bullet}$  et vaut  $v$  sur ses faces (par la commutativité du diagramme supérieur). Ainsi  $d_n(h)$  définit une classe, que l'on note  $\partial([f])$  dans  $\pi_{n-1}(F_{b,\bullet}, v)$ . Une preuve similaire à celle du lemme 1.6.12 montre

**Lemme 3.3.15.** L'application  $[f] \mapsto \partial([f])$  est indépendante du choix du représentant  $f$  dans  $\pi_n(B_\bullet, b)$ .

La proposition suivante peut se démontrer essentiellement comme son analogue topologique (théorème 1.6.14) en introduisant des groupes d'homotopie simpliciaux relatifs (en utilisant la définition 3.3.9.(1)).

**Proposition 3.3.16.** Soit  $p : E_\bullet \rightarrow B_\bullet$  une fibration de Kan entre ensembles simpliciaux fibrants. La suite longue suivante est exacte

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F_{b,\bullet}, v) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E_\bullet, v) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B_\bullet, b) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F_{b,\bullet}, v) \rightarrow \cdots$$

*Démonstration de la proposition 3.3.13.* La preuve se fait par récurrence en partant du lemme 3.3.2 qui établit l'initialisation. Plus exactement supposons avoir démontré que pour tout ensemble simplicial fibrant  $Z_\bullet$  on a, pour tout point  $z \in Z_0$  que  $\pi_{i \leq n-1}(Z_\bullet, z) = \pi_{i \leq n-1}(|Z_\bullet|, |z|)$  et démontrons la bijection entre les groupes d'homotopies pour tout ensemble simplicial  $X_\bullet$  en degré  $n$ . On définit ensuite l'espace des chemins  $P_v(X_\bullet)_\bullet$  en  $v \in X_0$  comme le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccc} P_v(X_\bullet)_\bullet & \longrightarrow & \text{Map}(\Delta_\bullet^1, X_\bullet) \\ \pi \downarrow & & \downarrow (d_0^*, d_1^*) \\ X_\bullet & \xrightarrow{v \times id} & X_\bullet \times X_\bullet \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est donnée par les deux restrictions aux inclusions  $\{0, 1\} \cong \partial \Delta_\bullet^1 \hookrightarrow \Delta_\bullet^1$ . L'application verticale de droite est une fibration de Kan par le lemme 3.2.17 et donc celle de gauche aussi. On a de plus que  $\Omega_v^1(X_\bullet)_\bullet$  est isomorphe à la fibre en  $v$  de cette fibration  $\pi : P_v(X_\bullet)_\bullet \rightarrow X_\bullet$ . Par ailleurs on peut montrer que

<sup>72.</sup> on utilise qu'un morphisme  $\Delta_\bullet^m \rightarrow Y_\bullet$  est la même chose qu'un élément, ici donné par une face d'un élément, de  $Y_m$



la composée :  $P_v(X_\bullet)_\bullet \rightarrow X_\bullet \rightarrow \{v\}$  est une fibration acyclique. Pour le voir, il suffit de montrer que  $\text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^1, X_\bullet) \rightarrow \text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^0, X_\bullet) \cong X_\bullet$  est une fibration acyclique (puisque la précédente est un tiré en arrière de celle-ci) ce qui découle du lemme 3.2.9. Le lemme 3.3.11 garantit alors que les  $\pi_n(P_v(X_\bullet)_\bullet, v)$  sont triviaux. Il suit alors de la longue suite exacte d'une fibration que  $\pi_{n-1}(\Omega_v^1(X_\bullet)_\bullet) \cong \pi_n(X_\bullet, v)$ . La réalisation géométrique d'une fibration (acyclique en l'occurrence) est une fibration par le lemme 3.2.11, et  $|P_v(X_\bullet)_\bullet| \rightarrow |\Delta_\bullet^0| = \{*\}$  est une équivalence faible (puisque c'est la réalisation d'une fibration acyclique, donc d'une équivalence faible). Il suit qu'on a aussi un isomorphisme  $\pi_{n-1}(|\Omega_v^1(X_\bullet)_\bullet|) \cong \pi_n(|X_\bullet|, |v|)$  qui provient de la longue suite exacte d'une fibration de Serre (théorème 1.6.14). L'hypothèse de récurrence nous permet alors de conclure. La difficulté dans les derniers arguments provient du fait qu'on a pas que la réalisation géométrique de  $\Omega_v^n(X_\bullet)_\bullet$  est  $\Omega^n(|X_\bullet|)$ . La preuve ci-dessus nous indique cependant que ces deux espaces topologiques sont faiblement homotopiquement équivalents.  $\square$

*Remarque 3.3.17.* Pour tout ensemble simplicial  $X$ , on peut définir ses groupes d'homotopie en considérant ceux d'un remplacement fibrant. Puisque deux remplacement fibrants sont faiblement équivalents, et que leur groupes d'homotopie sont équivalents à ceux de leur réalisation géométrique il suit que les groupes d'homotopie simpliciaux ne dépendent pas du remplacement fibrants par la remarque 3.3.12.

*Notation 3.3.18.* Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial et  $v \in X_0$  un sommet. On note  $\pi_n(X_\bullet, x) \cong \pi_n(R(X_\bullet), R(x))$  le  $n$ -ième groupe d'homotopie simpliciale de  $X$  en  $x$ . Ici on note  $R(v)$  l'image de  $v$  par le morphisme  $X_0 \rightarrow R(X_\bullet)_0$ .

Par ailleurs, nous pouvons choisir un remplacement fibrant fonctoriel  $X \mapsto R(X)$  et pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme d'ensembles simpliciaux  $R(f) : R(X) \rightarrow R(Y)$  qui par composition induit un morphisme de groupes  $f_* := R(f)_* : \pi(R(X), x) \rightarrow \pi(R(Y), R(f)(x))$ . On en déduit

*Proposition 3.3.19.* Les groupes d'homotopie simpliciaux<sup>73</sup> sont fonctoriels sur **sEns** et  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence faible si et seulement si  $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  est une bijection et  $f_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$  est un isomorphisme pour tout  $n$  et sommet  $x_0 \in X_0$

### 3.4. GÉNÉRALISATIONS ET APPLICATION AUX COLIMITES HOMOTOPIQUES

La théorie homotopique des ensembles simpliciaux des sections précédentes s'adapte à d'autres catégories algébriques. Elle permet de définir des structures de modèle pour les objets simpliciaux dans un nombre important de catégories.

C'est en particulier le cas si les objets de **C** sont naturellement des ensembles. Soit donc  $U : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur (qui en pratique sera souvent un "oubli" de structure supplémentaire) qui est un adjoint à droite. On note  $F$  son adjoint à gauche.

*Exemple 3.4.1.* Par exemple on pourra considérer les catégories **Ab** des groupes abéliens,  $Ch(R)$ ,  $Ch_{\geq 0}(R)$ ,  $Ch_{< 0}(R)$ , les catégories de d'algèbres associatives, algèbres commutatives, ou algèbres de Lie (et même leurs versions différentielles graduées), où  $U$  est simplement le foncteur oubliant la structure additive/algébrique supplémentaire. Dans le premier cas  $F(X) = \mathbb{Z} \langle X \rangle$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre de base les éléments de  $X$  et pour les versions algébriques, le foncteur  $F$  est le foncteur algèbre (de Lie, associative, commutative) libre associé à un ensemble.

<sup>73</sup>. défini comme ceux du remplacement fibrant

Notons que l'adjonction  $F : \mathbf{Ens} \rightleftarrows \mathbf{C} : U$  s'étend aux objets simpliciaux en appliquant les foncteurs  $U, F$  en chaque degré (les bijections entre les Hom en chaque degré étant automatiquement compatibles avec les opérations simpliciales par naturalité) pour donner une adjonction  $F : \mathbf{sEns} \rightleftarrows \mathbf{sC} : U$ .

On définit une structure de modèle sur les objets simpliciaux  $\mathbf{sC}$  comme suit :

**les équivalences faibles :** sont les  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  tels que  $U(f)$  est une équivalence faible dans  $\mathbf{sEns}$  ;

**les fibrations :** sont les  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  tels que  $U(f)$  est une fibration dans  $\mathbf{sEns}$  ;

**les cofibrations :** sont les morphismes avec la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques.

Soit l'hypothèse

(\*) : les cofibrations définies par la propriété précédente et qui ont la propriété de relèvement par rapport à toutes les fibrations sont des équivalences faibles.

Cette hypothèse est évidemment nécessaire pour que la structure précédente soit bien une structure de modèle. Cette hypothèse est vérifiée par les exemples 3.4.1.

**Corollaire 3.4.2.** Supposons de plus que  $\mathbf{C}$  soit complète et cocomplète, que la flèche naturelle  $\text{colim}_{n \in \mathbb{N}}(U(X_n)) \rightarrow U(\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} X_n)$  soit un isomorphisme et que (\*) soit vérifiée. Alors  $\mathbf{sC}$  munie de la structure précédente est une catégorie de modèle cofibrement engendrée et l'adjonction induite par  $U$  et  $F$  est de Quillen.

*Démonstration.* Comme les (co)limites de  $\mathbf{sC}$  se calculent terme à terme,  $\mathbf{sC}$  est complète et cocomplète. Le résultat est alors un cas particulier du Théorème 5.2.3 où on prend la structure de modèle de  $\mathbf{sEns}$  comme structure de base.  $\square$

**Exemple 3.4.3 (Équivalence de Dold Kan).** On peut identifier la structure projective sur les complexes de chaînes avec la précédente. Soit  $N : \mathbf{sAb} \rightarrow Ch_{\geq 0}(\mathbb{Z})$  le foncteur défini par  $N(A_\bullet)$  est le complexe  $\bigoplus_{n \geq 0} A_n / \mathfrak{S}(s_i(A_{n-1}))$  (c'est à dire qu'on quotiente les  $A_n$  par l'image des dégénérescences) muni de la différentielle  $d := \sum_{i=0}^n d_i : N_n(A_\bullet) \rightarrow N_{n-1}(A_\bullet)$ . On vérifie que  $d$  passe au quotient et est de carré nul (c'est comme pour l'homologie singulière).

**Théorème 3.4.4 (Dold-Kan + Quillen).** Le foncteur  $N : \mathbf{sAb} \rightarrow Ch_{\geq 0}(\mathbb{Z})$  est une équivalence de catégorie qui est également une équivalence de Quillen entre les structures de modèle du Théorème 3.4.2 à gauche et la structure projective à droite.

*Démonstration.* L'inverse du foncteur  $N$  est donné, pour un complexe  $C = (\bigoplus_{i \geq 0} C_i, b)$ , par

$$F(C)_\bullet := [n] \mapsto F(C)_n = \bigoplus_{p \leq n} \bigoplus_{\substack{\varphi : [n] \rightarrow [p] \in \mathbf{sEns} \\ \text{tels que } \varphi \text{ est surjective}}} C_p.$$

La structure simpliciale est donnée, pour tout  $f : [n] \rightarrow [m]$  dans  $\Delta$ , de la façon suivante. Pour tout  $\psi : [m] \twoheadrightarrow [q]$ , on considère les uniques factorisations, associées à toute surjection  $\psi : [m] \twoheadrightarrow [q]$ ,

$$\begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{f} & [m] \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ [p] & \hookrightarrow & [q] \end{array}$$

en une surjection  $\varphi$  et une inclusion. Si  $p = q$ , alors l'application induite de la composante  $C_p = C_q$  associée à  $\psi$  est l'isomorphisme naturel avec la même composante associée à  $\phi$ . Si  $q = p + 1$  et que  $[p + 1] \hookrightarrow [p]$  est la codégénérescence  $s^p$ , alors on envoie la composante  $C_{p+1}$  correspondant à  $\psi$  sur la composante  $C_p$  correspondante à  $\varphi$  par la différentielle  $C_{p+1} \xrightarrow{b} C_p$ . Dans les autres cas, on utilise l'application nulle. Au total on a défini une application  $f^* : F(C)_m \rightarrow F(C)_n$ . On vérifie ensuite que ce foncteur est bien l'inverse de  $N$ .  $\square$

*Remarque 3.4.5.* Quillen a également montré une que si  $\mathbf{C}$  est une catégorie complète et cocomplète et qui possède suffisamment d'objets projectifs, alors on peut construire une structure de modèle dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les applications  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  telles que, pour tout objet projectif  $P$  de  $\mathbf{C}$ , le morphisme induit d'ensembles simpliciaux<sup>74</sup>

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P, X_\bullet) \xrightarrow{f \circ -} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P, Y_\bullet)$$

est une équivalence faible (resp. une fibration). Les cofibrations sont évidemment définies par la propriété de relèvement à gauche.

*Proposition 3.4.6* (Quillen). Si  $\mathbf{C}$  vérifie que tout objet de  $s\mathbf{C}$  est fibrant, alors la structure précédente est de modèle.

L'hypothèse est notamment vérifiée pour les  $\mathbf{C} = \mathbf{Ab}$  (exercice). On peut alors vérifier que la structure obtenue est Quillen équivalente à la précédente.

On peut utiliser les méthodes simpliciales pour calculer des colimites homotopiques dans **Top** (et dans le cas de toute catégorie de modèle simpliciale, voir ci-dessous). Soit  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Top}$  un diagramme (autrement dit un foncteur issu d'une petite catégorie  $\mathcal{D}$ ). On définit un espace topologique simplicial<sup>75</sup>  $\mathcal{N}_\bullet(F)$  comme suit :

$$\mathcal{N}_n(F) = \coprod_{i_0 \xleftarrow{f_1} i_0 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_n} i_n} F(i_n).$$

Les faces  $d_j : \mathcal{N}_n(F) \rightarrow \mathcal{N}_{n-1}(F)$ , pour  $j < n$ , envoie identiquement  $F(i_n)$  sur lui-même vu comme étant dans la composante associée à la suite de compositions

$$i_0 \xleftarrow{f_1} i_0 \xleftarrow{f_2} \dots i_{j-1} \xleftarrow{f_j \circ f_{j+1}} i_{j+1} \longleftarrow \dots \longleftarrow i_{n-1} \xleftarrow{f_n} i_n$$

(c'est à dire qu'elles sautent l'objet  $i_j$ ) et la dernière face  $d_n$  envoie  $F(i_n)$  vers  $F(i_{n-1})$  via l'application  $F(f) : F(i_n) \rightarrow F(i_{n-1})$ , ce dernier étant vu dans la composante de la suite de compositions  $i_0 \xleftarrow{f_1} i_0 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_{n-1}} i_{n-1}$ . Enfin les dégénérescences  $s_j$  consistent à intercaler des identités, c'est à dire envoie  $F(i_n)$  identiquement sur lui-même mais vu dans la composante associée à la suite de compositions

$$i_0 \xleftarrow{f_1} i_0 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_j} i_j \xleftarrow{id} i_j \xleftarrow{f_{j+1}} i_{j+1} \dots \longleftarrow i_{n-1} \xleftarrow{f_n} i_n.$$

Identifions tout espace topologique  $X$  avec un objet simplicial constant (exemple 3.1.24). Par définition, chaque  $F(i_n)$  s'envoie dans la colimite  $\mathrm{colim}_{\mathcal{D}} F(i)$  et ceci produit un

74. Si  $X_\bullet$  est simplicial dans  $\mathbf{C}$ , sa structure induit par functorialité une structure d'ensemble simpliciaux sur les ensembles de morphismes  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X_\bullet)$  pour tout objet  $A$

75. en utilisant le nerf de la catégorie  $\mathcal{D}$  pour définir la structure simpliciale, voir la feuille de TD 5.

morphisme d'espace topologiques simpliciaux

$$\mathcal{N}_\bullet(F) \rightarrow \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} F(i).$$

La réalisation géométrique s'étend des ensembles simpliciaux aux espaces topologiques simpliciaux par exactement la même formule<sup>76</sup> (à la différence que cette fois ci,  $X_n$  n'est plus discret).

**Proposition 3.4.7.** La réalisation géométrique  $|\mathcal{N}_\bullet(F)|$  calcule la colimite homotopique de  $F$ . C'est à dire qu'il y a un isomorphisme naturel

$$|\mathcal{N}_\bullet(F)| \cong \mathbb{L}\operatorname{colim} F$$

dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$ .

On peut en fait montrer la chose suivante. Pour tout objet  $j \in \mathcal{D}$ , on note  $\mathcal{D}_{|j}$  la catégorie des objets au dessus de  $j$ , dont les objets sont les flèches  $f : i \rightarrow j$  d'un objet quelconque de  $\mathcal{D}$  vers  $j$ , et les morphismes entre  $i \xrightarrow{f} j$  et  $i' \xrightarrow{f'} j$  sont les triangles commutatifs

$$\begin{array}{ccc} i & \xrightarrow{f} & j \\ \downarrow & \nearrow f' & \\ i' & & \end{array}$$

induit par  $F$ , qui à un objet  $i \xrightarrow{f} j$  associe l'objet  $F(i)$ . Notons que toute flèche  $j \rightarrow k$  dans  $\mathcal{D}$  induit un foncteur naturel  $\mathcal{D}_{|j} \rightarrow \mathcal{D}_{|k}$  par post-composition par cette flèche.

Soit

$$L_j(F) := |\mathcal{N}_\bullet(F_{|j})|.$$

L'espace topologique simplicial  $\mathcal{N}_\bullet(F_{|j})$  diffère de  $\mathcal{N}_\bullet(F)$  en ce que l'on a changé la catégorie indiquant les coproduits. On a un morphisme naturel  $\mathcal{N}_\bullet(F_{|j}) \rightarrow F(j)$  (vu comme espace simplicial constant) donnée par les flèches  $i \xrightarrow{f} j$  dans la définition des objets de la catégorie  $\mathcal{D}_{|j}$ . On en déduit une application  $L_j(F) \rightarrow F(j)$  en passant aux réalisations géométriques.

**Lemme 3.4.8.** L'application naturelle  $L_j(F) \rightarrow F(j)$  est une équivalence d'homotopie faible.

Le lemme est essentiellement du au fait qu'on a un objet terminal dans la catégorie  $\mathcal{D}_{|j}$  qui induit une homotopie entre son nerf et le point.

Comme la construction de  $\mathcal{D}_{|j}$  est fonctorielle, on obtient un foncteur  $L_*(F) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Top}$  qui à  $j$  associe  $L_j(F)$ .

**Lemme 3.4.9.** Le foncteur  $L_*(F)$  est cofibrant dans la structure de modèle projective pour les diagrammes à valeur dans  $\mathbf{Top}$ .

Comme les flèches  $L_j(F) \rightarrow F(j)$  sont naturelles, on obtient une transformation naturelle (c'est à dire une flèche de  $\mathbf{Top}^{\mathcal{D}}$ )

$$L_*(F) \longrightarrow F$$

<sup>76.</sup> dans le cadre des espaces topologiques simpliciaux, la réalisation géométrique n'est évidemment plus forcément un CW-complexe, à moins que les dégénérescences ne soient des applications cellulaires

qui par le lemme 3.4.8 est une équivalence faible dans la catégorie des diagrammes. Ainsi les deux lemmes précédents montrent que  $L_*(F) \longrightarrow F$  est un remplacement cofibrant dans la structure de modèle projective de  $\mathbf{Top}^{\mathcal{D}}$ . La proposition 3.4.7 en résulte car

$$|\mathcal{N}_\bullet(F)| \cong \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} L_*(F)$$

(voir la remarque 2.6.12).

Les résultats précédents sur les colimites homotopiques s'étendent à toute catégorie de modèle simpliciale, c'est à dire une catégorie de modèle dont les morphismes sont enrichis dans  $\mathbf{sEns}$  et vérifient les résultats du Lemme 3.2.17. La définition 4.4.26 précise de cette notion est donnée dans la partie 4.4.

*Exemple 3.4.10.* La catégorie  $\mathbf{sEns}$  est simpliciale (grâce au lemme 3.2.17). Les catégories de préfaisceaux  $Fun(\mathcal{D}, \mathbf{sEns})$  munie de la structure projective sont aussi simpliciales.

## IV. NOTIONS D'∞-CATÉGORIES

Nous allons dans ce chapitre introduire la notion d'∞-catégorie<sup>77</sup>. Une de nos motivations sera de voir les ∞-catégories comme un relèvement des catégories homotopiques  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  d'une catégorie de modèle, c'est à dire comme un objet qui n'inverse pas seulement les équivalences faibles, mais retient une information “homotopique” supérieure. Cette information prendra la forme de “morphisms supérieurs”, c'est à dire de morphismes entre les morphismes, à penser comme une généralisation de la notion de transformation naturelle entre foncteurs, c'est à dire celle d'une catégorie *supérieure faible*<sup>78</sup>. Ainsi, une autre motivation provient des catégories supérieures ainsi que celles enrichies dans (un modèle des) espaces.

*Il y a de nombreuses présentations possibles pour les ∞-catégories*, ou plus précisément pour la catégorie des ∞-catégories. Notons que l'on s'intéresse bien sûr la notion de catégorie à équivalence naturelle près et qu'une telle catégorie des ∞-catégories est elle même naturellement une ∞-catégorie et pas une simple catégorie. Comme on ne peut pas pousser à l'infini (sans faire de jeu de mot) cette notion, plus précisément nous fixons la notion suivante.

*Terminologie 4.0.1. Par modèle pour la théorie des ∞-catégories nous voulons dire une catégorie de modèle des ∞-catégories et deux telles théories seront considérées comme équivalentes si elles sont Quillen équivalentes.*

Nos deux modèles de base seront la catégorie de modèle des catégories enrichies simplicialement 4.3 et celle des quasicatégories 4.2, mais il en existe d'autres très intéressants ayant leurs propres avantages et inconvénients.

### 4.1. QUELQUES MOTIVATIONS POUR LA THÉORIE DES ∞-CATÉGORIES

Comme précédemment évoqué, une structure de catégorie de modèle nous donne un moyen d'étudier une catégorie dont on veut rendre inversible une classe de morphismes (les équivalences faibles). Déjà, il est très difficile de vérifier si la catégorie homotopique est bien une catégorie en général ou simplement de calculer ses morphismes en l'absence d'une structure de modèle. Pire, le passage brutal à la catégorie homotopique  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$  perd en fait beaucoup d'information :

- par exemple, les catégories homotopiques ont en général peu de (co)limites<sup>79</sup>. Une structure de modèle permet de définir et calculer des (co)limites homotopiques, mais ces dernières ne sont pas définies en terme d'une propriété universelle de la catégorie homotopique bien que leur définition ne fasse intervenir que les équivalences faibles.
- Les morphismes de la catégorie homotopique  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$  donne bien les classes d'homotopies (faibles) de morphismes entre deux espaces  $X$  et  $Y$ . Mais cette donnée ne *suffit pas* à déterminer/encoder le type d'homotopie faible de l'espace  $\mathrm{Map}(X, Y)$  des applications continues de  $X$  dans  $Y$  (muni de la topologie compacte-ouverte<sup>80</sup>) dont les classes d'homotopie faibles ne sont que le  $\pi_0$  :

77. à comprendre comme  $(\infty, 1)$ -catégorie

78. a contrario d'une catégorie supérieure stricte pour lesquelles toutes les opérations entre flèches sont strictement associatives etc..

79. voir la feuille de TD 2

80. c'est à dire si  $Y$  est métrisable de celle de la convergence uniforme sur tout compact

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})}(X, Y) = \pi_0(\mathrm{Map}(X, Y))$ . Autrement dit, la catégorie homotopique ne voit pas les (classes d')homotopies supérieures. Le même problème survient avec les ensembles simpliciaux ou les complexes de chaînes<sup>81</sup> Il faut se donner des résolutions (co)fibrantes de nos objets pour garder cette information.

On peut par ailleurs se donner des structures de modèles différentes ayant les mêmes équivalences faibles et donc déterminant la même notion homotopique (par exemple les structures projectives et injectives dans les complexes de chaînes).

La notion d' $\infty$ -catégorie va nous donner une notion de quotient de la catégorie  $\mathbf{C}$  où l'on inverse les équivalences faibles moins naïve et brutale que la catégorie homotopique résolvant notamment les problèmes ci-dessus. En particulier des structures de modèle Quillen équivalentes donneront des  $\infty$ -catégories équivalentes. Par exemple, nous verrons aussi qu'il existe une notion naturelle et universelle d' $\infty$ -(co)limite encodant les (co)limites homotopiques et que les morphismes d'une  $\infty$ -catégorie contiennent des homotopies supérieures ; plus précisément sont des "espaces à homotopie près".

Essayons de préciser un peu cette dernière notion. Un exemple important-et à la base des motivations pour les catégories supérieures-est donné par le groupoïde fondamental d'un espace topologique.

*Exemple 4.1.1.* Rappelons que si  $X$  est un espace topologique,  $\pi(X)$  est la catégorie dont les objets sont les points de  $X$  et les morphismes

$$\mathrm{Hom}_{\pi(X)}(x, y) = \{f : [0, 1] \xrightarrow{C^0} X, f(0) = x, f(1) = y\} / \simeq_{\{0,1\}}$$

sont les classes d'homotopie relatives (à  $\{0, 1\}$ ) de chemins continus de  $x$  vers  $y$ . Les classes d'isomorphismes de  $\pi(X)$  sont exactement l'ensemble  $\pi_0(X)$  et  $\mathrm{Hom}_{\pi(X)}(x, x) \cong \pi_1(X, x)$ . Supposons maintenant donné deux chemins continus  $f, g$  de  $x$  vers  $y$  et soit  $H, K$  ; deux homotopies entre eux. Alors on peut recoller ces homotopies pour former une application de  $S^2$  dans  $X$  qui peut ou pas être complétée en un morphisme de  $D^2$  dans  $X$ . Mais cette donnée n'est pas visible dans  $\pi(X)$ . Autrement dit l'information contenue dans le groupoïde fondamental ne nous dit pas si ces deux homotopies sont elles mêmes homotopes entre elles où si elles définissent une classe non-triviale dans  $\pi_2(X, x)$  et encore moins dans  $\pi_{n \geq 3}(X, x)$ .

Dans cet exemple, une homotopie est vue comme un morphisme (inversible à homotopie près qui plus est) entre deux chemins. Ainsi pour corriger le problème, on aurait envie de considérer une catégorie avec les mêmes objets, où les chemins seraient simplement les chemins continus, munis de morphismes entre eux constitué par les homotopies relatives entre chemins ; et plus généralement, d'une notion de morphismes entre les homotopies données par des homotopies entre homotopies et ainsi de suite... Évidemment, ceci ne peut pas être une catégorie dans un sens strict du terme : la composition des chemins n'est associative qu'à homotopie près, tout comme la loi d'unité et ceci se propage à tous les  $n$ -morphismes.

Notons que l'exemple donné par le groupoïde fondamental est en fait transposable au cas de  $(\mathbf{C}, \mathcal{W})$  de manière générale. La catégorie homotopique est obtenu en identifiant des morphismes à une relation d'équivalence sur des zigzags près (voir 2.2).

81. En effet, on peut munir  $\mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(C_*, D_*)$  d'une structure de complexes qui en degré  $i$  est donné par les morphismes de degré homogène égal à  $i$  et de la différentielle  $\delta(f) = d_D \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_C$ . Alors, si  $A$  est un complexe borné de projectifs,  $\mathrm{Hom}_{Ch(R)}(A, D) \cong H_0(\mathrm{Hom}(A, D), \delta)$ .

Mais elle n'encode pas si deux façons d'identifier deux zigzags sont elle-mêmes naturellement équivalentes ou pas, et ainsi ne tient pas compte de diagrammes plus compliqués que des “carrés” que l'on peut réaliser (par exemple des cubes) dans  $\mathbf{C}$  où on inverse  $\mathcal{W}$  formellement. Elle correspond ainsi elle aussi à une notion de catégorie où ne regarde les (zigzags) de morphismes qu'à “homotopie” près.

*Philosophie 4.1.2.* Ceci amène à considérer qu'une notion d' $\infty$ -catégorie doit consister en la donnée

- d'objets,
- de 1-morphismes entre les objets,
- pour tout  $n \geq 2$  d'une notion de morphismes entre les  $(n - 1)$ -morphismes
- pour tout  $n \geq 1$ , de notions de compositions de  $n$ -morphismes (ayant des extrémités<sup>82</sup> similaires) associatives à des  $n + 1$ -morphismes près
- munis d'unités vérifiant un axiome de compatibilité avec les compositions à des  $n + 1$ -morphismes près.

Par ailleurs, on doit avoir des notions de foncteurs, transformations naturelles (et transformations entre morphismes d'ordres supérieurs) entre  $\infty$ -catégorie. En particulier un tel foncteur entre  $\infty$ -catégorie, doit

- envoyer des objets sur des objets, des  $n$ -morphismes sur des  $n$ -morphismes,
- doit envoyer la composée de  $n$ -morphismes sur la composée des images des  $n$ -morphismes à des  $n + 1$ -morphismes près
- une transformation entre foncteurs  $F, G$  doit consister en des flèches entre les objets  $F(X), G(X)$  de sorte que tout diagramme induit par des 1-flèches  $X \rightarrow Y$  soit commutatif à un 2-morphisme près, etc.

Autrement dit, on souhaite avoir une notion de catégorie et même d' $\infty$ -catégorie des  $\infty$ -catégories.

Notons que dans notre point de vue, les  $n \geq 2$ -morphismes sont “inversibles” (car nos identifications proviennent de relations d'équivalences, donc symétriques). Il s'agira donc techniquement d' $(\infty, 1)$ -catégorie. Il existe des notions d' $(\infty, n)$ -catégories où on suppose seulement que les  $m \geq n + 1$ -morphismes sont “inversibles”. L'exemple hypothétique 4.1.1 du groupoïde fondamental est donc lui une  $(\infty, 0)$ -catégorie, notion que l'on qualifie dans la littérature d' $\infty$ -groupoïde.

L'idée d'une définition informelle comme ci-dessus est naturelle, mais assez peu réalisable et ne serait de toutes façons pas manipulable aisément. En effet, il nous faut une infinité d'opérations et d'axiomes devant satisfaire des cohérences très compliquées combinatoirement. L'idée pour réaliser cela et d'utiliser la théorie de l'homotopie et des relèvements pour encoder ces cohérences.

Plus précisément, on va, pour reprendre l'idée des espaces fonctionnels  $\text{Map}(X, Y)$  considérer des catégories dont les morphismes sont munies d'une structure d'espace topologique à homotopie près et encoder les  $n \geq 2$ -morphismes comme des homotopies (entre chemins ou homotopie).

Partant de ce point de vue il est naturel de vouloir transporter les structures de modèle de Quillen sur des catégories dont les morphismes ont une structure d'espace topologique ou ensemble simplicial compatible avec les ensembles simpliciaux ; c'est ce qui est évoqué dans la partie 4.3.

---

82. cette notion pouvant se décliner sous plusieurs formes inductivement



Plus généralement, on utilise des structures de modèle pour encoder cette notion intuitive précédente et dont les objets fibrants cofibrants seront exactement ce que l'on peut appeler  $\infty$ -catégorie. L'un des plus rapides de ces modèles à définir est donné par les quasicatégories et est basé sur les ensembles simpliciaux.

#### 4.2. LE MODÈLE DONNÉ PAR LES QUASI-CATÉGORIES

Le modèle des quasicatégories pour les  $\infty$ -catégories est du à Joyal et a été popularisé et développé par Lurie entre autres. L'un des avantages de ce modèle est qu'il donne une définition d' $\infty$ -catégorie qui généralise de manière très naturelle une construction standard et importante : le nerf d'une catégorie.

##### 4.2.1. Le nerf d'une catégorie.

**Définition 4.2.1.** Soit  $\mathbf{C}$  une petite catégorie. Son nerf  $N_\bullet(\mathbf{C})$  est l'ensemble simplicial donné, en degré simplicial  $n$ , par l'ensemble

$$N_n(\mathbf{C}) = \{X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} X_n\}$$

des  $n$ -uplets de morphismes de  $\mathbf{C}$  qui sont composables (dans cet ordre). C'est à dire les  $(f_1, \dots, f_n)$  tels que le but de  $f_i$  est égal à la source de  $f_{i+1}$  pour tout  $i = 1 \dots n-1$ . Pour  $n = 0$ , on prend bien entendu l'ensemble des objets.

La structure simpliciale est donnée par

$$\begin{aligned} d_0(X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} X_n) &= X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} X_n \\ d_n(X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} X_n) &= X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \end{aligned}$$

et, pour  $i = 1 \dots n-1$ , par

$$d_i(X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} X_n) = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \dots X_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1} \circ f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} X_{i+2} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} X_n.$$

Autrement dit la première et la dernière face oublient un morphisme et un objet alors que les autres composent deux morphismes successifs. Les dégénérescences sont donnés par l'ajout d'identité :

$$s_j(X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} X_n) = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \dots X_j \xrightarrow{\text{id}} X_j \xrightarrow{f_{j+1}} X_{j+1} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} X_n.$$

*Exercice 4.2.2.* Vérifier que  $N_\bullet(\mathbf{C})$  muni de la structure donnée est bien un ensemble simplicial

*Remarque 4.2.3* (La catégorie cosimpliciale  $[\bullet]$ ). La construction du nerf est en fait relia à celle de la réalisation géométrique au sens où elle est faite basée sur le fait que l'on a un objet cosimplicial naturel dans les catégories. A savoir la donnée des posets  $[n] := \{0 < 1 < \dots < n\}$  vu comme catégorie avec une unique flèche entre toute paire d'entiers  $0 \leq i \leq j \leq n$  (en particulier il n'y a que le morphisme identité dans  $\text{Hom}_{[n]}(i, i)$ ).

Notons qu'un foncteur  $[n] \rightarrow [m]$  est par définition la donnée d'un diagramme

$$F(0) \xrightarrow{F(0 \rightarrow 1)} F(1) \xrightarrow{F(1 \rightarrow 2)} \dots \rightarrow F(n)$$

dans  $[m]$ . Par définition des flèches de  $[m]$ , il suit que  $i \mapsto F(i)$  est donc une application croissante. Et réciproquement, toute application croissante  $F : [n] \rightarrow [m]$  définit un foncteur  $i \mapsto F(i)$ ,  $F(i \rightarrow j) = F(i) \rightarrow F(j)$  (qui est bien défini car  $f(i) \leq F(j)$ ).

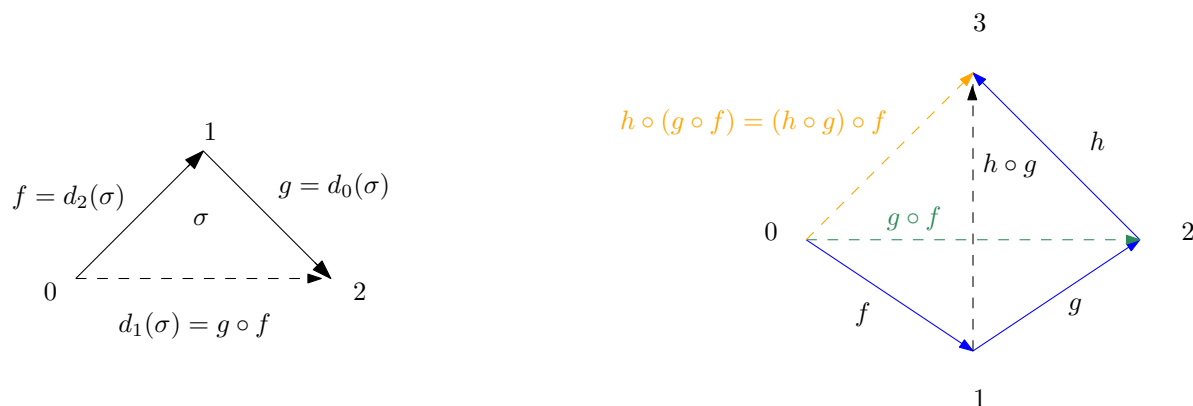


FIGURE 11. Un 2-simplexe du nerf à gauche et un 3 simplexe du nerf (correspondant aux flèches bleues) à droite avec la détermination de tous les 1-simplexes induit par le morphisme correspondant  $\Delta_{\bullet}^3 \rightarrow N_{\bullet}(\mathbf{C})$

Comme les morphismes de la catégorie  $\Delta$  sont précisément les applications croissantes, on obtient ainsi que  $[n] \mapsto \{0 < 1 \cdots < n\}$ ,  $(F : [n] \rightarrow [m]) \mapsto (F(i) \rightarrow F(j))_{i \leq j}$  est un foncteur de  $\Delta$  dans  $\mathbf{cat}$ . On a ainsi puvé

*Lemme 4.2.4.* La collection  $([n])_{n \in \mathbb{N}}$  est canoniquement un objet cosimplicial dans les catégories.

On peut alors redéfinir le nerf comme l'ensemble des morphismes dans  $\mathbf{cat}$  de  $[\bullet]$  dans  $\mathbf{C}$ , c'est à dire des foncteurs de  $[\bullet]$  dans  $\mathbf{C}$  :

*Proposition 4.2.5.* On a un isomorphisme canonique d'ensemble simplicial  $N_{\bullet}(\mathbf{C}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{cat}}([\bullet], \mathbf{C})$  où la structure simpliciale à droite est induite par la structure cosimpliciale de  $[\bullet]$ .

*Exercice 4.2.6.* Prouver la proposition 4.2.5.

En particulier, tout foncteur  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  induit un morphisme d'ensemble simplicial par post-composition.

*Lemme 4.2.7.* La règle  $(F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}) \mapsto F_* : \text{Hom}_{\mathbf{cat}}([\bullet], \mathbf{C}) \xrightarrow{F \circ -}_{\mathbf{cat}} ([\bullet], \mathbf{D})$  fait du nerf un foncteur  $N_{\bullet}(-) : \mathbf{cat} \rightarrow \mathbf{sEns}$ .

*Démonstration.* Cela découle du fait que les opérations simpliciales sont obtenues par précomposition et commutent donc avec la post-composition.  $\square$

En termes explicites, à un foncteur  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  on associe donc le morphisme d'ensemble simplicial qui envoie  $(X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_n} X_n)$  sur la suite de flèches composables

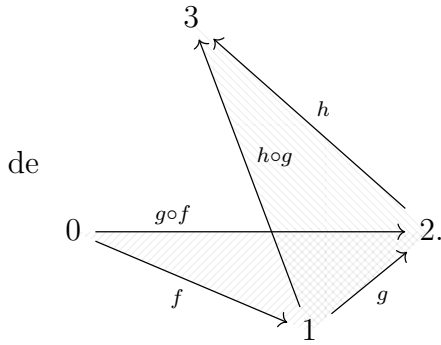
$$F(X_0) \xrightarrow{F(f_1)} F(X_1) \rightarrow \cdots \xrightarrow{F(f_n)} F(X_n).$$

*Terminologie 4.2.8.* On appelle cornets internes les cornets  $\Lambda_{k,\bullet}^n$  tels que  $0 < k < n$ . On appellera aussi corne initial (resp. final) les cornets  $\Lambda_{0,\bullet}^n$  (resp.  $\Lambda_{n,\bullet}^n$ ).

*Exemple 4.2.9* (Cornets internes, simplexes du nerf et propriétés d'extensions). Détaillons la structure.

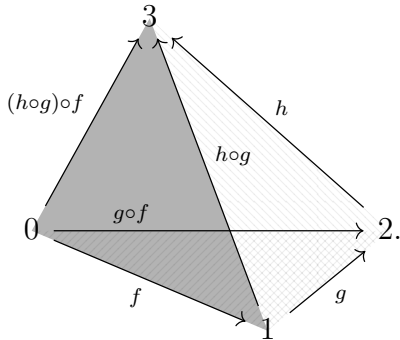
Par définition,  $N_0(\mathbf{C}) = \text{Obj}(\mathbf{C})$  est constitué des objets de  $\mathbf{C}$  et les 1-simplexes de  $\mathbf{C}$  sont l'ensemble des flèches de  $\mathbf{C}$ ; on note que  $d_0(f)$  est le but de  $f$  et  $d_1(f)$  est la source de  $f$ . Un 2-simplexe est constitué de la donnée de deux flèches  $(f, g)$  composables c'est à dire que  $d_0(f) = d_1(g)$ . Si on renomme  $\alpha_0 = g, \alpha_2 = f$ , on obtient précisément que la donnée d'un 2-simplexe de  $N_\bullet(\mathbf{C})$ , c'est à dire d'un morphisme  $\Delta_\bullet^2 \rightarrow N_\bullet(\mathbf{C})$  (cf lemme 3.1.13), est exactement la même chose qu'un morphisme  $\Lambda_{1,\bullet}^2 \rightarrow N_\bullet(\mathbf{C})$  (lemme 3.2.3). Précisément, si  $\sigma \in N_2(\mathbf{C})$ , on a que  $\alpha_0 = d_0(\sigma)$ ,  $\alpha_2 = d_2(\sigma)$  et  $d_1(\sigma) = \alpha_0 \circ \alpha_2$ . On en déduit qu'un morphisme  $\Lambda_{1,\bullet}^2 \rightarrow N_\bullet(\mathbf{C})$  a un relèvement *unique*  $\Delta_\bullet^2 \rightarrow N_\bullet(\mathbf{C})$ , donné par la composition des morphismes.

De même, un 3-simplexe du nerf est la donnée de 3 flèches composables  $(f, g, h)$  obtenues en recollant deux cornets  $\Lambda_{1,\bullet}^2$  sur leur flèche commune. Une telle donnée détermine de manière unique un morphisme  $\Delta_\bullet^3 \rightarrow N_\bullet(\mathbf{C})$  comme montré sur la figure 11. Notons que l'on voit que tous les 1-simplexes sont bien déterminés par des compositions des flèches  $f, g, h$  et repose sur l'associativité de la composition. On peut même réinterpréter l'associativité de la manière suivante. Étant donné un 3-simplexe  $(f, g, h)$  de  $N_3(\mathbf{C})$ , on obtient les 1-cornets  $(f, g), (g, h)$  de  $\Lambda_{1,\bullet}^2 \rightarrow N_\bullet(\mathbf{C})$ , on construit les 2-simplexes complétant ces 1-cornets, c'est à dire les parties grisées



Notons que nous pouvons construire cette figure

juste à partir des deux cornets compatibles  $\alpha = (f, g), \beta = (g, h)$  où compatible signifie précisément que  $d_2(\beta) = d_0(\alpha)$ . Cette compatibilité permet de construire le  $\Lambda_{1,\bullet}^2$ -cornet correspondant aux flèches composables  $0 \rightarrow 1 = d_2(\alpha)$  et  $1 \rightarrow 3 = d_1(\beta)$  pour obtenir le 3-cornet  $\Lambda_{1,\bullet}^3 \rightarrow N_\bullet(\mathbf{C})$  donné par la partie grisée du diagramme :



Le fait que l'on puisse relever ce cornet en un 3-

simplexe est équivalent à l'associativité de la composition.

Notons que de manière réciproque, la donnée d'un cornet  $\Lambda_{1,\bullet}^3 \rightarrow N_\bullet(\mathbf{C})$  (ou bien de  $\Lambda_{2,\bullet}^3 \rightarrow N_\bullet(\mathbf{C})$ ) détermine complètement les flèches  $f, g, h$  et en particulier permet d'étendre ce cornet à tout le simplexe comme nous l'avons fait. Ce n'est cependant pas le cas de la donnée de  $\Lambda_{3,\bullet}^3 \rightarrow N_\bullet(\mathbf{C})$ , qui ne contient pas la donnée des flèches  $f, g$ . Notons également que dans le cas de  $\Lambda_{0,\bullet}^3 \rightarrow N_\bullet(\mathbf{C})$ , la donnée donne bien  $f$ ,

$g, h$  mais n'assure pas que la flèche  $\phi : 1 \rightarrow 3$  du cornet est la composition  $h \circ g$ ; seulement que sa composition  $\phi \circ g$  est égale à  $(h \circ g) \circ f$ .

*Exemple 4.2.10* (Cornets initiaux et finaux et simplexes du nerf). On a vu que tout 2-cornet interne du nerf avait un unique (et donc canonique) relèvement en un 2-simplexe. Regardons ce que veulent dire les propriétés de relèvements par rapports aux 2-cornets initiaux et finaux. Un 2-cornet initial  $\alpha : \Lambda_{0,\bullet}^2 \rightarrow N_\bullet(\mathbf{C})$  est donc la donnée de deux flèches  $(h, f) = (\alpha_1, \alpha_2)$  telles que  $d_1(f) = d_1(h)$ , cf figure 12. Par notre analyse précédente des 2-simplexes du nerf, un relèvement de ce morphisme en un 2-simplexe  $\sigma : \Delta_\bullet^2 \rightarrow N_\bullet(\mathbf{C})$  est la donnée d'une flèche  $g = d_0(\sigma)$  telle que  $g \circ f = h$ . De même un relèvement d'un cornet final  $\beta = (g, h) = (\beta_0, \beta_1)$  est la donnée d'un morphisme  $f$  tel que  $f \circ g = h$ . Notons que si on prend  $h = \text{id}$ , alors le relèvement d'un cornet initial  $(\text{id}, f)$  correspond à l'existence d'un inverse à gauche de  $f$  (une rétraction) et celui d'un cornet initial à un inverse à droite (une section).



FIGURE 12. Un 2-cornet initial (à droite) et final (à gauche) dans  $N_2(\mathbf{C})$ . Les flèches pointillées désignent la structure que donne un relèvement à un 2-simplexe

Les exemples précédents conduisent à la proposition suivante.

- Proposition 4.2.11.** (1) Le nerf  $N_\bullet(\mathbf{C})$  d'une catégorie  $\mathbf{C}$  est un complexe de Kan si et seulement si  $\mathbf{C}$  est un groupoïde. Si c'est le cas, les relèvements des cornets sont de plus uniques.
- (2) Un ensemble simplicial  $X_\bullet$  est isomorphe au nerf d'une catégorie si et seulement si, pour tout cornet interne  $\Lambda_{r,\bullet}^n$  ( $n \geq 2$ ,  $0 < r < n$ ), tout morphisme de  $\Lambda_{r,\bullet}^n \rightarrow X_\bullet$  a un *unique* relèvement.
- (3) Le foncteur  $N_\bullet(-) : \mathbf{cat} \rightarrow \mathbf{sEns}$  est pleinement fidèle.

Le deuxième point permet d'identifier l'image du nerf et le dernier point d'ainsi plonger les (petites) catégories dans les ensembles simpliciaux.

*Démonstration.* Le point (2) est fait en détail dans le TD 5. Cela a été essentiellement fait dans les exemples 4.2.9, 4.2.10; le cas des cornets de dimension supérieure se traitant comme pour l'associativité. Pour le sens direct on définit  $X_0$  comme objets de la catégorie et les éléments  $f$  de  $X_1$  comme les morphismes, dont la source est donnée par la face  $d_1(f)$  et le but par  $d_0(f)$ . Par suite, la condition d'être un 2-cornet interne donne exactement deux flèches  $(f, g)$  avec une source et un but en commun et une extension  $\sigma$  donne la composition via la formule de  $g \circ f := d_1(\sigma)$ . L'unicité de l'extension garantissant que c'est non-équivoque; l'associativité se traitant comme on l'a vu dans les exemples. Pour le point (1), on note que par l'exemple 4.2.10, si le nerf d'une catégorie a la propriété de relèvement par rapport aux cornets initiaux et finaux, alors tout morphisme a un inverse à droite et à gauche et a donc un

inverse. La réciproque est facile. En effet, si tous les morphismes d'une catégorie sont inversibles, l'existence du relèvement d'un cornet initial comme dans la figure 12 est donnée par  $d_0(\sigma) = h \circ f^{-1}$  (et est unique) et celui d'un cornet final est donné par  $d_2(\sigma) = g^{-1} \circ h$ . On traite les cas de cornets de dimension supérieure de manière identique.

L'unicité des relèvements dans le point (1) est encore une conséquence des (raisonnements des) exemples.

Pour le point (3), soit  $F_\bullet : N_\bullet(\mathbf{C}) \rightarrow N_\bullet(\mathbf{D})$  est un morphisme d'ensemble simplicial. Alors, comme  $N_0(\mathbf{C}) = \text{Obj}(\mathbf{C})$ ,  $F_0$  associe à tout objet de  $\mathbf{C}$  un objet de  $\mathbf{D}$  et de même, à toute flèche  $X_0 \xrightarrow{f_1} X_1$  de  $\mathbf{C}$ ,  $F_1$  associe une flèche  $F_1(f_1)$  qui va de  $F_0(X_0)$  à  $F_0(X_1)$  puisque  $d_i \circ F_1 = F_0 \circ d_i$  ( $i = 0, 1$ ). Notons que  $d_0 \circ F_2 = F_1 \circ d_0$  et  $d_2 \circ F_2 = F_1 \circ d_2$  implique que  $F_2(X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2) = F_0(X_0) \xrightarrow{F_1(f_1)} F_0(X_1) \xrightarrow{F_1(f_2)} F_0(X_2)$  et ainsi que  $F_1(f_2 \circ f_1) = F_1(f_2) \circ F_1(f_1)$  car  $d_1 \circ F_2 = F_1 \circ d_1$ . la compatibilité avec les identités se voit en appliquant les dégnéréscences. On en déduit que  $F_\bullet$  détermine bien un foncteur  $\tilde{F}$  et que  $N_\bullet(\tilde{F}) = F_\bullet$ . Cela termine la preuve.  $\square$

Il est relativement aisé de montrer que le nerf préserve les limites ce qui suggère<sup>83</sup> que c'est un adjoint à droite.

**Proposition 4.2.12.** Le foncteur nerf  $N_\bullet(-) : \mathbf{cat} \rightarrow \mathbf{sEns}$  est un adjoint à droite dont on notera  $\tilde{\pi}$  l'adjoint à gauche.

Notons que l'adjoint du nerf est décrit dans le corrigé de la feuille de TD 5.

Nous verrons dans la section 4.2.2 que cette adjonction se décompose en deux parties.

**4.2.2. Quasicatégories.** L'idée derrière la notion de quasicatégorie est d'utiliser la caractérisation du nerf en retirant la condition d'unicité du relèvement. Ceci va donner une notion de composition qui ne sera définie qu'à une 2-cellule (c'est à dire une homotopie près) et de même les compositions et autres structures seront déterminées à des cellules supérieures près.

**Définition 4.2.13** (Quasicatégorie). Une quasicatégorie est un ensemble simplicial  $X_\bullet$  qui satisfait que tout morphisme  $\Lambda_{r,\bullet}^n X_\bullet$  ( $0 < r < n$ ) d'un cornet interne a un relèvement en un  $n$ -simplexe  $\Delta_\bullet^n \rightarrow X_\bullet$ . Autrement dit, il existe, pour tout  $0 < r < n$ , un relèvement  $h$  dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{r,\bullet}^n & \longrightarrow & X_\bullet \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow \\ \Delta_\bullet^n & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

rendant les triangles commutatifs.

Un morphisme entre quasicatégorie est simplement un morphisme entre les ensembles simpliciaux sous-jacents. On appellera  $\infty$ -foncteur un tel morphisme d'ensembles simpliciaux.

Un sommet  $x \in X_0$  d'une quasicatégorie est appelé un objet de  $X_\bullet$  et 1-simplexe  $f \in X_1$  est appelé un (1-)morphisme (ou une flèche) de l'objet  $d_1(f)$  vers l'objet  $d_0(f)$ .

<sup>83</sup>. voir le théorème 6.2.53

Enfin on appellera morphisme unité d'un objet  $x$  la dégénérescence  $s_0(x) \in \mathbf{C}_1$  de  $x$ <sup>84</sup>. On le notera  $\text{id}_x \in \mathbf{C}_1$ .

*Exemple 4.2.14.* D'après la proposition 4.2.11, on a un plongement pleinement fidèle des catégories dans les quasi-catégories ; et on peut caractériser les catégories ordinaires comme celles ayant la propriété de l'existence d'unique relèvements. Les objets et morphismes de  $\mathbf{C}$  correspondent précisément à ceux de  $N_\bullet(\mathbf{C})$  dans la définition 4.2.13 tout comme les foncteurs de  $\mathbf{C}$  vers  $\mathbf{D}$  correspondent précisément à ceux de  $N_\bullet(\mathbf{C})$  vers  $N_\bullet(\mathbf{D})$ .

*Exemple 4.2.15.* Un complexe de Kan, c'est à dire un ensemble simplicial fibrant (pour la structure de modèle de Quillen sur  $\mathbf{sEns}$ ), est une quasi-catégorie. Au vu de la proposition 4.2.11, une catégorie ordinaire donne un complexe de Kan si et seulement si c'est un groupoïde. Cela suggère la terminologie suivante.

*Exemple 4.2.16.* Nous verrons ci-dessous 4.4 qu'une catégorie  $\mathbf{C}$  munie d'une classe d'équivalence faible donne une quasicatégorie "relevant" la catégorie homotopique  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  (dans un sens rendu précis ci-dessous 4.2.3. Ceci donne une large classe d'exemples de quasicatégories qui ne sont ni le nerf d'une catégorie ni un complexe de Kan.

*Terminologie 4.2.17.* On appelle souvent<sup>85</sup> (petite)  $\infty$ -catégorie la donnée d'une quasicatégorie et  $\infty$ -foncteur (ou juste foncteur) un morphisme de quasicatégorie.

Un complexe de Kan, (vu comme quasicatégorie ayant en plus la propriété d'extensions pour les cornets initiaux et finaux), est appelé un  $\infty$ -groupoïde. Les propositions 4.2.38 et 4.2.11.(1) justifient cette terminologie.

*Notation 4.2.18.* Étant donné que nous pensons à une quasicatégorie comme une généralisation des catégories ordinaires, pour  $x, y$  des objets d'une quasicatégorie  $\mathbf{C}_\bullet$ , nous noterons souvent  $\text{Hom}_{\mathbf{C}_\bullet}(x, y)$  le sous-ensemble des morphismes de  $x$  vers  $y$ , c'est à dire le sous-ensemble des  $f \in \mathbf{C}_1$  tels que  $d_1(f) = x$  et  $d_0(f) = y$ .

Nous avons vu 3.2.12 que les morphismes entre ensembles simpliciaux sont naturellement munis d'une structure d'ensemble simplicial (dont les 0-simplexes sont précisément les morphismes). Ceci nous amène à poser :

**Définition 4.2.19.** Soit  $\mathbf{C}_\bullet$  une quasicatégorie et  $x, y \in \mathbf{C}_0$  des objets. L'espace des morphismes de  $x$  vers  $y$  est

$$\text{Map}_{\mathbf{C}_\bullet}(x, y) := \{x\} \times_{\mathbf{C}_\bullet} \text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^1, \mathbf{C}_\bullet) \times_{\mathbf{C}_\bullet} \{y\}$$

c'est à dire le produit fibré dans  $\mathbf{sEns}$  donné par le pullback

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}_{\mathbf{C}_\bullet}(x, y) & \longrightarrow & \text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^1, \mathbf{C}_\bullet) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \text{ev}_0, \text{ev}_1 \\ \{*\} & \xrightarrow{x \times y} & \mathbf{C}_\bullet \times \mathbf{C}_\bullet \end{array}$$

84. qui est bien un morphisme de  $x$  vers  $x$

85. c'est peut être le modèle le plus populaire, notamment suite aux travaux de Lurie pour les  $\infty$ -catégories

où  $x, y : \{*\} \rightarrow \mathbf{C}_\bullet$  sont les morphismes qui envoient le point sur les objets  $x, y$  respectivement<sup>86</sup> et  $ev_i = \text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^1, \mathbf{C}_\bullet) \xrightarrow{-\circ \text{inc}_i} \text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^0, \mathbf{C}_\bullet) \cong \mathbf{C}_\bullet$  sont les morphismes induits par les deux inclusions  $\text{inc}_i : \{*\} = \Delta_\bullet^0 \hookrightarrow \Delta_\bullet^1$  d'un point dans les deux sommets<sup>87</sup> de  $\Delta_\bullet^1$ .

**Proposition 4.2.20.** Soit  $\mathbf{C}_\bullet$  une quasi-catégorie. Alors, pour tout objets  $x, y \in \mathbf{C}_0$  on a que

- (1)  $\text{Map}_{\mathbf{C}_\bullet}(x, y)$  est un complexe de Kan (autrement dit un  $\infty$ -groupeoïde au sens de 4.2.17).
- (2) Les 0-simplexes de  $\text{Map}_{\mathbf{C}_\bullet}(x, y)$  sont les morphismes de  $x$  vers  $y$  : autrement dit on a un isomorphisme canonique  $\text{Map}_{\mathbf{C}_\bullet}(x, y)_0 \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}_\bullet}(x, y)$ .

La proposition nous dit donc qu'une quasicatégorie a bien un espace à homotopie près de morphismes entre objets comme prescrit par 4.1.2.

*Démonstration.* Les tirés en arrière d'ensembles simpliciaux se calculent degré par degré. Comme  $\text{Hom}_{\mathbf{C}_\bullet}(x, y)$  est défini comme le produit fibré  $\{x\} \times_{\mathbf{C}_0} \mathbf{C}_1 \times_{\mathbf{C}_0} \{y\}$ , le résultat de 4.2.20.(2) est une conséquence de l'isomorphisme canonique  $\text{Map}_0(\Delta_\bullet^1, \mathbf{C}_\bullet) \cong \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta_\bullet^1, \mathbf{C}_\bullet) \cong \mathbf{C}_1$ .

L'identification (cf 3.2.15) d'ensembles simpliciaux  $\text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^0, \mathbf{C}_\bullet) \cong \mathbf{C}_\bullet$  nous donne que le morphisme  $(ev_0, ev_1)$  s'identifie avec le morphisme

$$\text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^1, \mathbf{C}_\bullet) \xrightarrow{-\circ(\text{inc}_0 \amalg \text{inc}_1)} \text{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^0 \amalg \Delta_\bullet^0, \mathbf{C}_\bullet).$$

Or  $\Delta_\bullet^0 \amalg \Delta_\bullet^0 \hookrightarrow \Delta_\bullet^1$  est une cofibration car injective en chaque degré. Il suit du lemme 3.2.17 que c'est une fibration si  $\mathbf{C}_\infty$  est fibrant dans  $\mathbf{sEns}$ , c'est à dire est un complexe de Kan. Donc son tiré en arrière est aussi une fibration ce qui donne par définition que  $\text{Map}_{\mathbf{C}_\bullet}(x, y)$  est de Kan. Si  $\mathbf{C}_\infty$ , la preuve donne que l'ensemble simplicial est bien une quasi-catégorie. Pour démontrer que c'est bien un complexe de Kan, il faut montrer qu'il a aussi la propriété de relèvement par rapports aux cornets initiaux et finaux. Les deux cas sont duaux et basé sur les arguments de la proposition 4.2.38 que nous ne démontrerons pas. Nous renvoyons à [16] pour une preuve complète.  $\square$

**Lemme 4.2.21.** La postcomposition  $f_\bullet \mapsto F_\bullet \circ f_\bullet$  est un morphisme d'ensembles simpliciaux  $\text{Map}_{\mathbf{C}_\bullet}(x, y) \xrightarrow{F_\bullet \circ -} \text{Map}_{\mathbf{D}_\bullet}(F_0(x), F_0(y))$ .

*Démonstration.* La composition de morphismes d'ensembles simpliciaux est un morphisme d'ensemble simplicial ; le résultat découle donc de la propriété universelle du tiré-en-arrière.  $\square$

La proposition suivante nous dit que les foncteurs entre quasicatégories sont les objets d'une quasicatégorie.

**Proposition 4.2.22.** Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial et  $\mathbf{C}_\bullet$  une quasicatégorie. Alors l'ensemble simplicial  $\text{Map}_\bullet(X_\bullet, \mathbf{C}_\bullet)$  est une quasicatégorie.

La proposition nous permet de poser les définitions suivantes.

**Définition 4.2.23.** Soit  $\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet$  des quasicatégories.

86. et sur leurs dégénérescences itérées en degré simplicial  $> 0$

87. autrement dit  $\text{inc}_i$  est induit par le morphisme  $[0] \rightarrow [1]$  donné par  $0 \mapsto i, i = 0, 1$

- On appelle  $\infty$ -catégorie des foncteurs de  $\mathbf{C}_\bullet$  vers  $\mathbf{D}_\bullet$  la quasicatégorie  $\mathrm{Map}_\bullet(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)$ . Notons que les objets de cette quasicatégorie sont précisément les foncteurs de  $\mathbf{C}_\bullet$  vers  $\mathbf{D}_\bullet$  au sens de la définition 4.2.13.
- Les  $(\infty)$ -transformations naturelles sont les 1-morphismes de cette catégorie.
- Un  $\infty$ -foncteur  $F_\bullet : \mathbf{C}_\bullet \rightarrow \mathbf{D}_\bullet$  est dit *pleinement fidèle* si pour tous les objets  $x, y \in \mathbf{C}_0$ , on a que le morphisme d'ensembles simpliciaux induit

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{C}_\bullet}(x, y) \xrightarrow{F_\bullet \circ -} \mathrm{Map}_{\mathbf{D}_\bullet}(F_0(x), F_0(y))$$

est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

*Exercice 4.2.24.* Vérifier que si  $\mathbf{C}, \mathbf{D}$  sont des catégories ordinaires, la quasicatégorie des foncteurs est le nerf de la catégorie des foncteurs  $\mathrm{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ , c'est à dire  $\mathrm{Map}_\bullet(N_\bullet(\mathbf{C}), N_\bullet(\mathbf{D})) \cong N_\bullet(\mathrm{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D}))$ .

*Démonstration de la proposition 4.2.22.* C'est une conséquence du lemme plus général suivant, appliqué à  $Z_\bullet = \mathbf{C}_\bullet$ ,  $Y_\bullet = \{*\}$  et  $L_\bullet = K_\bullet = X_\bullet$ .

**Lemme 4.2.25.** Soit  $L_\bullet \hookrightarrow K_\bullet$  un morphisme injectif degré par degré (donc une cofibration) et  $p : Z_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  un morphisme d'ensembles simpliciaux qui a la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les inclusions de cornets internes. Alors le morphisme canonique

$$\mathrm{Map}_\bullet(K_\bullet, Z_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Map}_\bullet(L_\bullet, Z_\bullet) \times_{\mathrm{Map}_\bullet(L_\bullet, Y_\bullet)} \mathrm{Map}_\bullet(K_\bullet, Y_\bullet)$$

a la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les inclusions  $\Lambda_{k,\bullet}^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n$  ( $0 < k < n$ ) de cornets internes.

*Preuve du lemme 4.2.25.* Elle est similaire à celle du lemme 3.2.17. Il faut montrer que pour tout  $0 < r < n$ , il existe un relèvement (en pointillé) dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{r,\bullet}^n & \longrightarrow & \mathrm{Map}_\bullet(K_\bullet, Z_\bullet) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta_\bullet^n & \longrightarrow & \mathrm{Map}_\bullet(L_\bullet, Z_\bullet) \times_{\mathrm{Map}_\bullet(L_\bullet, Y_\bullet)} \mathrm{Map}_\bullet(K_\bullet, Y_\bullet) \end{array}$$

qui rend les deux triangles commutatifs. De la loi exponentielle 3.2.16, on déduit qu'un tel diagramme commutatif est équivalent à un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{r,\bullet}^n \times K_\bullet \cup_{\Lambda_{r,\bullet}^n \times L_\bullet} \Delta_\bullet^n \times L_\bullet & \longrightarrow & Z_\bullet \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta_\bullet^n \times K_\bullet & \longrightarrow & Y_\bullet \end{array}$$

L'argument de la preuve du lemme 3.2.9.(3) nous donne que flèche de gauche a la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les flèches ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux inclusions de cornets internes. Le relèvement existe donc puisque la flèche de droite a justement cette propriété.  $\square$

$\square$



Soit  $\mathbf{C}_\bullet$  une quasicatégorie et  $f, g \in \mathbf{C}_1$  deux morphismes dans  $\mathbf{C}_\bullet$  vérifiant  $d_0(f) = d_1(g)$ , c'est à dire que la source de  $g$  est le but de  $f$ . Alors, la paire  $(f, g)$  définit un 2-cornet interne de  $\mathbf{C}_\bullet$ , autrement dit un morphisme  $\Lambda_{1,\bullet}^2 \rightarrow \mathbf{C}_\bullet$  (cf 3.2.3). Par définition d'une quasicatégorie 4.2.13, il existe des 2-simplexes  $\sigma \in \mathbf{C}_2$  (ce qui est la même chose qu'un morphisme  $\Delta_\bullet^2 \rightarrow \mathbf{C}_\bullet$ ) relevant  $(f, g)$  (i.e.  $d_0(\sigma) = g$ ,  $d_2(\sigma) = f$ ).

Contrairement au cas d’une catégorie ordinaire (ou de son nerf), une telle composition faible n’est *pas* unique en général. Montrons cependant que deux compositions faibles sont uniques à “homotopie<sup>88</sup>” près.

Four commutative triangles illustrating the naturality of the monoidal product. Each triangle has vertices 0, 1, and 2. The bottom edge is a horizontal arrow from 0 to 2. The left edge is an arrow from 0 to 1. The right edge is an arrow from 1 to 2. In the first triangle, the left arrow is  $\text{id}_x$ , the right arrow is  $g$ , and the bottom arrow is  $f$ . In the second triangle, the left arrow is  $g$ , the right arrow is  $\text{id}_y$ , and the bottom arrow is  $f$ . In the third triangle, the left arrow is  $\text{id}_x$ , the right arrow is  $f$ , and the bottom arrow is  $g$ . In the fourth triangle, the left arrow is  $f$ , the right arrow is  $\text{id}_y$ , and the bottom arrow is  $g$ .

Notons que la définition 4.2.27 a du sens pour toute paire de 1-simplexe avec les mêmes faces  $d_0, d_1$  dans un ensemble simplicial. En revanche le lemme suivant lui utilise que l'on a une quasicatégorie et est l'analogue du fait que la relation d'homotopie 3.3.1 est une relation d'équivalence pour les complexes de Kan. Le lemme suivant sera démontré à la fin de cette partie.

- (1) Soient  $f, g : x \rightarrow y$  des 1-morphismes de  $\mathbf{C}_\bullet$ . S'il existe un 2-simplexe d'une des quatre formes données dans la définition 4.2.27, alors il existe des 2-simplexes de chacune de ces quatre formes.
- (2) Tout 1-morphisme est équivalent à lui-même.
- (3) La relation d'équivalence sur les 1-morphismes est transitive.

89. on dit parfois homotope

*Notation 4.2.30.* On notera pour simplifier  $f \underset{\mathbf{C}_\bullet}{\sim} g$  la relation d'équivalence.

Armé de la notion d'équivalence, on peut énoncer le résultat suivant.

**Proposition 4.2.31.** Soit  $\mathbf{C}_\bullet$  une quasicatégorie et  $f, g$  deux 1-morphismes composables. Deux compositions faibles de  $f$  et  $g$  sont équivalentes.

*Démonstration.* Soient  $f : x \rightarrow y, g : y \rightarrow z$  des morphismes composables. Et soit  $\sigma_1, \sigma_2$  deux relèvements du 1-cornet interne représenté par la paire  $(f, g)$ . On note pour simplifier  $g \circ_1 f = d_1(\sigma_1)$  et  $g \circ_2 f = d_1(\sigma_2)$  les compositions faibles associées. La dégénérescence  $s_1(g) \in \mathbf{C}_2$  nous donne le 2-simplexe représenté par le diagramme

$$\Lambda_{1,\bullet}^3 \rightarrow \mathbf{C}_\bullet \text{ suivant}$$

(17)

où la face intérieure est donnée par  $\sigma_2$ , la face rouge sur le devant à gauche est donnée par  $\sigma_1$ , la face jaune par la dégénérescence de  $g$ . La face opposée est celle qui n'est pas remplie par la construction. Comme  $\mathbf{C}_\bullet$  est une quasicatégorie, on sait qu'il existe un 3-simplexe  $H \in \mathbf{C}_3 = \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta_\bullet^3, \mathbf{C}_\bullet)$  qui remplit ce diagramme. Alors  $d_1(H)$  est un 2-simplexe qui remplit la face opposée de (17). Par définition ce simplexe est une équivalence entre  $g \circ_2 f$  et  $g \circ_1 f$ .  $\square$

Montrons maintenant l'associativité à équivalence près des compositions faibles.

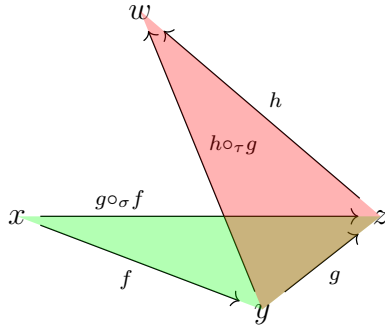
Notons que si  $x \xrightarrow{f} y, y \xrightarrow{g} z$  et  $z \xrightarrow{h} w$  sont trois flèches composables alors pour toute composition faible  $g \circ_\sigma f$  et  $h$  sont composables et de même pour  $f$  et  $h \circ_\tau g$

**Proposition 4.2.32.** Soient  $x \xrightarrow{f} y, y \xrightarrow{g} z$  et  $z \xrightarrow{h} w$  trois flèches composables. Alors, on a une équivalence

$$h \circ_\kappa (g \circ_\sigma f) \underset{\mathbf{C}_\bullet}{\sim} (h \circ_\tau f) \circ_\delta g$$

pour toutes compositions partielles (données par des 2-simplexes  $\sigma, \kappa, \tau, \delta$ ).

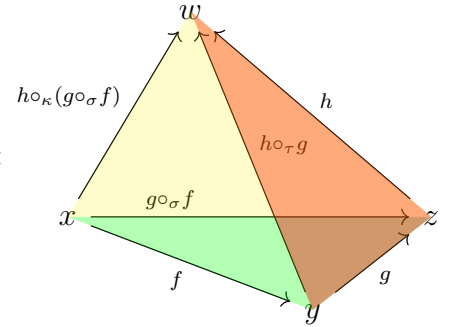
*Démonstration.* Fixons  $\sigma, \kappa, \tau$ . Par unicité de la composition à équivalence près 4.2.31, il suffit de montrer qu'il existe un 2-simplexe  $\delta' : \Delta_\bullet^2 \rightarrow \mathbf{C}_\bullet$  tel que  $d_1(\delta)' = h \circ_\kappa (g \circ_\sigma f)$ . On commence par recoller les 2-simplexes  $\sigma$  et  $\tau$



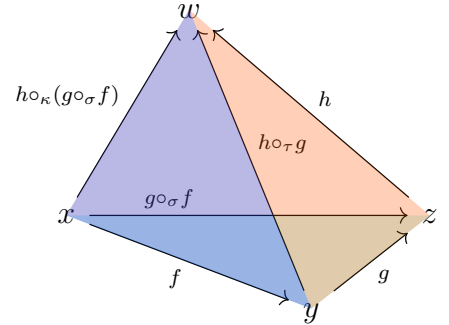
respectivement obtenus via les flèches composables

$(f, g)$  (la face verte en dessous) et  $(g, h)$  (la face rouge à droite). On recolle maintenant le 2-simplexe  $\kappa : \Delta^2_{\bullet} \rightarrow \mathbf{C}_{\bullet}$  (dessiné en jaune) correspondant aux flèches compo-

sables  $(g \circ_{\sigma} f, h)$ . et on obtient le 3-cornet interne  $\Lambda^3_{2,\bullet} \rightarrow \mathbf{C}_{\bullet}$  :



où  $\kappa$  est donc représenté sur la face opposée. Puisque  $\mathbf{C}_{\bullet}$  est une quasicatégorie, on peut relever ce 3-cornet interne en un 3-simplexe  $H$  et  $\delta' := d_2(H)$  nous donne alors la



face bleue de devant à gauche sur le diagramme suivant :

Par définition de la composition partielle associée à  $\delta' = d_2(H)$  on obtient bien que  $(h \circ_{\tau} g) \circ_{\delta'} f = d_1(\delta') = h \circ_{\kappa} (g \circ_{\sigma} f)$ .  $\square$

On peut maintenant définir la catégorie homotopique d'une quasicatégorie de la manière suivante.

**Définition 4.2.33** (Catégorie homotopique d'une quasicatégorie). Soit  $\mathbf{C}_{\bullet}$  une quasicatégorie. On notera  $\pi(\mathbf{C}_{\bullet})$  la catégorie dont les objets sont ceux de  $\mathbf{C}_{\bullet}$  et les 1-morphismes sont les classes d'équivalence de 1-morphismes de  $\mathbf{C}_{\bullet}$  (cf définition 4.2.27). La *composition* est donnée par la classe d'équivalence des compositions faibles et les unités par les classes d'équivalence des flèches unités  $\text{id}_x$  de  $\mathbf{C}_{\bullet}$ .

On utilise la notation  $\pi(\mathbf{C}_{\bullet})$  et non pas  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_{\bullet})$  essentiellement pour spécifier que c'est une construction spécifique aux quasicatégories (et que nous allons comparer les deux) et rappeler le groupoïde fondamental 4.2.39, mais en pratique on peut confondre les deux constructions.

**Corollaire 4.2.34.** Si  $\mathbf{C}_\bullet$  est une quasicatégorie, alors  $\pi(\mathbf{C}_\bullet)$  est bien une catégorie et  $\mathbf{C}_\bullet \mapsto \pi(\mathbf{C}_\bullet)$  définit un endofoncteur de la catégorie des quasicatégories donné par la règle qui à  $F : \mathbf{C}_\bullet \rightarrow \mathbf{D}_\bullet$  un  $\infty$ -foncteur, associe la règle  $[f] \mapsto [F(f)]$ . De plus,

- (1) On a des un  $\infty$ -foncteur naturel (en  $\mathbf{C}_\bullet$ )  $\pi_{\mathbf{C}_\bullet} : \mathbf{C}_\bullet \rightarrow N_\bullet(\pi(\mathbf{C}_\bullet))$  donné par la règle qui à  $f : x \rightarrow y$  un morphisme de  $\mathbf{C}_\bullet$ , associe la classe d'équivalence  $[f] \in \text{Hom}_{\pi(\mathbf{C})}(x, y)$ ;
- (2) on a des équivalences naturelles de quaiscatégories

$$\pi(N_\bullet(\mathbf{C})) \cong \mathbf{C},$$

$$\text{Fun}(\pi(\mathbf{C}_\bullet), \pi(\mathbf{D}_\bullet)) \cong \pi(\text{Fun}(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)).$$

*Démonstration.* Que  $\pi(\mathbf{C})$  soit une catégorie découle immédiatement des propositions 4.2.31 et 4.2.32 qui garantissent que la composition est uniquement définie et associative. De plus nous avons dans la preuve de la proposition 4.2.31 que pour tout morphisme  $f$ , on a un 2-simplexe dégénéré  $s_1(f) \in \mathbf{C}_2 =$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ f \nearrow & & \searrow \text{id}_y \\ 0 & \xrightarrow{f} & 2. \end{array}$$

qui nous donne que  $d_1(s_0(f)) = f$  et donc que  $\text{id}_y$  est bien une unité à droite. Pour l'unité à gauche on utilise bien sûr  $s_1(f)$  à la place de  $s_0(f)$ .

Le point (1) découle maintenant du fait qu'un foncteur entre quasicatégories est un morphisme d'ensembles simpliciaux. En particulier si  $\sigma$  est une 2-cellule levant le 2-cornet interne associée à une paire composable  $(f, g)$ , alors  $F(\sigma)$  est une 2-cellule relevant le 2-cornet associé à  $(F(f), F(g))$ . Il suit que  $[F(f \circ_\sigma g)] = [F(f) \circ_{F(\sigma)} F(g)] = [F(f)] \circ [F(g)]$ . On montre de même que les unités sont préservées.

Enfin le point (2) découle de la proposition 4.2.11 et des exemples 4.2.14.  $\square$

*Remarque 4.2.35.* La catégorie homotopique d'une quasicatégorie permet de relever certains concepts standards aux  $\infty$ -catégories. Par exemple

*Définition 4.2.36.* Un morphisme  $f : x \rightarrow y$  d'une quasicatégorie  $\mathbf{C}_\bullet$  est appelé un *isomorphisme* si  $[f]$  est un isomorphisme de  $\pi(\mathbf{C}_\bullet)$ .

De même, en combinant cette dernière définition avec 4.2.23, on obtient les définitions suivantes.

*Définition 4.2.37.* Soit  $\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet$  des quasicatégories.

- Un  $\infty$ -foncteur  $F : \mathbf{C}_\bullet \rightarrow \mathbf{D}_\bullet$  est essentiellement surjectif si  $\pi(F) : \pi(\mathbf{C}_\bullet) \rightarrow \pi(\mathbf{D}_\bullet)$  l'est.
- Deux  $\infty$ -foncteurs  $F, G : \mathbf{C}_\bullet \rightarrow \mathbf{D}_\bullet$  sont naturellement équivalents si ils sont isomorphes (au sens de 4.2.36) en tant que morphismes dans la quasicatégorie  $\text{Map}_\bullet(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)$ .

On peut montrer (mais ce n'est pas trivial) le résultat suivant qui est important et identifie les  $\infty$ -groupoïdes avec les  $\infty$ -catégories dont tous les éléments sont inversibles.

*Proposition 4.2.38.* Soit  $\mathbf{C}_\bullet$  une quasicatégorie. On a que  $\mathbf{C}_\bullet$  est un  $\infty$ -groupoïde<sup>90</sup> si et seulement si tous les morphismes de  $\mathbf{C}_\bullet$  sont inversibles c'est à dire si et seulement si  $\pi(\mathbf{C}_\bullet)$  est un groupoïde.

90. c'est à dire un complexe de Kan par définition 4.2.17

*Exemple 4.2.39.* Soit  $X$  est un espace topologique, alors  $\text{Sing}_\bullet(X)$  est un complexe de Kan donc est un  $\infty$ -groupeoïde. Par construction et le lemme 3.3.9, on a que  $\pi(\text{Sing}_\bullet(X))$  est équivalente au groupoïde fondamental de  $X$ . On peut donc voir  $\text{Sing}_\bullet(X)$  comme l' $\infty$ -groupeoïde associé à l'espace topologique  $X$ . Nous allons voir que l'équivalence de Quillen 3.2.18 nous dit que réciproquement, tout  $\infty$ -groupeoïde au sens des quasicatégories est équivalent à un espace topologique.

*Exemple 4.2.40.* Nous verrons ci-dessous 4.4.11 qu'une catégorie  $\mathbf{C}$  munie d'une classe d'équivalence faible donne un exemple de quasicatégorie non-triviale  $\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C})$  dont la catégorie homotopique est équivalente à  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ .

Les deux exemples précédents donnent une grande source d'exemples de quasicatégories.

Donnons une démonstration que nous avons laissé de côté.

*Démonstration du lemme 4.2.29.* Le point essentiel est que nous avons les 2-cellules dégénérées  $s_1(f) \in \mathbf{C}_2 =$

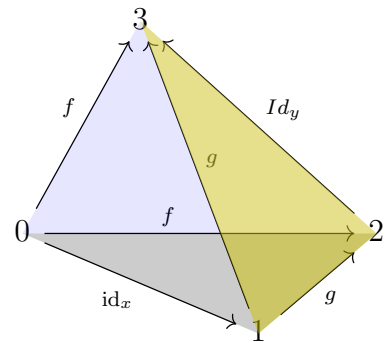
$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ f \nearrow & \text{id}_y \parallel & \searrow \\ 0 & \xrightarrow{f} & 2 \end{array} \quad \text{et} \quad s_0(f) = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ \text{id}_x \parallel & & f \searrow \\ 0 & \xrightarrow{f} & 2 \end{array}$$

peut recoller à l'une des 4 formes et montrent directement le point (2). Par exemple, on obtient à partir de la première forme

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ \text{id}_x \parallel & & g \searrow \\ 0 & \xrightarrow{f} & 2, \end{array}$$

donné par sur la face du fond une dégénérescence de  $f$ , et toujours  $s_1(g)$  à droite on

obtient un 3-cornet interne  $\Lambda_{2,\bullet}^3 \rightarrow \mathbf{C}_\bullet$  différent



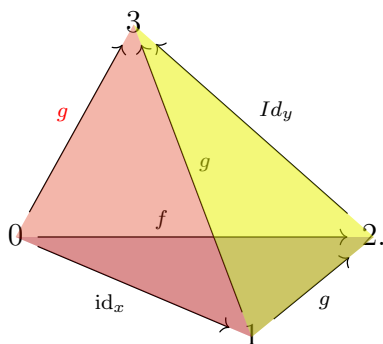
obtenu

en collant sur la face du fond la dégénérescence  $s_1(f)$  de  $f$ , et la dégénérescence  $s_1(g)$  à droite. L'existence d'un relèvement de ce 3-cornet interne nous donne l'existence de la face du fond qui est précisément la forme symétrique

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ \text{id}_x \parallel & & f \searrow \\ 0 & \xrightarrow{g} & 2 \end{array}.$$

On obtient la forme symétrique de la deuxième forme de la même manière.

Si en revanche on avait collé les dégénérescences de  $g$  correspondant aux faces rouges et jaunes on aurait obtenu un autre type de 3-cornet interne  $\Lambda_{1,\bullet}^3 \rightarrow \mathbf{C}_\bullet$ .



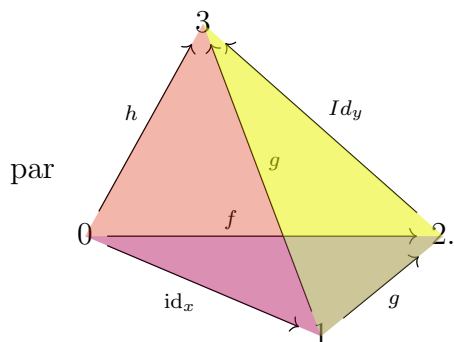
Le relevé nous fournit (en prenant sa face  $d_1$ ) une

équivalence de la forme

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ \text{id}_x \swarrow & & \searrow f \\ 0 & \xrightarrow{g} & 2, \end{array}$$

ce qui permet de conclure pour le point

(1) en utilisant les différentes symétries. Finalement, pour le point (3), étant donné une équivalence entre  $f$  et  $g$  et entre  $g$  et  $h$ , que l'on peut choisir de la forme que l'on souhaite par (1), on construit un 3-cornet interne  $\Lambda_{1,\bullet}^3$  similaire au précédent donné



par

La face opposée du relèvement donne précisément

une équivalence entre  $f$  et  $h$ .  $\square$

**Remarque 4.2.41. Cas des catégories non-petites** La définition 4.2.13 d'une quasicatégorie que nous avons donné correspond à celle d'une petite  $\infty$ -catégorie. Si ce n'est pas gênant en ce qui concerne l'exemple 4.1.1, ça l'est beaucoup plus dans l'objectif d'associer une  $\infty$ -catégorie à une catégorie de modèle puisque ces dernières étant (co)complètes, elles ne sont essentiellement jamais petites.

La structure de modèle des catégories simplicialement enrichies 4.3 se placera naturellement dans ce contexte. D'un point de vue quasicatégorie, la solution est de se placer dans des univers plus large et considérer des objets simpliciaux dans ce contexte. La définition d'une quasicatégorie est alors la même dans ce contexte. En particulier, si  $\mathbf{C}$  est une catégorie non-nécessairement petite, on peut définir le nerf de  $\mathbf{C}$  comme l'objet simplicial

$$N_{\bullet}(\mathbf{C}) := \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}([\bullet], \mathbf{C})$$

en prenant les morphismes entre catégories non nécessairement petites. L'objet obtenu est un objet simplicial (qu'on peut voir comme un objet simplicial dans  $\mathbf{Cat}_{\text{disc}}$  la sous-catégorie de  $\mathbf{Cat}$  des catégories discrètes, c'est à dire qui n'ont que des identités comme morphismes) qui vérifie la proposition 4.2.11. Notons que si  $\mathbf{C}$  est une catégorie avec des ensembles de morphismes, alors on a encore que  $\text{Map}_{N_{\bullet}(\mathbf{C}_{\bullet})}(x, y)$  est bien un *ensemble* simplicial, qui est de Kan. De plus, quel que soit l'univers dans lequel on s'est placé, les diagrammes définissant les propriétés des relèvements des

cornets internes ne concernent que des ensembles puisque les cornets et simplexes sont des ensembles simpliciaux (par ailleurs finis).

En particulier, on peut généraliser la définition 4.2.13 et tous les résultats des section 4.2.2, 4.2.3 s'étendent à ce contexte. Précisément :

- on peut définir les quasicatégories comme les objets simpliciaux  $\mathbf{C}_\bullet$  de  $\mathbf{Cat}_{\text{disc}}$  qui vérifient la propriété de relèvement par rapport aux inclusions de cornets internes, c'est à dire l'existence de relèvements

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{r,\bullet}^n & \longrightarrow & \mathbf{C}_\bullet \\ \downarrow & \nearrow h & \\ \Delta_\bullet^n & & \end{array}$$

- et tels que pour tout objets (c'est à dire 0-simplexes)  $x, y \in \mathbf{C}_0$ , les tirés en arrière  $\text{Map}_{\mathbf{C}_\bullet}(x, y) := \{x\} \times_{\mathbf{C}_\bullet} \text{Map}_{\mathbf{Cat}_{\text{disc}}}(\Delta_\bullet^1, \mathbf{C}_\bullet) \times_{\mathbf{C}_\bullet} \{y\}$  soient des *ensembles* simpliciaux, nécessairement de Kan.
- On a une catégorie  $\mathbf{QCat}_f$  des quasicatégories non-nécessairement petites dont les objets sont les quasicatégories non-nécessairement petites et les morphismes les morphismes simpliciaux entre tels objets ; pour toute paire de quasicatégorie, on a une quasicatégorie large  $\text{Map}_\bullet(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)$  des foncteurs de  $\mathbf{C}_\bullet$  vers  $\mathbf{D}_\bullet$ .
- Le nerf  $N_\bullet(-) := \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}([\bullet], -)$  est un foncteur  $\mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{QCat}_f$  pleinement fidèle.
- Toutes les définitions, exemples, lemmes et propositions de 4.2.3, 4.2.2 sont vraies dans ce contexte, quitte à changer **cat** en **Cat**.

On peut évidemment généraliser encore plus et travailler avec des catégories plus larges de la même façon. Cette approche a d'ailleurs l'avantage de ne pas considérer la classe des objets comme une classe particulière (contrairement à l'usage en théorie des catégories) mais comme une classe de flèches de source et but "vide".

**4.2.4. Structure de modèle de Joyal sur les quasicatégories.** Les quasicatégories forment un modèle populaire des  $\infty$ -catégories qui ont cependant quelques inconvénients : par exemple, la composition n'est pas définie strictement<sup>91</sup>. Nous avons aussi construit des quasicatégories de foncteurs entre (petites) quasicatégories mais pas une quasicatégorie des quasicatégories.

Pour remédier à cela nous allons introduire une structure de modèle encodant les quasicatégories et les  $\infty$ -foncteurs entre elles. Cela nous permettra également de comparer ce modèle avec d'autres modèles. Le point important est que l'on va définir une structure de modèle sur **sEns** dont les objets fibrants sont les quasicatégories et les équivalences faibles vont encoder le fait d'avoir une équivalence des espaces de morphismes induisant des équivalences de catégories homotopiques.

*Terminologie 4.2.42.* Soit  $\mathbf{C}_\bullet$  une quasicatégorie. On note  $\pi_0(\mathbf{C}_\bullet)$  l'ensemble des classes d'isomorphismes de la catégorie  $\pi(\mathbf{C}_\bullet)$  associée à  $\mathbf{C}_\bullet$ .

**Définition 4.2.43** (Structure de modèle de Joyal). Soit  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  un morphisme d'ensembles simpliciaux. On dit que

<sup>91</sup>. on peut la strictifier pour résoudre ce problème, ce qui conduit en fait à regarder la notion de catégorie simplicialement enrichie en fait ; attention en faisant cela on peut perdre la propriété d'avoir un complexe de Kan de morphismes...

- $f$  est une équivalence catégorielle<sup>92</sup> si pour toute quasicatégorie  $\mathbf{C}_\bullet$ , le morphisme induit  $f^* : \pi_0(\mathrm{Map}_\bullet(Y_\bullet, \mathbf{C}_\bullet)) \xrightarrow{-\circ f} \pi_0(\mathrm{Map}_\bullet(X_\bullet, \mathbf{C}_\bullet))$  est un isomorphisme ;
- une cofibration si  $f$  est injectif en chaque degré simplicial<sup>93</sup>
- une fibration de Joyal si elle a la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les cofibrations qui sont des équivalences catégorielles.

On notera respectivement  $\mathcal{W}^J$  la classe des équivalences catégorielles,  $\mathcal{C}$  celle des cofibrations et  $\mathcal{F}^J$  celle des fibrations de Joyal. On appelle cette donnée la structure de Joyal.

**Théorème 4.2.44.** La catégorie des ensembles simpliciaux  $(\mathbf{sEns}, \mathcal{W}^J, \mathcal{F}^J, \mathcal{C})$  munie de la structure de Joyal est une catégorie de modèle cofibrement engendrée et propre à gauche.

Les objets fibrants de cette structure sont précisément les quasicatégories.

On notera  $\mathbf{Qcat}$  cette structure de modèle<sup>94</sup> et on l'appellera la catégorie de modèle des (petites) quasicatégories. Par définition  $\mathbf{QCat}_f$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{QCat}$  de ses objets fibrants. On notera  $R^J$  le remplacement fibrant associé à la structure de Joyal qui à un ensemble simplicial associe donc sa quasicatégorie associée par définition 4.2.13.

On notera aussi  $\mathbf{QCat}$  celle des quasicatégories non-petites (reprenant les idées de 4.2.41). Précisément, cette dernière et ses autres variantes s'obtiennent en définissant des structures de modèle similaire sur  $\mathbf{sEns}^{\mathcal{U}}$  la catégories des objets simpliciaux dans un univers  $\mathcal{U}$  donné.

*Remarque 4.2.45.* Tous les objets de  $\mathbf{Qcat}$  sont cofibrants, comme pour la structure de Quillen sur les ensembles simpliciaux<sup>95</sup>.

*Remarque 4.2.46.* Les équivalences faibles de ces structures sont difficiles à identifier en général. Cependant :

*Exercice 4.2.47.* Démontrer que si un foncteur  $F$  est une équivalence de catégories (ordinales), alors  $N_\bullet(F)$  est une équivalence catégorielle.

*Exercice 4.2.48.* Démontrer que si  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est une fibration acyclique, alors  $f$  est une équivalence catégorielle.

**Proposition 4.2.49.** Le nerf et le foncteur catégorie homotopique forment une adjonction de Quillen  $\mathbf{Qcat} \begin{matrix} \xrightarrow{\pi \circ R^J} \\ \xleftarrow{N_\bullet} \end{matrix} \mathbf{cat}$  où  $\mathbf{cat}$  est munie de sa structure de modèle canonique.

De même leur extension  $\mathbf{QCat} \begin{matrix} \xrightarrow{\pi \circ R^J} \\ \xleftarrow{N_\bullet} \end{matrix} \mathbf{Cat}$  aux (quasi)catégories non petites est une adjonction de Quillen

92. nous suivons la convention de Lurie ; Joyal appelle cela une équivalence catégorielle faible

93. c'est donc la même notion de cofibration que celle des Quillen dans  $\mathbf{sEns}$

94. le contexte devrait toujours permettre de ne pas confondre cette structure de modèle avec sa sous-catégorie des objets fibrants

95. en particulier cette catégorie de modèle est donc propre à gauche



Le foncteur de remplacement fibrant dans  $\mathbf{sEns}$  nous donne un endofoncteur  $R : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{sEns}$  qui envoie une quasicatégorie sur un complexe de Kan.

*Terminologie* 4.2.50. On dit que le foncteur associé  $\mathbf{C}_\bullet \mapsto R(\mathbf{C}_\bullet)$  associe à une quasicatégorie son  $\infty$ -groupeoide sous-jacent. Ceci est justifié par l'exemple 4.2.52.

*Notation* 4.2.51. Si  $\mathbf{C}_\bullet$  est une quasicatégorie, on notera  $\mathbf{C}_\bullet^{iso} = R(\mathbf{C})$  son  $\infty$ -groupeoide sous-jacent.

*Exemple* 4.2.52. On a un isomorphisme naturel  $R(N_\bullet(\mathbf{C})) \cong N_\bullet(\mathbf{C}^{iso})$  où  $\mathbf{C}^{iso}$  est le groupeoide sous-jacent à  $\mathbf{C}$ , c'est à dire la plus grande sous-catégorie de  $\mathbf{C}$  qui est un groupeoide.

*Remarque* 4.2.53. On a une catégorie de modèle des quasicatégories qui généralise celle des catégories. Les équivalences faibles de la catégorie de modèle des catégories sont les équivalences de catégories. En particulier la catégorie homotopique de cette dernière encode les catégories et les classes d'équivalence de foncteurs, c'est à dire les foncteurs à équivalence près, voir le devoir maison.

La catégorie de modèle des quasicatégories donne une construction similaire pour les  $\infty$ -catégories.

#### 4.3. LE MODÈLE DES CATÉGORIES ENRICHIES SIMPLICIALEMENT

Nous en venons maintenant à un autre modèle très naturel aussi qui est obtenu en considérant des catégories munies d'une topologie, ou au vu du théorème 3.2.18, d'une structure d'ensemble simplicial (qui est plus maniable car plus petite et se transpose plus naturellement dans de nombreux exemples et domaines mathématiques).

Il existe une structure de modèle canonique sur les catégories, qui a été développée en devoir. L'idée est de combiner cette structure et celle de Quillen sur  $\mathbf{sEns}$  (ou  $\mathbf{Top}$ ) pour obtenir un modèle des  $\infty$ -catégories réalisant précisément l'idée d'une catégorie munie d'un espace à homotopie près de morphismes.

**Définition 4.3.1.** Une catégorie  $\mathbf{C}$  est dite simplicialement enrichie<sup>96</sup> si elle est munie d'ensembles simpliciaux de morphismes  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(x, y)_\bullet$  pour toute paire d'objets  $x, y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$  et de morphismes d'ensembles simpliciaux  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(y, z)_\bullet \times \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(x, y)_\bullet \xrightarrow{\circ} \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(x, z)_\bullet$  vérifiant :

- $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(x, y)_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$  et la restriction de  $\circ$  aux 0-simplexes est la composition dans  $\mathbf{C}$  ;
- $\circ$  est associative et les morphismes identités de  $\mathbf{C}$  sont des unités pour  $\circ$ .

Un foncteur de catégories enrichies simplicialement est un foncteur tel que les applications induites au niveau des espaces de morphismes soient des morphismes d'ensembles simpliciaux, c'est à dire une règle  $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \ni X \mapsto F(X) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$  au niveau des objets et pour tous objets  $X, Y \in \mathbf{C}$ , des morphismes d'ensembles simpliciaux  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y)_\bullet \rightarrow \mathrm{Map}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))_\bullet$  tels que  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$  et  $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ .

On notera  $\mathbf{Cat}^\Delta$  la catégorie des catégories enrichies simplicialement.

<sup>96</sup> on dit parfois catégorie simpliciale, mais cette dernière terminologie peut aussi désigner un objet simplicial dans  $\mathbf{cat}$  ou une catégorie simplicialement enrichie tensorisée et cotensorisée au dessus de  $\mathbf{sEns}$ , donc il vaut mieux l'éviter si possible

*Remarque 4.3.2.* Notons que les morphismes sous-jacents de la catégorie  $\mathbf{C}$  sont uniquement déterminés par la structure simpliciale, puisqu'il s'agit des 0-simplexes munis des compositions et unités restreintes au degré 0.

*Remarque 4.3.3.* On a une notion de catégorie enrichie dans les espaces topologiques similaire obtenue en remplaçant ensembles simpliciaux par espaces topologiques.

*Exemple 4.3.4.* La catégorie  $\mathbf{sEns}$  est enrichie simplicialement via  $\mathrm{Map}_\bullet(X_\bullet, Y_\bullet)$ .

*Exemple 4.3.5.* Si  $\mathbf{C}$  est une catégorie, on peut la voir comme une catégorie enrichie simplicialement en prenant comme espace des morphismes l'ensemble simplicial discret  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$ ; autrement dit, on pose  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(x, y)_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$  et on ne met que les dégénérescences des 0-simplexes en degré supérieur. Ceci nous fournit un foncteur

$$\iota : \mathbf{Cat} \hookrightarrow \mathbf{Cat}^\Delta.$$

*Lemme 4.3.6.* Le foncteur  $\iota : \mathbf{Cat} \hookrightarrow \mathbf{Cat}^\Delta$  est pleinement fidèle

*Exercice 4.3.7.* Démontrer le lemme.

Le foncteur  $\iota$  est un analogue du nerf  $N_\bullet : \mathbf{cat} \rightarrow \mathbf{Qcat}$  de la section 4.2.2.

*Exemple 4.3.8.* La catégorie  $\mathbf{Cat}^\Delta$  est une catégorie (large) enrichie simplicialement. En effet, si  $\mathbf{C}, \mathbf{D}$  sont deux telles catégories, et  $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  deux foncteurs, les transformations naturelles entre ces foncteurs ont une structure simpliciale donnée comme collection de sous-ensembles simpliciaux des  $\mathrm{Map}_{\mathbf{D}}(F(x), G(x))_\bullet$ .

Rappelons que nous avons un foncteur  $\pi_0 : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{Ens}$  qui associe à un ensemble simplicial  $X_\bullet$ , l'ensemble  $\pi_0(|X_\bullet|) \cong \pi_0(R(X_\bullet))$  où  $R(X_\bullet)$  est un remplacement fibrant 3.3. Ceci nous permet de passer aux classes d'homotopies dans les espaces de morphismes pour définir la catégorie homotopique associée.

**Définition 4.3.9** (Catégorie homotopique d'une catégorie simplicialement enrichie). Si  $\mathbf{C}$  est une catégorie enrichie simplicialement, on note  $\pi_0(\mathbf{C})$  la catégorie dont les objets sont les objets de  $\mathbf{C}$  et qui à un morphisme  $f : x \rightarrow y$  associe sa classe dans  $\pi_0(\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(x, y)_\bullet)$ .

Un morphisme  $\gamma : x \rightarrow y$  dans  $\mathbf{C}$  est appelé une *équivalence dans  $\mathbf{C}$* <sup>97</sup> si  $[\gamma]$  est un isomorphisme dans  $\pi_0(\mathbf{C})$ .

Notons que par définition,  $\pi_0(\mathbf{C})$  a les mêmes objets que  $\mathbf{C}$  et que ces morphismes sont des quotients des  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$ . En particulier, à tout morphisme  $f \in \mathbf{C}$  entre  $x$  et  $y$ , on peut associer sa classe d'équivalence  $[f] \in \mathrm{Hom}_{\pi_0(\mathbf{C})}(x, y)$ .

**Lemme 4.3.10.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie enrichie simplicialement. Alors  $\pi_0(\mathbf{C})$  est bien une catégorie et  $f \mapsto [f]$  est un foncteur  $\pi : \mathbf{Cat}^\Delta \rightarrow \mathbf{Cat}$ .

*Exercice 4.3.11.* Démontrer le lemme.

Nous définissons maintenant une structure de modèle combinant la structure de Quillen des ensembles simpliciaux sur les morphismes et la notion d'équivalence de catégorie.

**Définition 4.3.12.** (Structure de modèle de Dwyer-Kan, Bergner)

<sup>97</sup>. il est bn de se convaincre que cette notion est analogue à celle d'isomorphisme dans une quasicatégorie

**Une équivalence de Dwyer-Kan:** est un foncteur  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  de catégories enrichies simplicialement tel que

- (1) pour toutes paires d'objets  $x, y \in \mathbf{C}$ ,  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(x, y)_{\bullet} \xrightarrow{f} \mathrm{Map}_{\mathbf{D}}(f(x), f(y))_{\bullet}$  est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux ;
- (2)  $\pi_0(f) : \pi_0(\mathbf{C}) \rightarrow \pi_0(\mathbf{D})$  est une équivalence de catégorie.

On note  $\mathcal{W}^{DK}$  la classe des équivalences de Dwyer-Kan.

**Une fibration de Dwyer-Kan:** est un foncteur  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  de catégories tel que

- (1) pour toutes paires d'objets  $x, y \in \mathbf{C}$ ,  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(x, y)_{\bullet} \xrightarrow{f} \mathrm{Map}_{\mathbf{D}}(f(x), f(y))_{\bullet}$  est une fibration d'ensembles simpliciaux ;
- (2) pour tout  $x \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ ,  $y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$  et toute équivalence  $\gamma : f(x) \rightarrow y$  dans  $\mathbf{D}$ , il existe une équivalence  $\gamma' : x \rightarrow x'$  dans  $\mathbf{C}$  telle que  $f(\gamma') = \gamma$ .

On notera  $\mathcal{F}^{DK}$  la classe des fibrations de Dwyer-Kan.

**Une cofibration de Dwyer-Kan:** est un foncteur qui a la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations de Dwyer-Kan qui sont des équivalences de Dwyer-Kan. On notera  $\mathcal{E}^{DK}$  cette classe.

*Remarque 4.3.13.* On peut remarquer que les fibrations de Dwyer-Kan sont exactement les foncteurs qui sont des fibrations de Kan au niveau des ensembles simpliciaux de morphismes et dont la classe dans les catégories homotopiques est une *isofibration*<sup>98</sup>.

**Théorème 4.3.14** (Bergner). La structure  $(\mathbf{Cat}^{\Delta}, \mathcal{W}^{DK}, \mathcal{F}^{DK}, \mathcal{E}^{DK})$  est une structure de modèle cofibrement engendrée.

*Remarque 4.3.15.* Les objets fibrants sont les catégories dont les ensembles de morphismes sont des complexes de Kan.

Contrairement aux quasicatégories, toutes les catégories simplicialement enrichies ne sont pas cofibrantes.

Par ailleurs, la catégorie simplicialement enrichie des foncteurs entre deux catégories enrichies simplicialement fibrantes n'est pas nécessairement fibrante (contrairement au cas des quasicatégories 4.2.22).

Notons que nous avons le résultat suivant.

**Lemme 4.3.16.** On a une adjonction de Quillen  $\mathbf{Cat}^{\Delta} \begin{matrix} \xrightarrow{\pi_0} \\ \xleftarrow{\iota} \end{matrix} \mathbf{Cat}$  où  $\mathbf{Cat}$  est munie de sa structure de modèle canonique<sup>99</sup>.

*Exercice 4.3.17.* Démontrer le lemme.

En particulier, la counité de l'adjonction nous donne le morphisme canonique

$$(18) \quad \ell : \mathbf{C} \longrightarrow \iota(\pi_0(\mathbf{C}))$$

de catégorie enrichie simplicialement.

Nous allons maintenant définir un foncteur reliant les catégories enrichies simplicialement et les quasicatégories ; foncteur qui généralise le nerf d'une catégorie ordinaire :  $\mathbf{C} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}}([\bullet], \mathbf{C})$ . L'idée est de définir un objet similaire en remplaçant les catégories par les catégories simpliciales. Comme la catégorie  $[n]$  n'est pas

98. C'est à dire une fibration de catégorie, voir le devoir maison.

99. dont les équivalences faibles sont les équivalences de catégorie et les fibrations les isofibrations

cofibrante en tant que catégorie simpliciale, afin d'obtenir un foncteur raisonnable du point de vue homotopique il nous faut le remplacer par une catégorie plus adaptée.

**Définition 4.3.18.** Soit  $[\tilde{n}]$  la catégorie enrichie simplicialement dont les objets sont les éléments de l'ensemble  $\{0, \dots, n\}$  et les ensembles simpliciaux de morphismes sont

$$\mathrm{Map}_{[\tilde{n}]}(i, j) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i > j \\ N_{\bullet}(P_{i,j}) & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

où  $P_{ij}$  est la catégorie associée à l'ensemble partiellement ordonné (par l'inclusion) des sous-ensembles  $J$  de  $\{k \in [n], i \leq k \leq j\}$  qui contiennent  $i$  et  $j$ .

La composition  $\mathrm{Map}_{[\tilde{n}]}(j, k) \times \mathrm{Map}_{[\tilde{n}]}(i, j) \rightarrow \mathrm{Map}_{[\tilde{n}]}(i, k)$  est induite par l'application du foncteur nerf à la réunion de sous ensembles partiellement ordonnés (disjoints en dehors de  $j$ ) :  $P_{jk} \times P_{ij} \rightarrow P_{ik} : (K, J) \mapsto J \cup K$ .

En particulier  $P_{ii}$  a un seul élément et son nerf est donc équivalent à  $\{*\} = \Delta_{\bullet}^0$ .

*Remarque 4.3.19.* On a un isomorphisme d'ensembles simpliciaux  $\mathrm{Map}_{[\tilde{n}]}(i, j) \cong (\Delta_{\bullet}^1)^{j-i-1}$  pour  $i < j$ . En particulier, ces ensembles simpliciaux sont contractiles<sup>100</sup> ce qui correspond au fait qu'il y a un unique morphisme de  $i$  vers  $j$  dans la catégorie  $[\tilde{n}]$ . Ainsi, le foncteur  $[\tilde{n}] \rightarrow [n]$  qui envoie  $N_{\bullet}(P_{ij})$  sur un point est une fibration de Dwyer-Kan qui est également une équivalence de Dwyer-Kan.

**Proposition 4.3.20.** La donnée de la définition 4.3.18 est une catégorie enrichie simplicialement dont les unités sont les uniques éléments des  $N_0(P_{ii})$ .

De plus tout morphisme croissant  $f : [n] \rightarrow [m]$  induit par postcomposition un foncteur  $[\tilde{n}] \rightarrow [\tilde{m}]$  qui fait de  $[\tilde{\bullet}]$  un objet cosimplicial dans les catégories enrichies simplicialement.

**Définition 4.3.21** (Nerf cohérent). On appelle nerf cohérent<sup>101</sup> le foncteur  $\tilde{N}_{\bullet} : \mathbf{cat}^{\Delta} \rightarrow \mathbf{sEns}$  donné par  $\mathbf{C} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{cat}^{\Delta}}([\tilde{\bullet}], \mathbf{C})$  munie de la structure simpliciale induite par la structure cosimpliciale de  $[\tilde{\bullet}]$ .

On notera de même  $\tilde{N}_{\bullet} : \mathbf{Cat}^{\Delta} \rightarrow \mathbf{sEns}^{\mathcal{U}}$  son extension à des catégories non-nécessairement petites (associées à un univers  $\mathcal{U}$ ), donné par  $\mathbf{C} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}^{\Delta}}([\tilde{\bullet}], \mathbf{C})$ .

*Remarque 4.3.22.* Si  $\mathbf{C}$  est une catégorie ordinaire, le lemme 4.3.16 implique que le nerf cohérent coïncide avec le nerf  $N_{\bullet}(\mathbf{C})$ .

**Théorème 4.3.23.** Le nerf cohérent est un adjoint de Quillen à droite  $\mathbf{QCat} \begin{matrix} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \\ \xleftarrow{\tilde{N}_{\bullet}} \end{matrix} \mathbf{Cat}^{\Delta}$ .

Cette adjonction est de plus une équivalence de Quillen et se restreint en une équivalence de Quillen  $\mathbf{Qcat} \begin{matrix} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \\ \xleftarrow{\tilde{N}_{\bullet}} \end{matrix} \mathbf{cat}^{\Delta}$ .

Le théorème permet donc d'identifier la structure de modèle des quasicatégories et celle des catégories enrichies simplicialement. C'est en ce sens que ces deux théories donnent donc la même notion d'infinie catégorie; sens que nous allons d'ailleurs préciser dans la partie 4.4. Étant donné que les objets fibrants sont préservés par un foncteur de Quillen à droite, on peut donc utiliser la terminologie suivante :

100. ce qui découle aussi plus simplement du fait que les posets  $P_{i,j}$  ont des éléments minimaux

101. ou parfois nerf simplicial dans la littérature

*Terminologie 4.3.24.* Une catégorie enrichie simplicialement fibrante est aussi simplement appelée une  $\infty$ -catégorie<sup>102</sup>

*Remarque 4.3.25.* Le foncteur dérivé à droite  $\mathbb{R}\tilde{N}_\bullet = \tilde{N}_\bullet \circ R^{DK} : \mathbf{Cat}^\Delta \rightarrow \mathbf{QCat}$  envoie donc toute catégorie simpliciale sur une quasicatégorie.

*Remarque 4.3.26.* A contrario des quasicatégories, on peut composer strictement les ensembles simpliciaux de morphismes ou les catégories de foncteurs entre catégories enrichies simplicialement. En revanche, ces ensembles de morphismes entre objets fibrants (c'est à dire  $\infty$ -catégorie) ne sont pas nécessairement fibrants, c'est à dire doivent être remplacés pour obtenir la bonne structure.

*Remarque 4.3.27.* On a une équivalence naturelle canonique  $\pi(\tilde{N}_\bullet(\mathbf{C})) \cong \pi_0(\mathbf{C})$  entre les catégories homotopiques d'une catégorie enrichie simplicialement et celle de sa quasicatégorie associée. Ceci justifie la notation  $\pi$  que nous avons utiliser dans le lemme 4.3.10.

De plus cette identification envoie le morphisme canonique  $\ell : \mathbf{C} \rightarrow \iota(\pi_0(\mathbf{C}))$  sur  $\pi_{\tilde{N}_\bullet(\mathbf{C})}$  du corollaire 4.2.34.

#### 4.4. L' $\infty$ -CATÉGORIE ASSOCIÉE À UNE CATÉGORIE DE MODÈLE

Nous allons maintenant expliquer comment associer une  $\infty$ -catégorie à une catégorie de modèle, et plus généralement une catégorie munie d'une notion d'équivalences faibles, qui sera un enrichissement de la catégorie homotopique sous-jacente. Précisément :

*Philosophie 4.4.1.* À toute catégorie  $\mathbf{C}$  munie d'une classe  $\mathcal{W}$  stable par composition de morphismes, on souhaite associer une  $\infty$ -catégorie  $\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C})$  et un  $\infty$ -foncteur  $\ell_\infty : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C})$  tels que

- $\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C})$  relève  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ , c'est à dire  $\pi(\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C})) \cong \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  et il existe une factorisation  $\mathbf{C} \xrightarrow{\ell_\infty} \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C}) \xrightarrow{\ell} \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  (où la flèche de droite est induit

par le morphisme canonique qui envoie une  $\infty$ -catégorie sur sa catégorie homotopique 4.3.10 ou 4.2.34 et  $\ell : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  est la localisation).

- Ce relèvement est universel parmi les  $\infty$ -catégories vérifiant le point précédent : précisément pour toute ( $\infty$ -)catégorie  $\mathbf{D}$  et ( $\infty$ -)foncteur  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  tel que  $\pi \circ F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{D})$  envoie  $\mathcal{W}$  dans des isomorphismes, il existe une factorisation (unique à équivalence près<sup>103</sup>)  $F_\infty : \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$  rendant le diagramme suivant<sup>104</sup>

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} & \xrightarrow{\ell} & \mathbf{Ho}(\mathbf{D}) \\
 & \searrow \ell_\infty & \nearrow F_\infty & \nearrow \tilde{F} & \\
 & & \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\ell} & \mathbf{Ho}(\mathbf{C})
 \end{array}$$

102. le Théorème 4.3.23 nous dit précisément qu'il n'y a pas d'ambiguïté réelle à utiliser cette terminologie pour les quasicatégories et les catégories enrichies simplicialement puisque le nerf d'une catégorie simpliciale fibrante est précisément une quasicatégorie.

103. l'équivalence étant unique à une 2-équivalence près et ainsi de suite

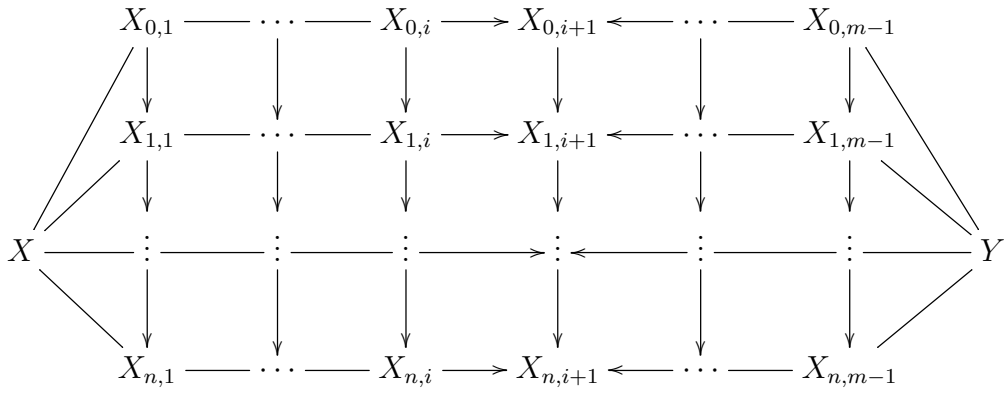
104. dans les  $\infty$ -catégories

commutatif (où  $\tilde{F} : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{D})$  est donné par la propriété universelle de la catégorie homotopique).

Lorsque  $\mathbf{C}$  est de modèle, il est légitime d'espérer calculer les morphismes de  $\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C})$  en fonctions de remplacements fibrants et cofibrants dans  $\mathbf{C}$ . Par ailleurs, l'existence d'une telle  $\infty$ -catégorie ne se fait en général pas sans s'autoriser à changer d'univers si l'on ne dispose pas d'une (bonne) structure de modèle.

L'existence d'un tel relevé homotopique remonte aux travaux de Dwyer-Kan construisant une catégorie simpliciale associée à  $(\mathbf{C}, \mathcal{W})$ .

*Notation 4.4.2.* Soit  $M$  une catégorie et  $\mathcal{W}$  une sous-classe de morphismes stable par composition. Pour tout entier  $n \geq 0$  et objets  $X, Y$  de  $M$ , on note  $\text{Map}_{\text{L}_{\mathcal{W}}^H M}(X, Y)_n$  la collection de tous les diagrammes commutatifs



(où  $m \geq 1$  est un entier non-fixé) vérifiant que

- toutes les flèches horizontales qui vont vers la gauche et toutes les verticales sont dans  $\mathcal{W}$  ;
- toutes les flèches horizontales d'une même colonne vont dans le même sens ;
- Les flèches d'une même colonne interne<sup>105</sup> ne sont pas toutes l'identité ;
- les flèches horizontales de deux colonnes consécutives vont dans des sens opposés.

Dans les conditions et notations précédentes, on identifie  $X$  avec une suite verticale en position 0 de flèches qui sont toutes l'identité entre les  $X_{i,0} = X$ , et de même  $Y$  avec une suite verticale en position  $m$  de flèches qui sont toutes l'identité entre les  $X_{j,m} = Y$ .

On note  $d_i : \text{Map}_{\text{L}_{\mathcal{W}}^H M}(X, Y)_n \rightarrow \text{Map}_{\text{L}_{\mathcal{W}}^H M}(X, Y)_{n-1}$  la règle envoyant un diagramme sur le diagramme où on a supprimé la  $i$ ème ligne (c'est à dire supprimé tous les  $X_{i,*}$  et flèches horizontales associées et composé les flèches verticales arrivant et repartant en les  $X_{i,*}$ ) et on note  $s_j : \text{Map}_{\text{L}_{\mathcal{W}}^H M}(X, Y)_n \rightarrow \text{Map}_{\text{L}_{\mathcal{W}}^H M}(X, Y)_{n+1}$  la règle envoyant un diagramme sur le diagramme où on a doublé la  $j$ ème ligne (c'est à dire rajouté une ligne composée des  $X_{j,*}$  et des flèches horizontales entre eux juste après la  $j$ ème ligne et mis l'identité comme flèche verticale entre les deux copies de  $X_{j,*}$ ).

*Terminologie 4.4.3.* Un élément de  $\text{Map}_{\text{L}_{\mathcal{W}}^H M}(X, Y)_n$  est appelé un  $n$ -“hamac”<sup>106</sup> entre  $X$  et  $Y$ .

105. c'est à dire une bande formé des flèches reliant des objets de la forme  $X_{*,i}$ ,  $X_{*,i+1}$  avec  $0 < i < m$

106. en raison de la forme suggestive de ce diagramme

On peut composer deux  $n$ -hamacs de  $X$  vers  $Y$  et de  $Y$  vers  $Z$  en les concaténant en  $Y$  et en composant toutes les flèches qui iraient éventuellement dans le même sens dans deux colonnes adjacentes ainsi obtenues (effaçant ainsi une ligne verticale) quitte à effacer une colonne interne qui n'aurait que des identités. On note  $\circ : \text{Map}_{L_{\mathcal{W}}^H M}(Y, Z)_n \times \text{Map}_{L_{\mathcal{W}}^H M}(X, Y)_n \rightarrow \text{Map}_{L_{\mathcal{W}}^H M}(X, Z)_n$  cette opération.

**Lemme 4.4.4.** La composition  $\circ : \text{Map}_{L_{\mathcal{W}}^H M}(Y, Z)_n \times \text{Map}_{L_{\mathcal{W}}^H M}(X, Y)_n \rightarrow \text{Map}_{L_{\mathcal{W}}^H M}(X, Z)_n$  est bien définie.

*Exercice 4.4.5.* Démontrer le lemme.

**Proposition 4.4.6.** La donnée des  $d_i, s_j$  (de la notation 4.4.2) et de la composition donnent une structure de catégorie enrichie simplicialement aux objets de  $M$  munis des  $\text{Map}_{L_{\mathcal{W}}^H M}(X, Y)_\bullet$  comme ensembles simpliciaux de morphismes.

*Exercice 4.4.7.* Démontrer la proposition.

**Définition 4.4.8** (Localisation hamac). On note  $L_{\mathcal{W}}^H M$  la catégorie enrichie simplicialement dont les objets sont les objets de  $M$  et les ensembles simpliciaux de morphismes les  $\text{Map}_{L_{\mathcal{W}}^H M}(X, Y)_\bullet$  munis de la structure de la proposition 4.4.6.

*Remarque 4.4.9.* Il existe d'autres catégories simpliciales fonctorielles qui sont Dwyer-Kan équivalentes à la localisation hamac.

On peut par exemple inclure tous les morphismes de  $M$  dans les morphismes verticaux d'un hamac. Le morphisme de catégorie simplicialement enrichie est une équivalence de Dwyer-Kan comme cela peut être démontré en utilisant une démonstration similaire à celle des descriptions de la catégorie homotopique dans le TD 2.

Un autre exemple standard est donné par la construction d'une résolution simpliciale basée sur la monade reliant les catégories aux graphes (c'est à dire oubliant la composition). Ceci produit un objet simplicial (très très gros) qui en degré simplicial  $n - 1$  est la localisation usuelle de  $F_n M[F_n \mathcal{W}^{-1}]$  où  $F_n = F \circ \dots \circ F$  où  $F$  est le foncteur catégorie libre sur le graphe sous-jacent à une catégorie donnée.

**Proposition 4.4.10.** La localisation hamac a les propriétés suivantes :

- on a une équivalence de catégorie canonique  $\pi_0(L_{\mathcal{W}}^H M) \cong \mathbf{Ho}(M)$ .
- Pour tout  $x, y \in \text{Obj}(M)$ , on a une équivalence faible naturelle d'ensembles simpliciaux

$$\text{Map}_{\tilde{N}_\bullet(L_{\mathcal{W}}^H M)}(x, y) \xleftarrow{\cong} \text{Map}_{L_{\mathcal{W}}^H M}(x, y).$$

De plus, le nerf cohérent  $\tilde{N}_\bullet(L_{\mathcal{W}}^H M)$  de la localisation hamac est une quasicatégorie et  $\pi(\tilde{N}_\bullet(L_{\mathcal{W}}^H M)) \cong \mathbf{Ho}(M)$ .

On en déduit la définition suivante de l'infinie catégorie associée à  $(M, \mathcal{W})$ .

**Définition 4.4.11.** Soit  $M$  une catégorie munie d'une sous-classe  $\mathcal{W}$  stable par composition. On appelle  $\mathbf{Ho}_\infty(M) := \tilde{N}_\bullet(L_{\mathcal{W}}^H M)$  la quasicatégorie associée à  $(M, \mathcal{W})$ . Si  $\mathbf{C}$  est munie d'une structure de modèle, on notera  $\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C})$  la catégorie associée à la paire  $(\mathbf{C}, \mathcal{W})$  où  $\mathcal{W}$  sont les équivalences faibles de  $\mathbf{C}$ .

*Remarque 4.4.12.* On peut bien entendu, si on travaille dans le modèle  $\mathbf{Cat}^\Delta$  des infinies catégories, utiliser directement la localisation hamac  $L_{\mathcal{W}}^H M$  comme  $\infty$ -catégorie associée au vu de la proposition 4.4.10 (et de la terminologie 4.3.24).

Construisons le “relèvement” du foncteur quotient. Rappelons que  $\iota : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}^\Delta$  est le plongement canonique qui identifie les catégories avec les catégories enrichies simplicialement dont les espaces de morphismes sont discrets. On a un foncteur canonique  $\iota(M) \hookrightarrow L_W^H M$  qui envoie tout morphisme  $X \xrightarrow{f} Y$  de  $\mathrm{Hom}_M(X, Y)$  dans le morphisme 0-hamac trivial  $X \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{Map}_{L_{\mathcal{W}}^H M}(X, Y)_0$  (et l’étend en degré supérieur par dégénérescence). En composant ce foncteur avec le nerf cohérent on obtient un morphisme de quasicatégories<sup>107</sup>

$$(19) \quad \ell_\infty : N_\bullet(M) = \tilde{N}_\bullet(\iota(M)) \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(M).$$

**Lemme 4.4.13.** On a un diagramme commutatif de morphismes de quasicatégories

$$\begin{array}{ccc} N_\bullet(M) & \xrightarrow{\ell_\infty} & \mathbf{Ho}_\infty(M) \\ & \searrow \ell & \downarrow \pi \\ & & \mathbf{Ho}(M) \end{array}$$

verticale le morphisme construit dans le corollaire 4.2.34.

*Exercice 4.4.14.* Démontrer le lemme.

Le corollaire 4.4.10 (ou la proposition 4.4.10) et le lemme 4.4.13 garantissent que le premier point de la philosophie 4.4.1 est satisfait par  $\mathbf{Ho}_\infty(M)$  tel que défini par 4.4.11.

Notons que par définition, l’infinie catégorie associée à une catégorie de modèle ne dépend que de la classe des équivalences faibles. La donnée des structures de modèle permet de construire des foncteurs entre  $\infty$ -catégories associées et de simplifier la structure construite : un premier exemple est le lemme 4.4.15 ci-dessous qui est un relevé du lemme 2.2.14.

Notons tout d’abord que si  $M' \subset M$  est une sous-catégorie de  $M$ , alors tout  $n$ -hamac de  $M'$  est un  $n$ -hamac de  $M$  et on en déduit que  $L_{\mathcal{W} \cap M'}^H M'$  est une sous-catégorie enrichie simplicialement de  $L_{\mathcal{W}}^H M$  et par suite on a un  $(\infty)$ -foncteur  $\mathbf{Ho}_\infty(M') \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(M)$ .

**Lemme 4.4.15.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle. Les inclusions

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{C}_c & \\ \nearrow & & \searrow \\ \mathbf{C}_{cf} & & \mathbf{C} \\ \searrow & & \nearrow \\ & \mathbf{C}_f & \end{array}$$

induisent des équivalences<sup>108</sup>  $\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C}_{cf}) \cong \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C}_c) \cong \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C}_f) \cong \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C})$ .

Une question naturelle qui se pose est la fonctorialité de la construction de  $\mathbf{Ho}_\infty(M)$ . Soient  $(M, \mathcal{W})$ ,  $(M', \mathcal{W}')$  deux catégories munies de classes d’équivalences faibles. Pour qu’un foncteur  $F : M \rightarrow M'$  induise un foncteur  $L_{\mathcal{W}}^H M \rightarrow L_{\mathcal{W}'}^H M'$  il suffit qu’il envoie un  $n$ -hamac sur un  $n$ -hamac c’est à dire qu’il envoie les équivalences faibles de  $M$  sur des équivalences faibles dans  $M'$ . En général c’est évidemment une propriété

107. on a bien que la source et le but sont des quasicatégories par les propositions 4.4.10 et 4.2.11

108. c’est à dire des équivalences catégorielles des quasicatégories ou de manière équivalentes des équivalences de Dwyer-Kan des localisations hamacs



très forte (nous avons vu de nombreux exemples de foncteurs ne le vérifiant pas) mais en revanche on peut dans de nombreux cas *dériver* un foncteur pour obtenir cette propriété. C'est en particulier le cas des foncteurs dérivés de la section 2.5 qui ont une extension naturelle aux  $\infty$ -catégories associées comme nous allons le montrer.

Soit  $F \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\mathbf{C}} \\ \xleftarrow{\mathbf{D}} \end{smallmatrix} G$  une adjonction de Quillen entre deux catégories de modèles ; on

note  $\mathcal{W}_{\mathbf{C}}$  et  $\mathcal{W}_{\mathbf{D}}$  leurs classes d'équivalences faibles respectives. On note comme d'habitude  $L : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  et  $R : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$  les remplacements cofibrants et fibrants.

**Lemme 4.4.16.** Le foncteur  $\mathbb{L}F = F \circ L : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  et  $\mathbb{R}G = G \circ R : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  envoie un  $n$ -hamac sur un  $n$ -hamac.

*Démonstration.* Par la propriété (MC2),  $L$  envoie des équivalences faibles sur des équivalences faibles entre objets cofibrants et de plus, par définition 2.5.4 et lemme 2.5.8,  $F$  envoie des équivalences faibles entre objets cofibrants sur des équivalences faibles. Il suit que la composée  $F \circ L$  envoie bien un hamac sur un hamac puisque elle envoie  $\mathcal{W}_{\mathbf{C}}$  dans  $\mathcal{W}_{\mathbf{D}}$ . La même preuve s'applique pour  $G \circ R$ .  $\square$

Puisque  $\mathbb{L}F$  préserve les  $n$ -hamacs, il envoie l'espace  $\mathrm{Map}_{\mathbb{L}\mathcal{W}_{\mathbf{C}}}(x, y)_n$  dans l'espace  $\mathrm{Map}_{\mathbb{L}\mathcal{W}_{\mathbf{D}}}(\mathbb{L}F(x), \mathbb{L}F(y))_n$  pour tout entier. Le même résultat a lieu pour  $\mathbb{R}G$ . On note  $L^H(F)$  et  $L^H(G)$  les transformations ainsi induites sur les localisations hamacs.

**Lemme 4.4.17.**  $L^H(F) : L^H_{\mathcal{W}_{\mathbf{C}}} \mathbf{C} \rightarrow L^H_{\mathcal{W}_{\mathbf{D}}} \mathbf{D}$  et  $L^H(G) : L^H_{\mathcal{W}_{\mathbf{D}}} \mathbf{D} \rightarrow L^H_{\mathcal{W}_{\mathbf{C}}} \mathbf{C}$  sont des foncteurs de catégories simplicialement enrichies.

*Exercice 4.4.18.* Démontrer le lemme.

En les composant avec le nerf cohérent on obtient donc des foncteurs entre quasi-catégories.

*Notation 4.4.19.* On note  $F_{\infty} := \tilde{N}_{\bullet} \circ L^H(F) : \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{D})$  et  $G_{\infty} := \tilde{N}_{\bullet} \circ L^H(G) : \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{C})$  les  $(\infty)$ -foncteurs ainsi obtenus.

Nous pouvons résumer ce que nous avons construit dans la proposition suivante :

**Proposition 4.4.20.** Tout foncteur de Quillen  $\varphi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  (à droite ou à gauche) entre deux catégories de modèle induit un  $\infty$ -foncteur  $\varphi_{\infty} : \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{D})$  tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\varphi_{\infty}} & \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{D}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{N}_{\bullet}(\mathbf{Ho}(\mathbf{C})) & \longrightarrow & \mathbf{N}_{\bullet}(\mathbf{Ho}(\mathbf{D})) \end{array}$$

(où les flèches verticales sont les morphismes canoniques et la flèche horizontale du bas est le foncteur dérivé 2.5.15 de  $\varphi$ ) soit commutatif dans  $\mathbf{QC}at$ .

Le même résultat a lieu dans  $\mathbf{Cat}^{\Delta}$ .

Ainsi on vient de montrer que les foncteurs dérivés entre catégories de modèles de la partie 2.5 se relèvent en des  $\infty$ -foncteurs entre leurs  $\infty$ -catégories associées<sup>109</sup>. Comme on peut s'y attendre, ces derniers sont des équivalences lorsque l'adjonction est une équivalence de Quillen :

<sup>109.</sup> prouvant au passage la moitié du deuxième point de 4.4.1

**Théorème 4.4.21.** Soit  $F \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\mathbf{C}} \\ \xleftarrow{\mathbf{D}} \end{smallmatrix} G$  une équivalence de Quillen. Alors les foncteurs induits  $F_\infty : \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{D})$  et  $G_\infty : \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C})$  sont des équivalences inverses l'une de l'autre d' $\infty$ -catégories.

*Remarque 4.4.22.* Par équivalence on sous-entend bien-sûr ici équivalences catégorielles. Qu'elles soient inverses l'une de l'autre signifie que leurs composées sont homotopes dans la structure de modèle de Joyal à l'identité.

On dispose maintenant d'une notion d'infinie catégorie associée à une catégorie de modèle, qui est invariante par équivalence de Quillen. Ceci nous permet de définir l'infinie catégorie des infinie catégories.

**Définition 4.4.23** (L'infinie catégorie des quasi-catégories). On appelle  $\infty$ -catégorie des  $\infty$ -catégorie la localisation  $\infty\text{-}\mathbf{Cat} := \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{QCat})$  de la catégorie de modèle de Joyal des quasicatégories.

On note de même  $\infty\text{-}\mathbf{cat} = \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{Qcat})$  l'infinie catégorie des petites  $\infty$ -catégories.

*Remarque 4.4.24.* Le théorème 4.4.21 nous dit que  $\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{QCat}) \cong \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{Cat}^\Delta)$  et plus généralement que toute catégorie de modèle Quillen équivalente à  $\mathbf{Cat}^\Delta$  est un modèle pour les  $\infty$ -catégories au sens où son  $\infty$ -catégorie associée est (équivalente à)  $\infty\text{-}\mathbf{Cat}$ . Il existe de fait de nombreux autres modèles équivalents : catégories de Segal, espaces de Segal, ensembles dendriformes, etc.

*Exercice 4.4.25.* Soient  $R, S$  des algèbres commutatives différentielles graduées au sens du chapitre 5.1.

- (1) Soit  $M$  un complexe de chaînes de  $(R, S)$ -bimodules. Démontrer que le produit tensoriel  $M \otimes_S -$  induit un  $\infty$ -foncteur  $\mathbf{Ho}_\infty(Ch(S)) \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(Ch(R))$ .
- (2) Soit  $f : R \rightarrow S$  un morphisme de cdgas. On note  $f_* : Ch(S) \rightarrow Ch(R)$  le foncteur qui à un  $S$ -module associe le même complexe de chaînes muni de l'action de  $R$  donnée par  $r \cdot M = f(r) \cdot M$ .
  - (a) Démontrer que  $f_*$  induit un  $\infty$ -foncteur  $\mathbf{Ho}_\infty(Ch(S)) \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(Ch(R))$ .
  - (b) Démontrer que le foncteur induit par  $f_*$  est une équivalence si  $f$  est un quasi-isomorphisme.

Nous avons vu que l'un des intérêts d'une structure de modèle était de démontrer facilement que la catégorie homotopique était une vraie catégorie (et non pas une catégorie dans un univers plus large) et de donner un moyen de comprendre les morphismes de la catégorie homotopique en termes de morphismes de la catégorie de modèle de départ.

On a un résultat analogue pour les  $\infty$ -catégories associées à une catégorie de modèle, tout du moins à condition de pouvoir les munir d'un enrichissement simplicial compatible avec la structure de modèle au sens de la définition suivante.

**Définition 4.4.26** (Catégorie de modèle simpliciale). Une catégorie de modèle simpliciale est la donnée d'une catégorie enrichie simplicialement  $\mathbf{C}$ , munie d'une structure de modèle  $(\mathcal{W}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$  et de foncteurs

$$\mathbf{C} \times \mathbf{sEns} \xrightarrow{\boxtimes} \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \times \mathbf{sEns}^{op} \xrightarrow{(Y, S, \bullet) \mapsto Y^{S\bullet}} \mathbf{C}$$

satisfaisant les conditions supplémentaires suivantes

- (1) pour tout objet  $X \in \mathbf{C}$ , le foncteur  $X \boxtimes - : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{C}$  est adjoint à gauche de  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(X, -)_{\bullet}$  ;
- (2) pour tout objet  $Y \in \mathbf{C}$ , le foncteur  $Y^{(-)} : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{C}^{op}$  est adjoint à gauche de  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(-, Y)_{\bullet}$  ;
- (3) on a un isomomorphisme naturel  $X \boxtimes (K \times L) \cong (X \boxtimes K) \boxtimes L$  ;
- (4) pour toute cofibration  $i : K \rightarrowtail L$  et fibration  $q : X \twoheadrightarrow Y$ , le morphisme canonique

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(L, X) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(K, X) \times_{\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(K, Y)} \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(L, Y)$$

est une fibration d'ensembles simpliciaux qui est acyclique si  $i$  ou  $q$  l'est.

La propriété (1) et (3) est, par définition, la propriété que  $\mathbf{C}$  est tensorisée par  $\mathbf{sEns}$  ; la propriété (2) étant celle que  $\mathbf{C}$  est cotensorisée par  $\mathbf{sEns}$ . Ils nous donnent des isomorphismes naturels

$$(20) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X \boxtimes S_{\bullet}, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(S_{\bullet}, \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y)_{\bullet})$$

$$(21) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(S_{\bullet}, \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y)_{\bullet}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y^{S_{\bullet}}).$$

*Remarque 4.4.27.* La donnée des foncteurs  $\boxtimes$  et  $(Y, S_{\bullet}) \mapsto Y^{S_{\bullet}}$  et de leurs propriétés est en fait équivalente à dire qu'on a les propriétés (1) et (2) et que  $\mathbf{C} \times \mathbf{sEns} \xrightarrow{\boxtimes} \mathbf{C}$  est un bifoncteur de Quillen à gauche, c'est à dire un foncteur de Quillen qui vérifie en plus que l'image d'une paire de cofibrations est une cofibration acyclique dès que l'une d'entre elle est acyclique.

En particulier, les propriétés d'adjonction font que  $\boxtimes$  détermine  $(Y, S_{\bullet}) \mapsto Y^{S_{\bullet}}$  (lorsqu'il existe bien sûr).

*Remarque 4.4.28.* La propriété (4) de la définition 4.4.26 généralise l'axiome (MC4) des catégories de modèle. En effet, un carré commutatif correspondant à (MC4) est exactement un 0-simplexe de  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(A, X) \times_{\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(A, Y)} \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(B, Y)$  et le relèvement est un 0-simplexe de  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(B, X)$ . Or une fibration acyclique d'ensembles simpliciaux est surjective, cf 3.2.10. Il suit donc que le relèvement existe. La propriété (4) est donc un axiome bien plus fort qui établit que l'espace des relèvements est équivalent à celui des carrés commutatifs du type (MC4).

*Exemple 4.4.29.* L'exemple prototype d'une catégorie de modèle simpliciale est la catégorie des ensembles simpliciaux  $\mathbf{sEns}$  où  $\boxtimes = \times$ . Le lemme 3.2.17 nous donne le dernier axiome.

Les catégories de modèle des groupes abéliens simpliciaux, groupes simpliciaux sont d'autres exemples standards. Plus généralement le corollaire 3.4.2 et la proposition 3.4.6 fournissent de nombreux exemples.

La catégorie de modèle de Quillen **Top** des espaces topologiques n'est pas simpliciale, mais est Quillen équivalente à  $\mathbf{sEns}$  qui l'est. Par ailleurs, sa sous-catégorie (Quillen équivalente) des espaces Hausdorff compactement engendrés l'est.

La structure projective sur les complexes de chaînes n'est pas une catégorie de modèle simpliciale, mais elle est naturellement équivalente à une en vertu du théorème 4.4.30 ci-dessous. En fait de nombreuses structures de modèle que nous avons vu le sont en vertu des résultats suivants remarquables de Dugger.

**Théorème 4.4.30** (Dugger [4]). Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle combinatoire. Alors  $\mathbf{C}$  est Quillen équivalente à une catégorie de modèle simpliciale, combinatoire et propre à gauche.

*Remarque 4.4.31.* Dugger [5] a également démontré que si  $\mathbf{C}$  est une catégorie de modèle combinatoire et propre à gauche, alors on peut modifier cette structure (par une localisation de Bousfield) de manière à la rendre simpliciale (et toujours combinatoire et propre à gauche) de sorte que l'identité soit une équivalence de Quillen.

Avoir une structure de modèle simpliciale a les conséquences suivantes.

**Proposition 4.4.32.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle simpliciale. Soit  $A$  cofibrant et  $X$  fibrant. Alors

- (1)  $\text{Map}_{\mathbf{C}}(A, X)$  est de Kan, c'est à dire un ensemble simplicial fibrant ;
- (2) On a une bijection naturelle <sup>110</sup>  $\pi_0(\text{Map}_{\mathbf{C}}(A, X)) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(A, X)$ .
- (3) Pour tout  $S_{\bullet} \in \mathbf{sEns}$  et objets  $Y, Z \in \mathbf{C}$ , on a des équivalences faibles naturelles d'ensembles simpliciaux :

$$\begin{aligned} \text{Map}_{\mathbf{C}}(Z \boxtimes S_{\bullet}, Y)_{\bullet} &\cong \text{Map}_{\mathbf{sEns}}(S_{\bullet}, \text{Map}_{\mathbf{C}}(Z, Y)_{\bullet})_{\bullet} \\ \text{Map}_{\mathbf{sEns}}(S_{\bullet}, \text{Map}_{\mathbf{C}}(Z, Y)_{\bullet})_{\bullet} &\cong \text{Map}_{\mathbf{C}}(Z, Y^{S_{\bullet}})_{\bullet}. \end{aligned}$$

Le point (3) généralise les équivalences (20) et (21) données par les adjonctions de la définition d'une catégorie de modèle simpliciale.

*Démonstration.* Le premier point est une conséquence de la propriété (4) de la définition 4.4.26 appliqué à  $K = \emptyset$  et  $Y = \{*\}$ .

Pour le deuxième, sachant que on utilise d'une part que (1) et le fait que tout ensemble simplicial soit cofibrant (et en particulier  $A \boxtimes S_{\bullet}$  est donc cofibrant par la remarque 4.4.27) nous donne pour tout  $S_{\bullet} \in \mathbf{sEns}$  une bijection naturelle

$$\begin{aligned} (22) \quad \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{sEns})}(S_{\bullet}, \text{Map}_{\mathbf{C}}(A, X)_{\bullet}) &\cong \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(S_{\bullet}, \text{Map}_{\mathbf{C}}(A, X)_{\bullet}) / \simeq \cong \\ &\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A \boxtimes S_{\bullet}, X) / \simeq \cong \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(A \boxtimes S_{\bullet}, X) \end{aligned}$$

d'après le corollaire 2.2.22. D'autre part, pour  $S_{\bullet} = \{*\} = \Delta_{\bullet}^0$ , on a par le théorème 3.2.18 que

$$\begin{aligned} (23) \quad \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{sEns})}(\Delta_{\bullet}^0, \text{Map}_{\mathbf{C}}(A, X)) &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})}(\{*\}, |\text{Map}_{\mathbf{C}}(A, X)_{\bullet}|) \\ &\cong \pi_0(|\text{Map}_{\mathbf{C}}(A, X)_{\bullet}|) \cong \pi_0(\text{Map}_{\mathbf{C}}(A, X)_{\bullet}) \end{aligned}$$

par le lemme 3.3.2. D'où le résultat en prenant  $S_{\bullet} = \Delta_{\bullet}^0$  dans (22).

Pour le troisième point, on utilise que

$$\text{hom}_{\mathbf{C}}(Z \boxtimes (S_{\bullet} \times T_{\bullet}), Y) \cong \text{hom}_{\mathbf{C}}((Z \boxtimes S_{\bullet}) \boxtimes T_{\bullet}, Y)$$

d'après la propriété (3) de 4.4.26 et on note que l'on a des bijections naturelles

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathbf{C}}((Z \boxtimes S_{\bullet}) \boxtimes T_{\bullet}, Y) &\cong \text{hom}_{\mathbf{sEns}}(T_{\bullet}, \text{Map}_{\mathbf{C}}(Z \boxtimes S_{\bullet}, Y)_{\bullet}) \quad \text{et} \\ \text{hom}_{\mathbf{C}}(Z \boxtimes (S_{\bullet} \times T_{\bullet}), Y) &\cong \text{hom}_{\mathbf{sEns}}(S_{\bullet} \times T_{\bullet}, \text{Map}_{\mathbf{C}}(Z, Y)_{\bullet}) \\ &\cong \text{hom}_{\mathbf{sEns}}(T_{\bullet}, \text{Map}_{\mathbf{sEns}}(S_{\bullet}, \text{Map}_{\mathbf{C}}(Z, Y)_{\bullet})_{\bullet}) \end{aligned}$$

d'après la formule exponentielle 3.2.16. En appliquant Yoneda 3.1.13 (c'est à dire en prenant les simplexes standards pour  $T_{\bullet}$ ) on obtient la première formule. La deuxième se démontre de manière analogue.  $\square$

<sup>110</sup>. en les variables  $A$  et  $X$

*Remarque 4.4.33.* la preuve démontre plus généralement que l'on a des bijections naturelles

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{sEns})}(S_\bullet, \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(A, X))_\bullet &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(A \boxtimes S_\bullet, X), \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{sEns})}(S_\bullet, \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(A, X)_\bullet) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(A, X^{S_\bullet}).\end{aligned}$$

Une catégorie de modèle simpliciale est par définition enrichie simplicialement et donc un objet de  $\mathbf{QCat}$ . La proposition 4.4.32 nous donne un lien fort entre les espaces simpliciaux de morphismes dans  $\mathbf{C}$  et les morphismes dans la catégorie homotopique lorsque la source est cofibrante et la cible fibrante (comme d'habitude dans les catégories de modèle). De plus nous avons que les ensembles simpliciaux de morphismes sont des foncteurs de Quillen à droite en chaque variable, on peut donc les dériver ce qui conduit à la définition suivante.

**Définition 4.4.34.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle simpliciale et  $X, Y$  deux objets. L'espace dérivés des morphismes de  $X$  vers  $Y$  est par définition l'ensemble simplicial

$$\mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y)_\bullet := \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(L(X), R(Y))_\bullet$$

où  $L$  et  $R$  sont les remplacements (co)fibrants dans  $\mathbf{C}$ .

Comme  $Y \xrightarrow{\sim} R(Y)$  et  $L(X) \xrightarrow{\sim} X$  sont des (co)fibrations acycliques, il suit de la propriété (4) des catégories de modèles simpliciales 4.4.26 que

**Lemme 4.4.35.** Si  $A$  est cofibrant et  $X$  est fibrant, le morphisme canonique<sup>111</sup>  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(A, X)_\bullet \rightarrow \mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(A, X)_\bullet$  est une équivalence faible.

*Exercice 4.4.36.* Démontrer le lemme.

En particulier, la restriction du bifoncteur  $\mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(-, -)$  à la sous-catégorie  $\mathbf{C}_{cf}$  des objets à la fois cofibrants et fibrants coïncide avec  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(-, -)$  à équivalence faible naturelle près.

*Notation 4.4.37.* On notera  $\mathbf{C}_{cf}$  la sous-catégorie simplicialement enrichie de  $\mathbf{C}$  des objets à la fois cofibrants et fibrants.

Notons  $L_{\mathcal{H}}^H \mathbf{C}$  la localisation hammac de la catégorie sous-jacente à  $\mathbf{C}$  (c'est à dire que l'on considère  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) = \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y)_0$  pour construire la catégorie simpliciale  $L_{\mathcal{H}}^H \mathbf{C}$ ).

**Théorème 4.4.38.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle simpliciale.

- (1) Pour tous objets  $X, Y \in \mathbf{C}$ , on a des équivalences faibles naturelles (en  $X, Y$ )  $\mathrm{Map}_{\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C})}(X, Y)_\bullet \simeq \mathrm{Map}_{L_{\mathcal{H}}^H \mathbf{C}}(X, Y)_\bullet \cong \mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y)_\bullet = \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(L(X), R(Y))_\bullet$ .
- (2) On a une équivalence d' $\infty$ -catégories  $\mathbf{C}_{cf} \cong \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C})$ .

Le dernier point signifie précisément que le foncteur canonique  $\tilde{N}_\bullet(\mathbf{C}_{cf}) \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C})$  est une équivalence catégorielle qui est en fait induite par une équivalence de Dwyer-Kan  $\mathbf{C}_{cf} \rightarrow L_{\mathcal{H}}^H \mathbf{C}$  de catégories simplicialement enrichie.

Ce théorème 4.4.38 nous permet donc d'identifier l' $\infty$ -catégorie  $\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{C})$  d'une catégorie de modèle simpliciale avec (le nerf d')une catégorie simplicialement enrichie déduite de  $\mathbf{C}$ ; en particulier cela nous garantit que cette  $\infty$ -catégorie reste dans les mêmes univers que  $\mathbf{C}$ .

<sup>111.</sup> induit par  $L(A) \rightarrow A$  et  $X \rightarrow R(X)$

Les Théorèmes 4.4.21 et 4.4.30, ce résultat reste vrai pour toute catégorie de modèle combinatoire. En particulier, il s'applique aux complexes de chaînes, espaces topologiques et aux catégories de diagramme sur les catégories de modèles combinatoires.

Nous avons vu qu'il y a un foncteur  $\mathbf{QCat} \rightarrow \mathbf{sEns}$  qui à une quasicatégorie associe un  $\infty$ -groupeïde que nous notons  $\mathbf{C} \mapsto \mathbf{C}^{iso}$ , cf 4.2.51.

**Lemme 4.4.39.** Le foncteur  $\mathbf{C} \mapsto \mathbf{C}^{iso}$  induit un foncteur  $\infty\text{-Cat} \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{sEns})$  qui vérifie que pour toutes quasicatégorie  $\mathbf{C}$  et tout  $\infty$ -groupeïde  $\mathbf{G}$ , on a une équivalence catégorielle

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{QCat})}(\iota(\mathbf{G}), \mathbf{C})_\bullet \simeq \mathrm{Map}_{\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{sEns})}(\mathbf{G}, \mathbf{C}^{iso}) (\cong \mathrm{Map}_{\mathbf{sEns}}(\mathbf{G}, \mathbf{C}^{iso})).$$

Une façon d'interpréter ce lemme est de dire que  $(-)^{iso}$  est l'adjoint  $\infty$ -catégoriel à droite de  $\iota$ .

*Exercice 4.4.40.* Imaginer ce que doit être la définition d'une adjonction entre  $\infty$ -foncteurs.

*Remarque 4.4.41* (Universalité de l' $\infty$ -catégorie associée à une catégorie de modèle). Nous avons déjà vu le point (1) et une partie du point (2) de la définition philosophique 4.4.1. Précisons maintenant ce point et l'unicité de  $\mathbf{Ho}_\infty(M)$ .

La donnée d'un  $\infty$ -foncteur de  $M$  dans une infinie catégorie  $X$  qui envoie  $\mathcal{W}$  dans les isomorphismes de  $X$  s'identifie avec un point de l'infinie catégorie<sup>112</sup>

$$Fun_{\mathcal{W} \rightarrow iso}(M, X) := \mathrm{Map}_{\mathbf{QCat}}(N_\bullet(M), X)_\bullet \times_{\mathrm{Map}_{\mathbf{QCat}}(N_\bullet(W), X)_\bullet} \mathrm{Map}_{\mathbf{QCat}}(N_\bullet(W), X^{iso})_\bullet.$$

Cette construction est fonctorielle en  $X$  de sorte que nous avons un  $\infty$ -foncteur  $Fun_{\mathcal{W} \rightarrow iso}(M, -) : \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{QCat}) \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{sEns})$ .

Nous avons défini (19) le foncteur  $\ell_\infty : N_\bullet(M) \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(M)$  de  $M$  dans son infinie-catégorie quotient ; on a aussi par composition un foncteur  $N_\bullet(\mathcal{W}) \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(M)$ . Par pré-composition nous obtenons alors un morphisme canonique fonctoriel en toute quasicatégorie  $X$

(24)

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{QCat}}(\mathbf{Ho}_\infty(M), X)_\bullet \xrightarrow{\ell_\infty^*} \mathrm{Map}_{\mathbf{QCat}}(N_\bullet(M), X)_\bullet \times_{\mathrm{Map}_{\mathbf{QCat}}(N_\bullet(W), X)_\bullet} \mathrm{Map}_{\mathbf{QCat}}(N_\bullet(W), X^{iso})_\bullet.$$

d'ensembles simpliciaux. Autrement dit, on obtient une  $(\infty)$ -transformation naturelle

$$\ell_\infty^* : \mathrm{Map}_{\mathbf{QCat}}(\mathbf{Ho}_\infty(M), -) \Rightarrow Fun_{\mathcal{W} \rightarrow iso}(M, -)$$

entre les deux  $\infty$ -foncteurs  $\mathrm{Map}_{\mathbf{QCat}}(\mathbf{Ho}_\infty(M), -)$ ,  $Fun_{\mathcal{W} \rightarrow iso}(M, -) : \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{QCat}) \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{sEns})$ . L'existence de la factorisation de tout foncteur au travers de  $\mathbf{Ho}_\infty(M)$  se traduit par l'essentielle surjectivité de cette transformation. Son unicité à homotopie près par le fait que cette transformation est un isomorphisme<sup>113</sup>. C'est précisément ce que nous dit la proposition suivante.

112. Comme  $N_\bullet(\mathcal{W}) \hookrightarrow N_\bullet(M)$  est une cofibration de Joyal, on a que  $\mathrm{Map}_{\mathbf{QCat}}(N_\bullet(M), X)_\bullet \rightarrow \mathrm{Map}_{\mathbf{QCat}}(N_\bullet(\mathcal{W}), X)_\bullet$  est une fibration de Joyal (4.2.25) et donc ce tiré en arrière est une quasicatégorie. On peut montrer, en utilisant les résultats duaux de l'exemple 2.6.19 ou le TD 4, qu'il est équivalent au produit cartésien *dérivé* dans  $\mathbf{QCat}$

113. au sens de la définition 4.2.36 dans la quasicatégorie des foncteurs de  $\mathbf{QCat}$  vers  $\mathbf{sEns}$

*Proposition 4.4.42.* Le morphisme (24) est une équivalence faible entre objets fibrants pour tout  $X$  et induit une équivalence naturelle de foncteurs (c'est à dire d'après 4.2.37 un isomorphisme entre  $\mathrm{Map}_{\mathbf{QCat}}(\mathbf{Ho}_\infty(M), -)$  et  $\underset{\mathcal{W} \rightarrow \mathrm{iso}}{Fun}(M, -)$  dans la quasicatégorie  $\mathrm{Map}_\bullet(\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{QCat}), \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{sEns}))$ ).

La proposition établit donc précisément la propriété universelle<sup>114</sup> satisfaite par la localisation  $\mathbf{Ho}_\infty(M)$  dans les  $\infty$ -catégories et traduit le fait que celle-ci *représente* le foncteur de quasicatégories  $\underset{\mathcal{W} \rightarrow \mathrm{iso}}{Fun}(M, -) : \infty\text{-}\mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{sEns})$ . Cette proposition donne en particulier l'unicité de  $\mathbf{Ho}_\infty(M)$  à isomorphisme<sup>115</sup> près dans  $\infty\text{-}\mathbf{Cat}$ .

#### 4.5. NOTION D' $\infty$ -(CO)LIMITES

Nous allons maintenant définir une notion d' $\infty$ -(co)limites (voir la définition 4.5.21) relevant les notions de (co)limites homotopiques de la partie 2.6 entre catégories homotopiques à leurs  $\infty$ -catégories associées. Dans le cas de catégorie de modèle combinatoire, ces relevés seront précisément calculés par les (relevés des) (co)limites homotopiques 2.6.

Un point important que l'on veut, évidemment, est que ces notions soient invariantes par équivalence d'infinies catégories (c'est à dire équivalence catégorielle si on regarde le modèle donné par des quasicatégories). En particulier les (co)limites standards ne le seront pas<sup>116</sup>. Le modèle des quasicatégories permet de décrire cette notion d' $\infty$ -(co)limites d'une manière assez aisée.

Un premier cas simple (mais crucial) est celui des (co)limites vides, c'est à dire les objets initiaux et finaux.

**Définition 4.5.1** (Objets initiaux et finaux d'une  $\infty$ -catégorie). Soit  $\mathbf{C}$  une  $\infty$ -catégorie<sup>117</sup> Un objet  $X$  est dit final si pour tout objet  $Y$ ,  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}_\bullet}(Y, X)$  est faiblement équivalent à un point<sup>118</sup>.

Un objet  $X$  est dit initial si pour tout objet  $Z$ ,  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}_\bullet}(X, Z)$  est faiblement équivalent à un point.

**Lemme 4.5.2.** Soit  $\mathbf{C}$  une  $\infty$ -catégorie. Les sous-catégories  $\mathbf{C}_{init}$  et  $\mathbf{C}_{fin}$  des objets initiaux et finaux sont soit vides soit des  $\infty$ -groupoides contractiles<sup>119</sup>.

En particulier, deux objets initiaux de  $\mathbf{C}$  sont isomorphes et deux objets finaux sont eux aussi isomorphes.

Le mot isomorphe est au sens des  $\infty$ -catégorie, c'est à dire de la définition 4.2.36.

*Exercice 4.5.3.* Démontrer le lemme.

*Remarque 4.5.4.* Si  $F : \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}$  est une équivalence d' $\infty$ -catégorie, alors  $F$  induit des équivalences faibles entre les espaces de morphismes ; en particulier elle préserve les objets finaux et initiaux.

114. qui est le point (2) de la définition philosophique 4.4.1

115. au sens de 4.2.36

116. ne serait-ce que par les colimites ne sont pas invariantes par équivalences faibles d'espaces topologiques comme nous l'avons vu

117. c'est à dire une quasicatégorie ou une catégorie simplicialement enrichie fibrante selon le modèle que l'on choisit

118. autrement dit contractile ; rappelons que l'ensemble  $\mathrm{Map}_{\mathbf{C}_\bullet}(Y, X)$  est fibrant par définition d'une  $\infty$ -catégorie

119. c'est à dire des complexes de Kan faiblement homotopes à un point

À toute quasicatégorie  $\mathbf{C}$  et objet  $X$  de  $\mathbf{C}$ , nous pouvons associer le tiré en arrière  $\mathbf{C}_{/X}$  (dans  $\mathbf{QCat}$ ) défini par

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}_{/X} & \longrightarrow & \mathrm{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^1, \mathbf{C}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow ev_1 \\ \{*\} & \xrightarrow{X} & \mathbf{C} \end{array}$$

où  $ev_1$  est l'évaluation en son but d'un foncteur (cf 4.2.19). On construit de même, en remplaçant  $ev_1$  par  $ev_0$ ,  $\mathbf{C}^{X/}$ .

**Lemme 4.5.5.**  $\mathbf{C}_{/X}$  et  $\mathbf{C}^{X/}$  sont des quasicatégories. Les morphismes  $ev_0$ , respectivement  $ev_1$ , induisent des morphismes de quasicatégories  $\mathbf{C}_{/X} \rightarrow \mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}^{X/} \rightarrow \mathbf{C}$ .

*Démonstration.* Les premiers points sont des conséquences du lemme 4.2.25. Le deuxième est donné par la compositions  $\mathbf{C}_{/X} \rightarrow \mathrm{Map}_\bullet(\Delta_\bullet^1, \mathbf{C}) \xrightarrow{ev_0} \mathbf{C}$  et sa version duale.  $\square$

**Lemme 4.5.6.** Soit  $\mathbf{C}$  une  $\infty$ -catégorie. Un objet  $X$  est final si et seulement si  $\mathbf{C}_{/X} \rightarrow \mathbf{C}$  est une fibration acylique d'ensembles simpliciaux.

Un objet  $X$  est initial si et seulement si  $\mathbf{C}^{X/} \rightarrow \mathbf{C}$  est une fibration acylique d'ensembles simpliciaux.

On peut réinterpréter les (co)limites standards en termes d'objets finaux et initiaux. En effet soit  $I$  une petite catégorie,  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $F : I \rightarrow \mathcal{C}$  un diagramme de forme  $I$  dans  $\mathcal{C}$ . On note  $\mathcal{C}^{F/}$  la catégorie des objets au dessus du diagramme  $F$ . C'est à dire la catégorie dont les objets sont donnés par un objet  $Z$  et, pour tout  $i \in I$ , des flèches  $F(i) \xrightarrow{\alpha_i} Z$  telles que pour toute flèche  $i \xrightarrow{f} j$  on ait  $F(i) \xrightarrow{\alpha_i} Z = \mathcal{F}(i) \xrightarrow{F(f)} F(j) \xrightarrow{\alpha_j} Z$ . Autrement dit les objets sont les diagrammes commutatifs obtenus à partir du diagramme en rajoutant un objet  $Z$  et des flèches pointant de chaque objet du diagramme vers le nouvel objet  $Z$ . Un morphisme de  $(Z, (\alpha_i)_{i \in I})$  vers  $(Z', (\alpha'_i)_{i \in I})$  est un morphisme  $Z \rightarrow Z'$  dans  $\mathcal{C}$  qui commute avec les  $\alpha_i, \alpha'_i$ , c'est à dire tel que  $\alpha'_i = F(i) \xrightarrow{\alpha_i} Z \rightarrow Z'$  pour tout  $i \in I$ .

On construit dualement la catégorie  $\mathcal{C}_{/F}$  des objets au dessus du diagramme. Ses objets sont la donnée d'un objet  $Z \in \mathcal{C}$  et de flèches  $\beta_j : Z \rightarrow F(j)$  pour tout  $j \in I$

qui fassent commuter  $Z \xrightarrow{\beta_j} F(i)$  pour toute flèche  $g : j \rightarrow k$ . Ses morphismes

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\beta_j} & F(i) \\ & \searrow \beta_k & \downarrow F(g) \\ & & F(k) \end{array}$$

sont les morphismes  $Z' \rightarrow Z$  qui commutent avec les  $\beta_j, \beta'_j$ .

**Lemme 4.5.7.** Une colimite de  $F$  est un objet initial de  $\mathcal{C}^{F/}$ .

Une limite de  $F$  est un objet final de  $\mathcal{C}_{/F}$ .

*Exercice 4.5.8.* Démontrer le lemme.

Étant donné que l'on a une définition des objets finaux et initiaux dans une quasicatégorie, il suffit maintenant de définir un analogue de  $\mathcal{C}^{F/}$  et  $\mathcal{C}_{/F}$  pour définir des  $\infty$ -(co)limites d' $\infty$ -catégories. Nous disposons déjà, pour toute petite catégorie  $I$  et quasicatégorie  $\mathbf{C}$ , de la quasicatégorie  $\mathrm{Map}_\bullet(N_\bullet(I), \mathbf{C}) \cong \mathrm{Map}_{\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{QCat})}(N_\bullet(I), \mathbf{C})$  des  $\infty$ -foncteurs de  $I$  dans  $\mathbf{C}$ .



*Terminologie 4.5.9.* On appellera diagramme de forme  $I$  dans  $\mathbf{C}$  un  $\infty$ -foncteur  $F : N_\bullet(I) \rightarrow \mathbf{C}$ .

Construisons maintenant les  $\infty$ -catégories au dessus et en dessous d'un diagramme. La construction est plus compliquée car la notion de commutativité de diagramme n'est plus stricte mais à des choix d'homotopie près.

Pour ce faire nous introduisons le joint de deux ensembles simpliciaux.

**Définition 4.5.10.** Soient  $S_\bullet, T_\bullet$  deux ensembles simpliciaux. Leur joint est l'ensemble simplicial  $(S \star T)_\bullet$  défini en degré simplicial  $n$  par

$$(S \star T)_n := \coprod_{p=-1 \dots n} S_p \times T_{n-p-1}$$

où par convention  $S_{-1} = T_{-1} = \{*\}$ .

Les faces  $d_i$  sont données par, pour tout  $(\alpha, \beta) \in S_p \times T_{n-p-1}$  par

$$d_i(\alpha, \beta) = \begin{cases} (d_i(\alpha), \beta) & \text{si } i \leq p, p \neq 0 \\ (\alpha, d_{i-p-1}(\beta)) & \text{si } i > p, p \neq n-1 \\ \beta & \text{si } p = 0 \\ \alpha & \text{si } p = n-1 \end{cases}$$

et les valeurs de  $d_i$  sur  $S_\bullet$  et  $T_\bullet$  pour  $p = -1, n$ . Les dégénérescences sont définies de même.

**Lemme 4.5.11.** Le joint de deux ensembles simpliciaux est un ensemble simplicial.

*Exercice 4.5.12.* Démontrer le lemme.

*Remarque 4.5.13.* La formule du joint n'est *PAS* symétrique :  $(S \star T)_\bullet$  n'est pas isomorphe à  $(T \star S)_\bullet$  comme ensemble simplicial.

*Exemple 4.5.14.* Si  $T_\bullet = \Delta_\bullet^0$  est un point, alors  $(S \star T)_\bullet$  est le cône de  $S_\bullet$ . C'est à dire l'ensemble simplicial obtenu en rajoutant un sommet "final"  $*_f$  à ceux de  $S_0$ , un 1-simplexe allant de  $v$  à  $*_f$  pour tout  $v \in S_0$  et, plus généralement, pour tout  $n$ -simplexe de  $S_\bullet$ , un  $n+1$ -simplexe obtenu en rajoutant  $*_f$  (et toutes les faces nécessaires contenant  $*_f$ ).

En revanche  $(T \star S)_\bullet$  est le cocone de  $S_\bullet$ . Il est obtenu en rajoutant encore un sommet  $*_i$  et un 1-simplexe allant de  $*_i$  vers tout  $v \in S_0$  et de même pour les  $n$ -simplexes.

**Proposition 4.5.15.** Soit  $F : N_\bullet(I) \rightarrow \mathbf{C}$  un  $\infty$ -foncteur d'une petite catégorie  $I$  vers une quasicatégorie  $\mathbf{C}$ .

- (1) Il existe un unique ensemble simplicial  $\mathbf{C}_{/F}$  solution de la propriété universelle suivante : pour toute  $\infty$ -catégorie  $\mathbf{D}$ , il existe une bijection naturelle
- (25)  $\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\mathbf{D}, \mathbf{C}_{/F}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}((\mathbf{D} \star N_\bullet(I))_\bullet, \mathbf{C}) \times_{\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(N_\bullet(I), \mathbf{C})} \{F\}.$

où l'ensemble de droite est l'ensemble des foncteurs dont la restriction à  $N_\bullet(I)$  est le foncteur  $F$ .

- (2) Il existe un unique ensemble simplicial  $\mathbf{C}^{F/}$  solution de la propriété universelle suivante : pour toute  $\infty$ -catégorie  $\mathbf{D}$ , il existe une bijection naturelle

$$\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\mathbf{D}, \mathbf{C}^{F/}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}((N_\bullet(I) \star \mathbf{D})_\bullet, \mathbf{C}) \times_{\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(N_\bullet(I), \mathbf{C})} \{F\}.$$

- (3) On a que  $\mathbf{C}^{F/}$  et  $\mathbf{C}_{/F}$  sont des quasicatégories et pour toute équivalence catégorielle  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$  les foncteurs induits  $\mathbf{C}^{F/} \rightarrow (\mathbf{C}')^{F/}$  et  $\mathbf{C}_{/F} \rightarrow \mathbf{C}'_{/F}$  sont des équivalences faibles.

*Terminologie 4.5.16.* On appelle respectivement  $\mathbf{C}^{F/}$  et  $\mathbf{C}_{/F}$  les quasicatégories des objets en dessous du diagramme  $F$ , resp. au dessus de  $F$ .

En prenant  $\mathbf{D} = \mathbf{C}_{/F}$  et  $\text{id}_{\mathbf{C}_{/F}}$ , on déduit de (25) et de l'inclusion  $\mathbf{C}_{/F} \hookrightarrow (\mathbf{C}_{/F} \star N_{\bullet}(I))_{\bullet}$  un morphisme canonique  $\mathbf{C}_{/F} \rightarrow \mathbf{C}$  qui essentiellement oublie les  $F(i)$  et les flèches qui leur sont associées. On a de même un morphisme canonique  $\mathbf{C}^{F/} \rightarrow \mathbf{C}$ .

*Terminologie 4.5.17.* On appelle les morphismes  $\mathbf{C}_{/F} \rightarrow \mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}^{F/} \rightarrow \mathbf{C}$  les foncteurs d'oubli canoniques.

*Remarque 4.5.18.* Plus généralement, le joint de deux quasicatégories est encore une quasicatégorie. Ceci permet de définir des quasicatégories au dessus/en dessous d'un diagramme défini sur une quasicatégorie. On a par ailleurs, le résultat suivant pour les catégories ordinaires.

*Lemme 4.5.19.* Soient  $C, D$  deux petites catégories. Alors on a un isomorphisme  $(N_{\bullet}(C) \star N_{\bullet}(D))_{\bullet} \cong N_{\bullet}(C \star D)$  où  $C \star D$  est la catégorie dont les objets sont la réunion des objets de  $C$  et  $D$ , les morphismes donnés par

$$\text{Hom}_{C \star D}(X, Y) = \begin{cases} \text{Hom}_C(X, Y) & \text{si } X, Y \in C \\ \text{Hom}_D(X, Y) & \text{si } X, Y \in D \\ \emptyset & \text{si } X \in D, Y \in C \\ \{*\} & \text{si } X \in C, Y \in D. \end{cases}$$

*Exemple 4.5.20.* Si  $I = \{*\}$  et  $F(*) = X$  est un objet de  $\mathbf{C}$ , alors  $\mathbf{C}_{/F} \cong \mathbf{C}_{/X}$  et  $\mathbf{C}^{F/} \cong \mathbf{C}^{X/}$  et les foncteurs d'oubli canoniques sont ceux du lemme 4.5.5.

On peut enfin définir la notion d' $\infty$ -(co)limite.

**Définition 4.5.21** ( $\infty$ -(co)limites). Soit  $F : N_{\bullet}(I) \rightarrow \mathbf{C}$  un diagramme de forme  $I$  dans une quasicatégorie  $\mathbf{C}$ .

- (1) Une  $\infty$ -colimite de  $F$  est un objet initial de  $\mathbf{C}^{F/}$ . Elle sera notée  $\text{colim}_{\infty}(F)$ .
- (2) Une  $\infty$ -limite de  $F$  est un objet final de  $\mathbf{C}_{/F}$ . Elle sera notée  $\text{lim}_{\infty}(F)$ .

On fait en général l'abus de notation consistant à écrire aussi  $\text{colim}_{\infty}(F)$  et  $\text{lim}_{\infty}(F)$  leurs images dans  $\mathbf{C}$  donné par les  $\infty$ -foncteurs canoniques 4.5.17.

*Exemple 4.5.22.* Si  $C$  est une catégorie usuelle, alors le lemme 4.5.7 nous donne que les  $\infty$ -(co)limites de  $N_{\bullet}(C)$  sont les (co)limites usuelles de  $C$  (vues comme objets de  $N_{\bullet}(C)$ ).

*Exemple 4.5.23.* L' $\infty$ -catégorie  $\mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{C})$  associée à une catégorie de modèle combinatoire  $\mathbf{C}$  a toutes les (co)limites homotopiques (cf 4.5.29).

**Lemme 4.5.24** (Unicité des  $\infty$ -(co)limites). Soit  $F : N_{\bullet}(I) \rightarrow \mathbf{C}$  un diagramme de forme  $I$  dans une quasicatégorie  $\mathbf{C}$ . Le sous-ensemble des  $\infty$ -(co)limites de  $F$  est soit vide soit un ensemble simplicial fibrant contractile.

*Démonstration.* C'est une conséquence de la définition et du lemme 4.5.6. □

Relions maintenant, dans le cas d'une catégorie de modèle, les foncteurs dérivés et les (co)limites homotopiques.

Supposons donc que  $\mathbf{C}$  est une catégorie de modèle *combinatoire*. Rappelons d'après le Théorème 2.6.16 que, pour toute petite catégorie  $\mathcal{D}$ , on dispose des foncteurs (co)limites  $\text{colim}_{\mathcal{D}}, \text{lim}_{\mathcal{D}} : \mathbf{C}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{C}$  qui sont des adjoints de Quillen du foncteur constant  $\text{cst} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  dans les structures de modèle projective et injective sur les diagrammes  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$ . En particulier on obtient les foncteurs dérivés  $\text{hocolim}_{\mathcal{D}}$  et  $\text{holim}_{\mathcal{D}}$  (Proposition 2.5.13). D'après la proposition 4.4.20, on a donc des  $\infty$ -foncteurs  $\text{hocolim}_{\mathcal{D}\infty}, \text{holim}_{\mathcal{D}\infty} : \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{C}^{\mathcal{D}}) \rightarrow \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{C})$  entre les  $\infty$ -catégories associées. La proposition suivante nous dit que ces relevés des foncteurs dérivés sont les  $\infty$ -(co)limites des foncteurs.

**Proposition 4.5.25.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle combinatoire et  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{C}$  un diagramme de forme  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbf{C}$ . Alors on a des isomorphismes naturels (en  $F$ )

$$\text{hocolim}_{\mathcal{D}\infty}(F) \simeq \text{colim}_{\infty}(F), \quad \text{holim}_{\mathcal{D}\infty}(F) \simeq \text{lim}_{\infty}(F).$$

Dans cette proposition on a noté  $(\text{co})\text{lim}_{\infty}(F)$  l'image dans  $\mathbf{C}$  par le foncteur oubli canonique 4.5.17 des  $\infty$ -(co)limites de  $F$  (4.5.21).

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate du théorème 4.5.28 suivant auquel on applique le foncteur oubli canonique.  $\square$

Ce résultat est une conséquence d'un résultat plus précis que nous allons énoncer. Commençons par relever<sup>120</sup>  $\text{hocolim}_{\mathcal{D}}$  (resp.  $\text{holim}_{\mathcal{D}}$ ) en des objets de  $\mathbf{C}^{F/}$  (resp.  $\mathbf{C}_{/F}$ ).

Rappelons du lemme 4.5.19 la définition de la catégorie  $\{*\} \star \mathcal{D}$  qui est une catégorie qui a un objet  $*$  et les objets de  $\mathcal{D}$ , les morphismes de  $\mathcal{D}$  entre, l'identité de  $*$  et un unique morphisme  $*$   $\rightarrow i$  pour tout objet  $i \in \mathcal{D}$ . Par définition,  $\mathcal{D}$  est une sous-catégorie du joint catégoriel  $\{*\} \star \mathcal{D}$ .

**Lemme 4.5.26.** La (sous-)catégorie des foncteurs  $\{*\} \star \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{C}$  dont la restriction à  $\mathcal{D}$  est  $F$  est la catégorie dont les objets sont les  $Z \in \mathbf{C}$  munis d'une transformation naturelle  $\eta_Z : F \rightarrow \text{cst}(Z)$  et les morphismes sont les morphismes  $f : Z \rightarrow Z'$  qui commutent avec les  $\eta_{(-)}$ , c'est à dire tels que  $\eta_{Z'} = F \xrightarrow{\eta_Z} \text{cst}(Z) \xrightarrow{\text{cst}(f)} \text{cst}(Z')$ .

Dualement, la (sous-)catégorie des foncteurs  $\mathcal{D} \star \{*\} \rightarrow \mathbf{C}$  dont la restriction à  $\mathcal{D}$  est  $F$  est la catégorie dont les objets sont les  $Z \in \mathbf{C}$  munis d'une transformation naturelle  $\beta_Z : \text{cst}(Z) \rightarrow F$  et les morphismes sont les morphismes  $f : Z \rightarrow Z'$  qui commutent avec les  $\beta_{(-)}$ , c'est à dire tels que  $\beta_{Z'} = \text{cst}(Z) \xrightarrow{f} \text{cst}(Z') \xrightarrow{\beta_{Z'}} F$ .

*Exercice 4.5.27.* Démontrer le lemme.

Le lemme s'applique en particulier à  $\text{colim}_{\mathcal{D}}(F)$  (resp.  $\text{lim}_{\mathcal{D}}(F)$ ) et les propositions 4.5.15 et 4.4.20 nous donne donc un objet de  $\mathbf{C}^{F/}$  (resp.  $\mathbf{C}_{/F}$ ) dont l'image par le foncteur oubli canonique est  $\text{hocolim}_{\mathcal{D}\infty} F$  (resp.  $\text{holim}_{\mathcal{D}\infty} F$ ). On notera par abus de notation  $\text{hocolim}_{\mathcal{D}\infty} F$  et  $\text{holim}_{\mathcal{D}\infty} F$  les dits objets de  $\mathbf{C}^{F/}$  et  $\mathbf{C}_{/F}$ .

**Théorème 4.5.28.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle combinatoire et  $\mathcal{D}$  une petite catégorie. Pour tout foncteur  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{C}$ , l'objet  $\text{hocolim}_{\mathcal{D}\infty} F$  (resp.  $\text{holim}_{\mathcal{D}\infty} F$ ) est un objet initial de  $\mathbf{C}^{F/}$  (resp. final de  $\mathbf{C}_{/F}$ ).

<sup>120</sup> en suivant l'idée de la construction de 2.6.3

En particulier, il existe des équivalences naturelles  $\mathrm{hocolim}_{\mathcal{D}\infty} F \simeq \mathrm{colim}_{\infty}(F)$  et  $\mathrm{holim}_{\mathcal{D}\infty} F \simeq \mathrm{lim}_{\infty}(F)$ .

*Esquisse de preuve du Théorème 4.5.28.* D'après le théorème 4.4.30, il suffit de montrer ce résultat pour les catégories de modèles simpliciales combinatoires puisque tous les objets sont préservés par équivalence de Quillen.

Le point important maintenant que nous avons déjà vu, découlant du théorème 2.6.16, propositions 2.5.13

et 4.4.20, est que nous avons des  $\infty$ -foncteurs  $\mathrm{hocolim}_{\mathcal{D}\infty} : \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{C}^{\mathcal{D}}) \rightarrow \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{C})$  et  $\mathrm{holim}_{\mathcal{D}\infty} : \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{C}^{\mathcal{D}}) \rightarrow \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{C})$  relevant les foncteurs dérivés  $\mathrm{hocolim}_{\mathcal{D}}$  et  $\mathrm{holim}_{\mathcal{D}}$ .

Pour conclure que ces foncteurs (munis de leur structure d'objets dans  $\mathbf{C}^{F/}$  et  $\mathbf{C}_{/F}$ ) sont équivalents aux  $\infty$ -colimites, il suffit de voir que l'on a une équivalence catégorielle de quasicatégories

$$(26) \quad \mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{C}^{\mathcal{D}}) \cong \mathrm{Map}_{\bullet}(N_{\bullet}(\mathcal{D}), \mathbf{C}).$$

En effet, on peut alors utiliser une preuve similaire à celle de la propriété universelle de  $\mathbb{L}F$  dans la proposition 2.5.17 et les techniques de la proposition 4.4.20 pour vérifier que  $\mathrm{hocolim}_{\mathbf{D}\infty}(F)$  est bien un objet initial de  $\mathbf{C}^{F/}$ . L'équivalence (26) est non-triviale et est démontrée dans [16] par exemple.  $\square$

**Corollaire 4.5.29.** Si  $\mathbf{C}$  est une catégorie de modèle combinatoire, l' $\infty$ -catégorie  $\mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{C})$  admet toutes les (co)limites indicées par une petite catégorie  $\mathcal{D}$ .

*Démonstration.* Il s'agit juste d'utiliser les théorèmes 4.5.28 et 2.6.16.  $\square$

*Remarque 4.5.30.* Le corollaire précédent est un exemple des propriétés remarquables associées aux  $\infty$ -catégories associées à une catégorie de modèle combinatoire. Ces  $\infty$ -catégories sont appelées *présentables* dans la littérature.

Les propriétés générales des (co)limites se généralisent aux  $\infty$ -colimites. Par exemple pour tout adjoint de Quillen à gauche  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  entre catégories de modèles combinatoires, alors  $F_{\infty}$  commute avec les  $\infty$ -colimites et de même un  $\infty$ -foncteur relevant un adjoint à droite de Quillen commute avec les  $\infty$ -limites. Un autre exemple est donné par la proposition suivante.

**Proposition 4.5.31.** Soit  $\mathbf{C}$  une quasicatégorie et  $F, G : N_{\bullet}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{C}$  des diagrammes qui admettent respectivement une  $\infty$ -colimite et une  $\infty$ -limite. Alors, pour tout  $Z \in \mathbf{C}$ , on a un isomorphisme<sup>121</sup> :

$$(27) \quad \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(\mathrm{colim}_{\infty}(F), Z) \simeq \mathrm{lim}_{\infty} \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(F(-), Z)$$

$$(28) \quad \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(Z, \mathrm{lim}_{\infty}(G)) \simeq \mathrm{lim}_{\infty} \mathrm{Map}_{\mathbf{sEns}}(Z, G(-))$$

dans  $\mathbf{Ho}_{\infty}(\mathbf{sEns})$ .

121. au sens des  $\infty$ -catégories

## V. HOMOTOPIE RATIONNELLE

L'homotopie rationnelle est née avec les travaux de Quillen, puis Sullivan (et bien d'autres après et avec eux). Elle a pour objet le calcul de tous les invariants algébro-topologiques rationnels d'un espace topologique à partir de ses cochaines (munie de leur structure multiplicative). Le résultat principal établit que cette dernière contient effectivement tous les invariants possibles en un sens, mais au delà de ce résultat, la force de la théorie réside dans sa calculabilité.

### 5.1. ALGÈBRES GRADUÉES DIFFÉRENTIELLES COMMUTATIVES, ALGÈBRES LIBRES ET SEMI-LIBRES

Dans cette partie et les suivantes, sauf mention explicite du contraire, on travaillera sur le corps  $\mathbb{Q}$  des rationnels lorsque on ne précise rien ; tous les résultats ont du sens sur un autre corps de caractéristique nulle cela dit.

Rappelons le théorème de De Rham

**Théorème 5.1.1.** Soit  $M$  une variété  $C^\infty$ . Il existe un isomorphisme naturel d'algèbres graduées

$$H^*(M, \mathbb{R}) \cong H^*(\Omega_{dR}^*(M))$$

où  $\Omega_{dR}^*(M)$  désigne l'algèbre des formes différentielles munie de la différentielle de De Rham.

L'algèbre des formes différentielles est une algèbre commutative au sens gradué. En revanche, l'algèbre des cochaines singulières  $(C^*(M, \mathbb{R}), \cup)$ , elle, n'est qu'associative<sup>122</sup>. La commutativité de la structure induite en cohomologie s'explique par le fait que le produit  $a \cup b - \pm b \cup a$  est homotope à 0. On peut en fait montrer que l'homotopie est-elle même symétrique à homotopie près (et ainsi de suite). Cela amène à deux questions

- Y-a-t'il une algèbre de cochaines commutatives au sens gradué calculant la cohomologie singulière d'un espace ?
- (*Thom*) Toute algèbre commutative graduée est-elle la cohomologie d'un espace topologique ?

La réponse à la première question, posée dans cette généralité, est négative. En effet, il existe des opérations de Steenrod, construites *naturellement* à partir des homotopies du cup-produit, qui donnent des classes de cohomologie non-triviale en cohomologie à coefficient dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . L'existence d'une réponse positive à la première question impliquerait que toutes ces classes doivent être nulles. En revanche, cette obstruction disparaît en caractéristique nulle et on va voir qu'on peut effectivement construire un tel modèle. La réponse à la deuxième question devient également positive en caractéristique nulle, comme nous le verrons comme conséquence du théorème principal.

Précisons maintenant quelques définitions et terminologies.

*Notation 5.1.2.* On note  $Ch^{\geq 0}(R)$  la catégorie des complexes de cochaines de  $R$ -modules, concentrés en degré positif ou nul.

<sup>122.</sup> et très fortement non-commutatives au sens *strict*. Son centre est réduit à  $C^0(M, \mathbb{R})$  et deux cochaines génériques ne commutent pas

Cette catégorie s'identifie sans peine avec  $CH_{\leq 0}(R)$  en identifiant un complexe de chaînes avec un complexe de cochaines avec la graduation opposée.

La catégorie  $Ch^{\geq 0}(R)$  des complexes de cochaines a une structure symétrique monoidale. Le produit tensoriel de deux complexes  $(C^*, d_C)$ ,  $(D^*, d_D)$  étant donné par  $(C \otimes D)^n = \bigoplus_{i+j=n} C^i \otimes D^j$  et la différentielle étant donnée par  $d(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)^i x \otimes d(y)$  si  $x \in C^i$ . L'isomorphisme  $\tau : C \otimes D \cong D \otimes C$  est lui donné par  $\tau(x \otimes y) = (-1)^{ij} y \otimes x$  si  $x \in C^i$ ,  $y \in D^j$ .

**Définition 5.1.3.** La catégorie **CDGA** des algèbres graduées différentielles commutatives (on écrira juste CDGA) sur  $\mathbb{Q}$  est la catégorie des monoides commutatifs unitaires dans  $(Ch^{\geq 0}(\mathbb{Q}), \otimes)$ . Autrement dit, une CDGA est un morphisme de complexes de cochaines  $A \otimes A \rightarrow A$  (noté  $\cdot$ ) qui est associatif, commutatif au sens gradué :

$$y \cdot x = (-1)^{ij} x \cdot y \text{ pour } x \in A^i, y \in A^j,$$

vérifie la relation de Leibniz<sup>123</sup> :

$$d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + (-1)^i x \cdot d(y) \text{ pour } x \in A^i,$$

où  $d$  désigne la différentielle de  $A$ , et est munie d'un morphisme  $\mathbb{Q} \rightarrow A$  de complexes de cochaines<sup>124</sup> et d'algèbre tel que  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ .

Sur  $\mathbb{R}$ , plutôt que sur  $\mathbb{Q}$ , on a un exemple donné par  $\Omega_{dR}^*(M)$ . Dans toute la suite, sauf mention du contraire, on verra  $\mathbb{Q}$  (ou toute autre anneau de base  $R$ ) comme une cdga concentrée en degré 0.

*Remarque 5.1.4.* Si  $x$  est de degré impair, alors,  $x^2 = -x^2$  implique que  $x^2 = 0$ . A contrario, les éléments de degré pair commutent avec tout le monde.

*Remarque 5.1.5.* Étant donné que la différentielle est une dérivation pour le produit (formule de Leibniz), on a que la cohomologie d'une cdga est une algèbre commutative au sens gradué (que l'on peut donc aussi identifier à une cdga avec différentielle nulle), sa multiplication étant induite par celle de la cdga.

*Exemple 5.1.6* (Algèbres symétriques). On a un exemple canonique construit comme suit. Soit  $V$  un espace vectoriel, on note

$$Sym(V) := \bigotimes_{n \geq 0} (V^{\otimes n})_{\Sigma_n} \cong \bigotimes_{n \geq 0} (V^{\otimes n})^{\Sigma_n}$$

l'algèbre symétrique sur  $V$  obtenue en quotientant les tenseurs par la relation  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \sim \sigma.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$  où  $\sigma$  agit via l'isomorphisme  $\tau$  (par exemple  $(12) \cdot v \otimes w = (-1)^{ij} w \otimes v$  si  $w \in V^j$ ,  $v \in V^i$ ). Si  $V = \bigoplus \mathbb{Q}x_i \oplus \bigoplus \mathbb{Q}y_j$  est engendré par des vecteurs de degrés pairs  $x_i$  et de degré impairs  $y_j$ , on obtient que l'espace gradué

$$Sym(V) = \mathbb{Q}[x_i] \otimes \Lambda(y_j)$$

soit le produit tensoriel entre les polynômes en les variables paires et le produit extérieur en les variables impairs. La concaténation des tenseurs induit une structure d'algèbre graduée commutative sur  $Sym(V)$  qui coïncide avec l'isomorphisme précédent.

De manière générale, on a un isomorphisme canonique

$$Sym(V \oplus W) \cong Sym(V) \otimes Sym(W)$$

123. qui exprime que  $d$  est une dérivation

124.  $\mathbb{Q}$  est vu comme un complexe concentré en degré 0

d'algèbre commutative différentielle graduée.

Si  $(V, d)$  est un complexe de cochaines, alors la différentielle  $d : V^i \rightarrow V^{i+1}$  s'étend en une structure de CDGA sur  $Sym(V)$  par la formule de Leibniz :

$$d(v_1 \cdots v_n) = \sum (-1)^{|v_1| + \cdots + |v_{i-1}|} v_1 \cdots v_{i-1} \cdot d(v_i) \cdot v_{i+1} \cdots v_n.$$

**Définition 5.1.7.** On notera  $Sym((V, d))$  (ou simplement  $Sym(V)$  quand il n'y a pas d'ambiguïté) la CDGA ainsi construite, appelée algèbre différentielle graduée commutative *libre* associée au complexe  $(V, d)$ . On notera aussi, pour des éléments gradués  $x_i$  ( $i \in I$ ),

$$\mathbb{Q}[x_i, i \in I] := Sym\left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}x_i\right)$$

la CDGA libre engendrée par l'espace vectoriel *gradué* engendré par les  $x_i$  (ou bien sûr  $\mathbb{Q}x_i$  est vu comme étant concentré en degré égal au degré de  $x_i$ ). On prendra bien garde que ceci est une CDGA (autrement dit les éléments de degré impairs sont de carrés nuls et anticommulent entre eux).

Notons qu'un morphisme de complexes de cochaines  $f : V \rightarrow W$  induit un morphisme de cdga  $Sym(V) \rightarrow Sym(W)$  :

$$f(v_1 \cdots v_n) = f(v_1) \cdots f(v_n).$$

L'algèbre symétrique est bien libre au sens où elle vérifie de fait la propriété universelle donnée par

**Lemme 5.1.8.** Le foncteur algèbre symétrique  $(V, d) \mapsto Sym((V, d))$  est l'adjoint à

gauche  $Ch^{\geq 0}(R) \xrightleftharpoons[U]{Sym(-)} \mathbf{CDGA}$  du foncteur oubli  $U$  qui à une algèbre associe son complexe de cochaines sous-jacent.

En particulier on a des bijections naturelles

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CDGA}}(Sym(V), A) \cong \mathrm{Hom}_{Ch^{\geq 0}(R)}(V, A)$$

pour tout complexe  $V$  et CDGA  $A$ . Les deux conséquences à retenir sont les suivantes : soit  $(V, d)$  un complexe de cochaines et  $Sym((V, d))$  la cdga obtenue ci-dessus.

- Un morphisme de cdga  $\varphi : Sym(V) \rightarrow A$  est uniquement déterminé par sa restriction  $\varphi|_V : V \xrightarrow{\varphi} A$  ;
- Une dérivation<sup>125</sup> de  $\delta : Sym(V) \rightarrow A$  est uniquement déterminé par sa restriction  $\delta|_V : V \xrightarrow{\delta} A$ .

*Exemple 5.1.9* (Algèbres libres fonctoriellement acycliques). Soit  $(V, d_V)$  un complexe de cochaines. On note  $C(V)$  le cocône de  $id : V \rightarrow V$ . Précisément, on a que  $C(V)^n = V^{n-1} \oplus V^n$  avec pour différentielle donnée, pour  $x \in V^{n-1}$ ,  $y \in V^n$  par  $d(x, y) = (-d_D(x) + y, d_D(y))$ . On a une suite exacte courte de complexes de cochaines :  $V[1] \hookrightarrow C(V) \twoheadrightarrow V$  où  $V[1]^n = V^{n-1}$  avec la différentielle  $x \mapsto -d_D(x)$  et  $H^*(C(V))$  est acyclique.

<sup>125</sup>. c'est à dire une application linéaire  $\delta : A \rightarrow B$  entre cdgas qui vérifie la relation de Leibniz :  $\delta(x \cdot y) = \delta(x) \cdot y + \pm x \cdot \delta(y)$ . On ne suppose pas que cette dérivation préserve le degré. En particulier, elle peut être de degré 1, c'est le cas d'une différentielle ou bien  $-1$ , ce sera le cas d'une homotopie. On notera que  $\delta(1) = 0$

En caractéristique nulle, le foncteur  $Sym(-)$  est exact<sup>126</sup>; en particulier l'unité  $\eta : \mathbb{Q} \hookrightarrow Sym((C(V), d)) = \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} Sym^n(C(V), d)$  est un quasi-isomorphisme

$$\mathbb{Q} \xrightarrow[\sim]{\eta} Sym((C(V), d))$$

qui est un quasi-inverse du morphisme de cdga canonique  $p : Sym((C(V), d)) \rightarrow \mathbb{Q}$  (qui envoie  $V$  sur 0). On peut en fait expliciter une homotopie entre  $\eta \circ p$  et l'identité : Soit  $h : C(V, d)^* \rightarrow C(V, d)^{* - 1}$  l'opérateur défini, pour  $x \in V^{*-1}$ ,  $y \in V^*$  par  $h(x, y) = (0, x) \in V^{*-2} \oplus V^{*-1}$ . On étend  $h$  comme une dérivation à  $Sym(C(V), d)$  (en utilisant les conséquences du Lemme 5.1.8), que l'on note  $\tilde{h}$ . On vérifie alors que  $d\tilde{h} + \tilde{h}d = Id - \eta \circ p$ .

*Exercice 5.1.10.* Montrer la formule précédente.

*Notation 5.1.11.* On notera<sup>127</sup>  $E(V) := Sym(C(V), d)$ .

Tout morphisme de complexes  $f : V \rightarrow W$  induit un morphisme de complexes  $C(V) \rightarrow C(W)$  et donc un quasi-isomorphisme de cdga  $E(V) \rightarrow E(W)$ .

Soit maintenant  $A$  une cdga. On peut lui appliquer l'exemple 5.1.9 précédent pour construire l'algèbre libre acyclique  $E(A) := Sym(C(A), d)$ . On définit un morphisme d'algèbre graduée commutative  $\pi : E(A) \rightarrow A$  par sa restriction  $\pi|_{C(A)} : A^{*-1} \oplus A^* \rightarrow A^*$  donnée par la projection sur la deuxième variable :  $(x, y) \mapsto y$ . On obtient alors :

**Lemme 5.1.12.** Le morphisme d'algèbre graduée commutative  $\pi : E(A) \rightarrow A$  est un morphisme surjectif de cdgas.

Une autre notion très utile sera la suivante.

**Définition 5.1.13.** Une cdga *semi-libre* est une cdga dont la structure d'algèbre graduée commutative sous-jacente est libre.

Autrement dit c'est une algèbre de la forme  $(Sym(V), \partial)$  où  $V$  est un espace gradué et où  $\partial : Sym(V)^* \rightarrow Sym(V)^{*+1}$  est une dérivation de carré nul (mais qui n'est pas forcément induite par un morphisme de complexe de cochaines sous-jacent à  $V$ ). Il convient de bien faire la distinction entre les semi-libres et les algèbres libres.

*Remarque 5.1.14.* En particulier,  $\partial$  est donc uniquement déterminé par sa restriction  $\delta|_V : V \rightarrow Sym(V)$ . Toute application de ce genre détermine une dérivation, mais que  $\delta^2 = 0$  est une condition supplémentaire. Cette application  $\partial$  est donc donnée par la somme directe

$$\partial : \sum \partial_i \text{ où } \partial_i : V \rightarrow Sym^i(V) \subset V^{\otimes i}$$

La composante  $\partial_1 : V \rightarrow V$  définit une différentielle sur  $V$ , qu'on appelle la partie linéaire<sup>128</sup> de  $\partial$ .

De même un morphisme de cdga de  $(Sym(V), \partial)$  dans  $A$  est uniquement déterminé par sa restriction à  $V$ ; mais tout morphisme de ce genre ne sera pas forcément un morphisme de complexes de cochaines.

126. cela se ramène à montrer que  $Sym(C(\mathbb{Q}[-n]))$  est acyclique pour tout  $n \geq 0$

127. la notation est inspirée par l'espace contractile fonctoriel associé à un groupe topologique

128. Les puissances symétriques  $Sym((V, d))$  d'un complexe de cochaines sont exactement le cas où toutes les autres composantes  $\partial_{i \geq 2} = 0$



*Remarque 5.1.15 (Augmentation).* Une algèbre semi-libre est canoniquement augmentée : l'application  $V \mapsto 0$  définit un morphisme de cdgas  $(Sym(V), d) \rightarrow \mathbb{Q}$  qui est une rétraction de l'unité.

*Remarque 5.1.16.* La cohomologie d'une algèbre semi-libre n'est pas une algèbre symétrique en général.

*Exercice 5.1.17.* Soit  $V = \mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y$  où  $|x| = 2$  et  $|y| = 3$ . On muni  $Sym(V)$  de la dérivation donnée par  $d(x) = 0$  et  $d(y) = x^2$ . Démontrer que  $(Sym(V), d)$  est semi-libre et que sa cohomologie n'est pas libre.

On va voir que toute cdga est faiblement équivalente à une algèbre semi-libre.

## 5.2. STRUCTURE DE MODÈLE DES ALGÈBRES GRADUÉES DIFFÉRENTIELLES COMMUTATIVES ET ALGÈBRES DE SULLIVAN

L'existence d'une structure de modèles sur les cdgas dont les équivalences faibles sont les morphismes de cdgas qui sont des quasi-isomorphismes découle de résultats généraux sur les catégories de modèle que nous allons énoncer.

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire quelconque. Par la section 2.3, on dispose de (la restriction de) la structure projective sur  $Ch^{\geq 0}(R)$  (identifié avec  $Ch_{\leq 0}(R)$ ). Précisément, une équivalence faible de  $Ch^{\geq 0}(R)$  pour cette structure est un quasi-isomorphisme, une fibration est un morphisme de complexes surjectif en tout degré et les cofibrations sont les morphismes de  $Ch^{\geq 0}(R)$  qui ont la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations acycliques. Cette structure définit bien une structure de modèle similaire à celle de  $Ch_{\geq 0}(R)$  mais légèrement différente (du au fait que l'homologie en degré 0 dans ce dernier cas correspond à un quotient de toutes les 0-chaines par les bords, c'est à dire une colimite, alors que dans le cas  $Ch_{\leq 0}(R)$  l'homologie en degré 0 est donné par le noyau de la différentielle, c'est à dire une limite).

On note  $D^n(R)^* = 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots R \xrightarrow{id} R \rightarrow 0 \dots$  le complexe de cochaines concentré en degré  $n - 1$  et  $n$ , et  $S^n(R)^* = R[-n]$  le complexe de cochaines égal à  $R$  concentré en degré  $n$ ; de sorte que ces complexes correspondent à  $D_{-*}^n(R)$ ,  $S_{-*}^n(R)$  via l'isomorphisme  $Ch^{\geq 0}(R) \cong Ch_{\leq 0}(R)$ . On a donc un morphisme de cochaines canonique :  $S^n(R)^* \hookrightarrow D^n(R)^*$  donné par l'identité en degré  $n$ . On a la caractérisation suivante des fibrations :

**Lemme 5.2.1.** Un morphisme  $f : C^* \rightarrow D^*$  dans  $Ch^{\geq 0}(R)$  est

- une fibration si et seulement si, pour tout  $n \geq 1$ , il a la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes  $0 \rightarrow D^n(R)^*$ ;
- une fibration acyclique si et seulement si, il a la propriété de relèvement à droite, par rapport aux morphismes  $S^n(R)^* \hookrightarrow D^n(R)^*$ , pour tout  $n \geq 1$ , ainsi que par rapport au morphisme  $0 \rightarrow S^0(R)^*$ .

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle de la proposition 2.3.16.  $\square$

Armé du Lemme 5.2.1, nous pouvons appliqué l'argument du petit objet et le raisonnement du théorème 2.3.2 (et de toute la partie 2.3) pour démontrer :

**Proposition 5.2.2.** La structure projective sur les complexes de cochaines  $Ch^{\geq 0}(R)$  est une structure de modèle cofibrement engendrée dont les cofibrations génératrices

sont les  $(S^n(R)^* \hookrightarrow D^n(R)^*)_{n \geq 1} \coprod (0 \rightarrow S^0(R)^*)$  et les cofibrations acycliques génératrices sont les  $(0 \rightarrow D^n(R)^*)_{n \geq 1}$ .

Par ailleurs,

- (1) les cofibrations sont exactement les morphismes de complexes de cochaines injectifs en tout degré  $\geq 1$  et de conoyau projectif<sup>129</sup> en tout degré;
- (2) les cofibrations (resp. acycliques) sont aussi tous les morphismes de complexes qui sont des rétractes d'une colimite séquentielle<sup>130</sup> de poussés en avant de cofibrations de la forme  $S^n(R)^* \rightarrow D^n(R)^*$  ( $n \geq 1$ ) ou  $0 \rightarrow S^n(R)^*$  (resp.  $0 \rightarrow D^n(R)^*$ ,  $n \geq 1$ );
- (3) tout complexe de cochaîne dans  $CH^{\geq 0}(R)$  est fibrant<sup>131</sup>.

Nous avons vu que le foncteur oubli de la structure d'algèbre d'une cdga vers son complexe sous-adjacent définit une adjonction. Un résultat de Quillen permet de relever une structure de modèle cofibrement engendrée le long d'une adjonction vérifiant certaines propriétés. Cela permet, souvent, en pratique de construire une structure de modèle.

Le résultat suivant donne un moyen d'induire une structure de modèle à partir d'une adjonction partant d'une catégorie cofibrement engendrée (qui est la source de l'adjoint à gauche).

Précisément, *soit  $\mathbf{D}$  une catégorie de modèle cofibrement engendrée. On note  $\mathcal{J}$  (resp.  $\mathcal{J}_{ac}$ ) les cofibrations (resp. cofibrations acycliques) génératrices. On suppose que les domaines des cofibrations et cofibrations acycliques sont  $\kappa$ -petits où  $\kappa$  est un ordinal.*

Soit  $F : \mathbf{D} \rightleftarrows \mathbf{C} : U$  une adjonction (où  $U$  est donc l'adjoint à droite). On définit sur  $\mathbf{D}$  une structure induite<sup>132</sup> en définissant  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\mathbf{C}$  comme étant une équivalence faible (respectivement une fibration) si et seulement si  $U(f)$  est une équivalence faible (resp. fibration) dans  $\mathbf{D}$ . On définit (comme d'habitude) les cofibrations comme étant les flèches ayant les propriétés de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques.

**Théorème 5.2.3** (Quillen). Supposons que  $\mathbf{C}$  soit complète et cocomplète et que l'adjonction vérifie que

(1): l'adjoint à droite  $U$  préserve les colimites  $\kappa$ -séquentielles,

et l'une des deux hypothèses suivantes :

(2): tout morphisme de  $\mathbf{C}$  qui a la propriété de relèvement par rapport à toutes les fibrations est une équivalence faible,

(2'): tout morphisme  $F(\mathcal{J}_{ac})$ -cellulaire est une équivalence faible.

alors la structure induite fait de  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle cofibrement engendrée et de plus l'adjonction  $F : \mathbf{D} \rightleftarrows \mathbf{C} : U$  est de Quillen. Les cofibrations et cofibrations acycliques génératrices de  $\mathbf{C}$  sont respectivement données par  $F(\mathcal{J})$ ,  $F(\mathcal{J}_{ac})$  et leurs domaines sont encore  $\kappa$ -petits.

129. sur un corps, par exemple sur  $\mathbb{Q}$  comme nous le serons dans la suite de ce chapitre, cette condition est toujours vérifiée

130. c'est à dire une colimite de la forme  $X_0 \rightarrow \dots X_i \rightarrow X_{i+1} \rightarrow \dots$

131. et cofibrant sur un corps comme  $\mathbb{Q}$

132. qu'on pourrait appeler projective par analogie avec celle sur les complexes de chaines ou les catégories de diagramme

Comme nous allons le voir ci-dessous, l'idée de la preuve est d'utiliser l'argument du petit objet à partir des familles  $F(\mathcal{J})$  et  $F(\mathcal{J}_{ac})$ . L'hypothèse (1) permet justement de faire cela en garantissant la petitesse des domaines des flèches. Les hypothèses (2) ou (2')<sup>133</sup> permettent de garantir que tout cofibration acyclique est un rétracte d'une  $F(\mathcal{J}_{ac})$ -cellulaire.

Dans le cas qui nous intéresse où  $\mathbf{D}$  est la catégorie des complexes de (co)chaînes on a le corollaire suivant.

**Corollaire 5.2.4** (Hinich). Si  $\mathbf{D} = Ch(R)$ ,  $\mathbf{D} = Ch^{\geq 0}(R)$  ou  $\mathbf{D} = Ch_{\geq 0}(R)$  munie de la structure de modèle projective, que  $\mathbf{C}$  est complète et cocomplète et que l'adjonction vérifie les hypothèses

- (1): l'adjoint à droite  $U$  préserve les colimites  $(\mathbb{N})$ -séquentielles,
- (2'): pour tout objet  $A \in \mathbf{C}$ , on a que la flèche canonique  $U(A \rightarrow A \coprod F(D^n(R)^*))$  est un quasi-isomorphisme,

alors la structure induite fait de  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle cofibrement engendrée, l'adjonction est de Quillen et les cofibrations et cofibrations acycliques génératrices de  $\mathbf{C}$  sont respectivement données par  $F(\mathcal{J})$ ,  $F(\mathcal{J}_{ac})$  (dont les domaines sont  $\mathbb{N}$ -petits).

*Démonstration.* Les domaines des cofibrations acycliques (resp. cofibrations) des complexes de (co)chaînes sont 0 (resp.  $S^n(R)$  ou 0) qui sont compacts, en particulier  $\mathbb{N}$ -petits. Il suit que la condition (2') du théorème 5.2.3 est équivalente à celle de l'énoncé du corollaire et donc le résultat découle du théorème 5.2.3.  $\square$

*Remarque 5.2.5.* En particulier, dans le cas de  $\mathbf{D} = CH^{\geq 0}(R)$ , les cofibrations (resp. acycliques) sont exactement les morphismes qui sont des rétractes d'une colimite de poussés en avant de cofibrations de la forme  $F(S^n(R)^*) \rightarrow F(D^n(R)^*)$  ou  $F(0) \rightarrow F(S^0(R)^*)$  (resp.  $(F(0) \rightarrow F(D^n(R)^*))$ ).

*Démonstration du théorème 5.2.3.* Remarquons que le fait que l'adjonction soit de Quillen découle immédiatement du fait que  $U$  préserve les fibrations et les fibrations acycliques (puisque'il préserve aussi les équivalences faibles) et donc qu'il est de Quillen à droite. Le lemme 2.5.5 assurera donc que l'adjonction est de Quillen une fois prouvé que la structure est de modèle.

L'axiome (MC1) est contenu dans l'énoncé. Comme  $U$  est un foncteur et que l'axiome (MC2) est vrai dans  $\mathbf{D}$ , il est vrai pour  $\mathbf{C}$ . Le même argument assure la stabilité par rétracte des équivalences faibles et fibrations de  $\mathbf{C}$ . Comme les morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport à une classe de morphisme sont stables par rétracte (cf la preuve de la proposition 2.1.13), il en est de même des cofibrations de  $\mathbf{C}$ . Enfin, la moitié de (MC4) est prouvée par définition.

Le reste de la preuve va consister à regarder les propriétés de l'image par  $F$  des cofibrations et cofibrations acycliques génératrices. On commence par remarquer la propriété suivante.

**Sous-Lemme 5.2.6.** Un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\mathbf{C}$  est une fibration (resp. fibration acyclique) si et seulement si il a la propriété de relèvement à droite par rapport à la classe  $F(\mathcal{J}_{ac})$  (resp.  $F(\mathcal{J})$ ).

<sup>133</sup> elles sont évidemment équivalentes une fois prouvé le théorème puisque les  $F(\mathcal{J}_{ac})$  sont génératrices. Selon les cas l'un est plus facile que l'autre à prouver

*Preuve du sous-lemme.* De l'adjonction découle qu'un carré commutatif (resp. et un relèvement  $h$  dans ce carré)

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ F(B) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est équivalent à un carré commutatif (resp. et un relèvement  $\phi(h)$  dans ce carré)

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & U(X) \\ \downarrow \phi(h) & \nearrow & \downarrow U(f) \\ B & \longrightarrow & U(Y) \end{array}$$

Comme les fibrations (resp. acycliques) de  $\mathcal{D}$  sont exactement celles telles que  $U(f)$  soit une fibration (resp. acycliques) de  $\mathbf{D}$ , le résultat découle du fait que  $\mathbf{D}$  est cofibrement engendré.  $\square$

Le sous-lemme implique immédiatement que  $F(\mathfrak{J})$ ,  $F(\mathcal{J}_{ac})$  seront les cofibrations et cofibrations acycliques génératrices une fois qu'on aura prouvé que la structure est de modèle.

Par ailleurs il suffira de prouver la petitesse des domaines des morphismes de  $F(\mathfrak{J})$  et  $F(\mathcal{J}_{ac})$  pour vérifier que la structure est cofibrement engendrée. Vérifions cela : Soit  $A \rightarrowtail B$  une cofibration génératrice de  $\mathbf{D}$ . Alors pour tout colimite séquentielle  $\text{colim}_{k \in \kappa} X_k$  dans  $\mathbf{C}$ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{colim}_{k \in \kappa} (\text{Hom}_{\mathbf{C}}(F(A), X_k)) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(F(A), \text{colim}_{k \in \kappa} X_k) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{colim}_{k \in \kappa} (\text{Hom}_{\mathbf{D}}(A, U(X_k))) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, U(\text{colim}_{k \in \kappa} X_k)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, \text{colim}_{k \in \kappa} U(X_k)) \end{array}$$

où les bijections verticales sont données par l'adjonction et les flèches horizontales sont les flèches canoniques et l'équivalence donnée par l'hypothèse (1). Comme  $\mathbf{D}$  est cofibrement engendré la première flèche horizontale du bas est aussi une bijection puisque  $A$  est  $\kappa$ -petit et que le sous-lemme et le fait que  $\mathbf{D}$  est cofibrement engendré et donc les  $U(X_k)$  sont des rétractes de  $\mathfrak{J}$ -cellulaires. Ainsi l'application horizontale du haut est une bijection.

Finalement on a plus qu'à montrer les propriétés de factorisation et la dernière partie de (MC4). On montre d'abord les propriétés de factorisation et on va les utiliser pour (MC4) (comme il est souvent pratique de faire pour les catégories cofibrement engendrées). On commence par remarquer :

**Sous-Lemme 5.2.7.** Les rétractes de morphismes  $F(\mathfrak{J})$ -cellulaires (resp.  $F(\mathcal{J}_{ac})$ -cellulaires) ont la propriété de relèvement par rapport aux fibrations acycliques (resp. fibrations) de  $\mathbf{C}$ . De plus tout rétracte d'un morphisme  $F(\mathcal{J}_{ac})$ -cellulaire est une équivalence faible de  $\mathbf{C}$ .

*Démonstration du sous-lemme.* La première assertion découle du sous-lemme 5.2.6 par stabilité par composition, rétractes et poussés-en-avant des morphismes ayant des propriétés de relèvement à gauche par rapport à une classe de morphismes. Pour

la deuxième, on a que les hypothèses (2) ou (2') montre que si  $\beta_j : U_j \rightarrow V_j \in \mathcal{J}_{ac}$  est une cofibration acyclique génératrice, alors pour tout objet  $A \in \mathbf{C}$ , on a qu'un poussé en avant  $A \rightarrow A \coprod_{F(U_j)} F(V_j)$  est une équivalence faible de  $\mathbf{C}$ . Ce qui assure que c'est le cas pour tout rétracte d'une  $\mathcal{J}_{ac}$ -cellulaire par le raisonnement précédent (ou en appliquant (2) directement si cette hypothèse était déjà vérifiée).  $\square$

Puisque les domaines de  $F(\mathcal{J}_{ac})$  sont  $\kappa$ -petits comme on vient de le voir, on peut leur appliquer l'argument du petit objet (Section 2.3 et Proposition 2.3.22). Ceci assure que tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  a une factorisation fonctorielle  $f : X \rightarrow C_f \rightarrow Y$  où  $C_f \rightarrow Y$  a la propriété de relèvement par rapport à l'ensemble  $F(\mathcal{J}_{ac})$  donc est une fibration et  $X \rightarrow C_f$  est  $F(\mathcal{J}_{ac})$  cellulaire donc est une cofibration et est acyclique en vertu du sous-lemme 5.2.7. Cela termine de montrer la première factorisation. La deuxième est similaire en utilisant l'argument du petit objet pour la famille  $F(\mathcal{J})$ .

Il reste à démontrer que tout cofibration  $i : A \rightarrow B$  qui est une équivalence faible dans  $\mathbf{C}$  a la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations. Pour cela il suffit de montrer que c'est un rétracte d'un morphisme qui a cette propriété. On utilise la première factorisation : pour obtenir  $i : A \rightarrow C_i \rightarrow B$  où comme on l'a vu  $A \rightarrow C_i$  est  $F(\mathcal{J}_{ac})$ -cellulaire. En particulier a la propriété de relèvement demandé. On a de plus vu qu'elle est une équivalence faible et comme  $i$  aussi, on en déduit que la fibration  $C_i \rightarrow B$  est en fait une fibration acyclique<sup>134</sup>. Ainsi, comme  $i : A \rightarrow B$  est une cofibration, on a un relèvement dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C_i \\ i \downarrow & \nearrow s & \downarrow r \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

qui donne que  $A \rightarrow B$  est un rétracte de  $A \rightarrow C_i$ .  $\square$

On dispose de l'adjonction  $Ch^{\geq 0}(\mathbb{Q}) \xrightleftharpoons[U]{Sym(-)} \mathbf{CDGA}$  du Lemme 5.1.8 où  $U$  est l'oubli de la multiplication.

**Corollaire 5.2.8.** La structure induite par  $Ch^{\geq 0}(\mathbb{Q})$  sur  $\mathbf{CDGA}$  est une structure de modèle cofibrement engendrée et l'adjonction est de Quillen.

Puisque c'est le cas dans  $Ch^{\geq 0}(\mathbb{Q})$ , les fibrations sont les morphismes de cdgas qui sont surjectifs en tout degré. En particulier, toutes les cdgas sont *fibrantes*.

*Remarque 5.2.9.* La même preuve assure que les cdgas  $\mathbb{Z}$ -graduée ou concentrées en degrés négatifs ou nul ont une structure de modèles cofibrement engendrée.

Notons par ailleurs que ce corollaire s'applique à toute catégorie de  $\mathcal{O}$ -algèbre différentielle graduée où  $\mathcal{O}$  est une opérade algébrique. En particulier cela s'applique par exemple aux algèbres différentielles graduées associatives, aux algèbres de Lie différentielles graduées etc...

Le résultat reste par ailleurs valide sur tout corps de caractéristique nulle. En revanche, le résultat n'est *pas* vrai en caractéristique non-nulle pour les cdgas (c'est essentiellement lié au défaut de  $Sym(-)$  à être exact).

134. l'hypothèse (2) ou (2') a pour seul but de garantir ce résultat

*Remarque 5.2.10.* Du Corollaire 5.2.4 et de la preuve ci-dessous découle aussi que les cofibrations génératrices sont les  $(Sym(S^n(\mathbb{Q})^*) \rightarrow Sym(D^n(\mathbb{Q})^*))_{n \geq 1}$   $\coprod$   $(\mathbb{Q} \hookrightarrow Sym(S^0(\mathbb{Q})^*) \cong \mathbb{Q}[t])$  et les cofibrations acycliques génératrices sont les  $(\mathbb{Q} \hookrightarrow Sym(D^n(\mathbb{Q})^*))_{n \geq 1}$ . Toute cofibration (resp. acyclique) est un rétract d'une composition de poussés-en-avant de cofibration génératrice (resp. acyclique génératrice).

*Démonstration du Corollaire 5.2.8.* Il suffit de vérifier les hypothèses (1'), (2') du corollaire 5.2.4. La première découle du fait qu'une colimite séquentielle (ou toute colimite filtrante en fait) calculé dans les complexes de (co)chaînes (comme une réunion donc) de morphismes de cdgas a canoniquement une structure de cdga qui factorise toute famille compatibles de morphismes de cdgas issus des composantes de la colimite (en revanche  $U$  ne commute pas du tout avec des colimites arbitraires, par exemple *pas* avec les coproduits).

Pour la deuxième, on doit démontrer que  $A \xrightarrow{id_A \otimes \eta} A \otimes Sym(D^n(\mathbb{Q})^*)$  est un quasi-isomorphisme. Comme  $D^n(\mathbb{Q})^* = C(\mathbb{Q}[-n])$  le résultat découle de la formule de Künneth et de l'exemple 5.1.9.  $\square$

*Remarque 5.2.11.* Notons que l'on peut aussi directement montrer (2) (du théorème 5.2.3), ce qui peut être instructif car l'idée peut s'appliquer même dans des cas non-linéaires. En effet, si  $f : A^* \rightarrow B^*$  a la propriété de relèvement par rapport à tous les morphismes de cdga qui sont surjectif en tout degré, on utilise le lemme 5.1.12 qui nous donne un relèvement dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^* & \xrightarrow{id_A \otimes \eta} & A^* \otimes E(B^*) \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \cdot \pi \\ B^* & \xrightarrow{id} & B^* \end{array}$$

On en déduit alors que  $f$  est un rétracte  $A^* \xrightarrow{id} A^* \xrightarrow{id \otimes \eta} A^* \otimes E(B^*) \xrightarrow{f \cdot \pi} B^*$  de  $id \otimes \eta$  qui

$$\begin{array}{ccccc} A^* & \xrightarrow{id} & A^* & \xrightarrow{id \otimes \eta} & A^* \otimes E(B^*) & \xrightarrow{f \cdot \pi} & B^* \\ f \downarrow & & \downarrow id \otimes \eta & & \downarrow f \cdot \pi & & \\ B^* & \xrightarrow{id} & B^* & \xrightarrow{id \otimes \eta} & B^* \otimes E(B^*) & \xrightarrow{f \cdot \pi} & B^* \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme puisque  $\eta : \mathbb{Q} \rightarrow E(B^*)$  l'est (Exemple 5.1.9). L'idée (qui s'applique de manière assez générale et peut s'obtenir parfois en utilisant l'argument du petit objet) ici a donc été de factoriser  $f$  sous la forme  $f : A \xrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow B$  pour montrer se ramener à un rétracte de  $A \xrightarrow{\sim} P$ .

Pour obtenir et étudier de bons remplacements cofibrants, on introduit la terminologie suivante qui sera cruciale pour faire des calculs efficaces en homotopie rationnelle.

**Définition 5.2.12** (Algèbre de Sullivan, relatives et minimales).

- Une *algèbre de Sullivan* est une algèbre semi-libre  $(Sym(V^*), d)$  où  $V^*$  se décompose<sup>135</sup> en somme directe de sous espaces gradués

$$V^* = \bigoplus_{n \geq 0} V_n^*$$

<sup>135.</sup> autrement dit on rajoute une graduation supplémentaire à chaque  $V^n$  de sorte que  $V^*$  devienne bigradué

telle que, en notant  $V^*(n) = \bigoplus_{k \leq n} V_k^n$ , on a

$$d(V(0)^*) = 0, \quad \text{et} \quad d(V^*(n)) \subset \text{Sym}(V(n-1)^*) \quad (n \geq 1).$$

- Une algèbre de Sullivan est *minimale*, si dans la décomposition on a de plus que les éléments de  $V_j^*$  sont en degré inférieur à celui des éléments non-nuls de  $V_{k>j}^*$ .
- Une algèbre de Sullivan *relative* est l'inclusion canonique  $A \xrightarrow{id \otimes 1} (A \otimes \text{Sym}(V^*), d)$  d'une cdga  $A$  telle que  $V^*$  est munie d'une décomposition comme dans le cas d'une algèbre de Sullivan telle que

$$d(V(0)^*) \subset A, \quad \text{et} \quad d(V^*(n)) \subset A \otimes \text{Sym}(V(n-1)^*) \quad (n \geq 1).$$

- Une algèbre de Sullivan *relative est minimale* si on a la même condition sur les degrés que pour une algèbre de Sullivan minimale.

On notera que les algèbres de Sullivan (éventuellement minimales) sont des algèbres relatives (évent. minimale) où  $A = \mathbb{Q}$ <sup>136</sup>. Comme on travaille sur un corps, toute filtration de  $\mathbb{Q}$ -espace se décompose et on peut donc aussi définir les algèbres de Sullivan par la donnée d'une filtration.

Une condition pratique pour vérifier qu'une algèbre de Sullivan est minimale est la suivante :

**Lemme 5.2.13.** Soit une algèbre de Sullivan  $(\text{Sym}(V^*), d)$  vérifiant  $V^0 = 0$ . Alors  $(\text{Sym}(V^*), d)$  est minimale si et seulement si  $d(V^*(k)) \subset \text{Sym}^{\geq 2}(V^*(k-1))$ <sup>137</sup>.

*Remarque 5.2.14.* Si  $V^*$  est concentré en degré  $\geq 2$ , alors on peut montrer qu'une algèbre semi-libre est de Sullivan minimale si et seulement si  $d(V^*) \subset \text{Sym}^{\geq 2}(V^*)$  et qu'une inclusion  $A \hookrightarrow A \otimes \text{Sym}(V^*)$  est de Sullivan relative minimale si et seulement si  $d(V^*) \subset A^{>0} \otimes \text{Sym}^{>0}(V^*) + A \otimes \text{Sym}^{\geq 2}(V^*)$ . Ceci découle du lemme et du fait que l'on peut voir aussi que si  $V^*$  est concentré en degré  $\geq 2$ , alors toute algèbre semi-libre  $(\text{Sym}(V^*), d)$  est de Sullivan ; il suffit de prendre comme graduation supplémentaire celle qui est en fait déjà donnée par le degré de  $V^*$  en tant que module gradué.

*Exemple 5.2.15.*  $\text{Sym}(D^n(\mathbb{Q})^*)$  et  $\text{Sym}(S^n(\mathbb{Q})^*)$  sont des algèbres de Sullivan. La deuxième est évidemment minimale mais pas la première. Par ailleurs l'inclusion  $\text{Sym}(S^n(\mathbb{Q})^*) \hookrightarrow \text{Sym}(D^n(\mathbb{Q})^*)$  est une algèbre de Sullivan relative minimale.

De même, les algèbres  $E(A^*)$  (Exemple 5.1.9) sont de Sullivan (et pas minimales en général).

*Exemple 5.2.16.* Soit  $\text{Sym}(\mathbb{Q} \langle x, y, z \rangle)$  la dg-algèbre avec  $x, y, z$  en degrés 1 et la différentielle donnée par  $d(x) = yz$ ,  $d(y) = zx$ ,  $d(z) = xy$ . Cette algèbre est semi-libre mais n'est pas de Sullivan.

Le lien entre les algèbres de Sullivan et la structure de modèle est le suivant.

**Lemme 5.2.17.** Les algèbres cofibrantes sont les rétractes d'algèbres de Sullivan, les cofibrations sont des rétractes d'algèbres de Sullivan relatives.

<sup>136.</sup> comme  $\mathbb{Q}$  est concentré en degré 0, on pourra remarquer qu'aucun élément de  $\mathbb{Q}$  n'est un bord

<sup>137.</sup> c'est à dire que la différentielle est décomposable

*Démonstration.* C'est un corollaire de l'argument du petit objet. Plus précisément, les cofibrations génératrices sont de Sullivan relatives d'où on déduit que les  $\mathcal{F}$ -cellulaires sont aussi de Sullivan relatives en utilisant comme degré externe celui induit par le nombre de composition dans l'argument du petit objet. À partir d'une algèbre de Sullivan relative, on construit la décomposition en exprimant déjà  $A \otimes \text{Sym}(V(0)^*)$  comme un poussé en avant à partir des cofibrations génératrices en utilisant que  $\text{Sym}(V) \cong \bigotimes_{i \in B} \text{Sym}(\mathbb{Q}x_i)$  (où  $B$  est une base de vecteurs homogènes de  $V$ ) puis en faisant des compositions degré par degré pour reconstruire tous les  $\text{Sym}(V(n)^*)$ . En étudiant l'argument du petit objet de manière précise dans le cadre des cdgas, on peut montrer que les algèbres cofibrantes sont précisément celles de Sullivan et que les cofibrations sont les rétractes d'algèbres de Sullivan relatives.  $\square$

*Remarque 5.2.18.* On peut montrer que si une algèbre cofibrante est connexe, alors c'est une algèbre de Sullivan (autrement dit, dans ce cas là, tout rétracte d'une algèbre de Sullivan est de Sullivan).

**Définition 5.2.19** (Modèle de Sullivan). Un modèle de Sullivan (resp. minimal) d'une cdga est une équivalence faible de cdga  $(\text{Sym}(V), d) \xrightarrow{\sim} A$  où  $(\text{Sym}(V), d)$  est de Sullivan (resp. minimale).

*Remarque 5.2.20.* La différence avec un remplacement cofibrant est qu'on ne suppose pas nécessairement que le morphisme est une fibration. Évidemment, on peut toujours se ramener à une fibration par remplacement cofibrant. Mais on peut aussi plus simplement utiliser l'astuce suivante : si  $f : (\text{Sym}(V), d) \xrightarrow{\sim} A$  est un modèle de Sullivan, alors

$$(\text{Sym}(V), d) \otimes E(A) \xrightarrow{f \cdot \pi} A$$

est un modèle de Sullivan surjectif en tout degré d'après l'exemple 5.2.15. En revanche, on ne peut *pas* imposer qu'un modèle de Sullivan minimal soit une fibration en général.

Nous verrons en revanche que les algèbres minimales ont des propriétés particulières qui rendent l'étude du type d'homotopie d'une cdga très agréable (cf Proposition 5.2.26 ou le Lemme 5.3.9).

Étant donné que notre principale motivation pour étudier les cdgas provient des cochaines associées à un espace topologique (non-vide) ou ensemble simplicial, nous allons maintenant nous focaliser sur les cdgas connexes :

**Définition 5.2.21.** Une cdga est dite *connexe* si  $H^0(A) \cong \mathbb{Q}$  (l'isomorphisme étant alors nécessairement induit par l'unité).

Une cdga est dite *augmentée* si elle est munie d'un morphisme de cdga  $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{Q}$  qui est une section de l'unité :  $\varepsilon \circ \eta = \text{id}$ . On notera  $A^+ := \ker(\varepsilon)$  l'idéal d'augmentation de  $A$  ; il est en particulier stable par la différentielle.

En effet, pour tout espace topologique ou ensemble simplicial, on a que  $C^*(X) \cong \prod C^*(X_\alpha)$  (et de même pour les formes polyédrales<sup>138</sup> de la section 5.4 ou la cohomologie) où le produit se fait sur toutes les composantes connexes par arcs de  $X$ . En particulier, on est ramené à étudier des cdgas connexes. Par ailleurs les cochaines d'un espace topologique (à l'exception du vide) sont augmentée par le choix de n'importe quelle point base  $C^*(X) \xrightarrow{(\ast \mapsto x)^*} C^*(\{*\}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$ .

138. la démonstration est la même que pour la cohomologie singulière



*Remarque 5.2.22.* Pour les algèbres connexes, le lemme 5.2.13 sera crucial pour reconnaître les algèbres minimales. Et par ailleurs, en vertu du lemme 5.2.27 et de la proposition 5.2.29, on peut toujours supposer qu'un modèle de Sullivan  $Sym(V^*)$  d'une algèbre connexe vérifie  $V^0 = 0$ .

Enfin toute algèbre semi-libre est augmentée (via l'application canonique  $V \mapsto 0$  car  $\mathbb{Q} = Sym(V)$ ) et son idéal d'augmentation est  $Sym^{>0}(V^*)$ .

*Remarque 5.2.23 (Morphismes entre algèbres de Sullivan).* Un morphisme de cdgas  $f : (Sym(V), d) \rightarrow (Sym(W), d)$  entre algèbres semi-libres est uniquement déterminé par les restrictions  $f_i : V \rightarrow Sym^i(W)$  (cf le Lemme 5.1.8). Si  $V^0 = 0$ , on a nécessairement  $f_0 = 0$ . On appelle  $f_1 : V \rightarrow W$  la partie linéaire de  $f$ . De même, les différentielles (dans le cas connexe ou pas) sont données par les  $d_i : V \rightarrow Sym^i(V)$  (avec  $i > 0$ ). Il est clair que  $d_1$  est une différentielle, qui est nulle si de plus les algèbres sont minimales.

Comme  $f$  est un morphisme de cdgas, on le morphisme induit :

$$f_1 : (V, d_1) \longrightarrow (W, d_1)$$

est un morphisme de complexes de cochaines.

*Définition 5.2.24 (Complexe des indécomposables).* Si  $A$  est une cdga augmentée, on note  $Q(A) := A^+/A^+ \cdot A^+$  les indécomposables (c'est à dire le quotient de l'idéal d'augmentation par les produits non triviaux). La différentielle  $d$  de  $A$  passe au quotient (par propriété de Leibniz) et on note

$$\pi_n(A, d) := H^n(Q(A), d).$$

En particulier, si  $A$  est semi-libre on a que  $(Q(A), d) \cong (V^*, d_1)$  puisque seule la partie linéaire  $d_1$  de la différentielle survit dans le quotient. Le lemme 5.2.13 nous donne alors que

*Lemme 5.2.25.* Si  $A = (Sym(V^*), d)$  est une algèbre de Sullivan minimale connexe, alors pour tout  $n$  on a  $\pi_n(Sym(V), d) = V^n$ .

**Proposition 5.2.26.** Soit  $f : (Sym(V), d) \rightarrow (Sym(W), d)$  un morphisme entre algèbres de Sullivan avec  $V^0 = W^0 = 0$ .

- On a que  $f$  est un quasi-isomorphisme si et seulement si  $f_1 : (V, d_1) \longrightarrow (W, d_1)$  est un quasi-isomorphisme.
- Si les algèbres sont de plus minimales, alors  $f$  est un quasi-isomorphisme si et seulement si  $f_1$  est un isomorphisme si et seulement si  $f$  est un isomorphisme.

La proposition énonce une propriété clé et fortement utile des algèbres minimales : un morphisme entre cdgas minimales connexes est un quasi-isomorphisme si et seulement si c'est un isomorphisme.

*Démonstration.* Si  $f$  est un quasi-isomorphisme entre algèbres de Sullivan alors c'est une équivalence d'homotopie par le corollaire 5.3.5. Il suit alors du lemme 5.3.7 que  $Q(f) = f_1$  est un quasi-isomorphisme. La réciproque se fait en filtrant  $Sym^+(V)$  et  $Sym^+(W)$  par le degré des puissances symétriques. La suite spectrale associée (cf [20]) converge vers  $Sym(V)$  et la différentielle sur sa première page est exactement  $d_1$ . On obtient alors que l'on a un isomorphisme au niveau de cette page et donc sur la cohomologie globale.

Dans le cas minimal, on a que  $d_1 = 0$ , donc  $f_1$  est un quasi-isomorphisme, si et seulement si c'est un isomorphisme et le premier point donne déjà la première

équivalence. Par ailleurs si  $f_1$  est un isomorphisme, alors  $f$  est un isomorphisme comme il découle du lemme des 5 et de la longue suite exacte en homologie associée à la suite exacte courte  $A^+ \cdot A^+ \hookrightarrow A^+ \rightarrow Q(A)$  quand  $A$  est de Sullivan. Enfin si  $f$  est un isomorphisme, c'est un quasi-isomorphisme ce qui permet de conclure pour la dernière implication.  $\square$

La remarque 5.2.20 et le lemme suivant permette de passer librement d'un modèle de Sullivan surjectif (donc une fibration) à un modèle de Sullivan minimal (qui ne donne en général pas lieu à une fibration, mais est unique à isomorphisme non-naturel près).

**Lemme 5.2.27.** Une algèbre de Sullivan connexe est *isomorphe* en tant que cdga au produit tensoriel<sup>139</sup>

$$(Sym(V), d) \cong (Sym(W), D) \otimes E(U)$$

d'une algèbre de Sullivan minimale  $(Sym(W), D)$  avec  $W^0 = 0$  et d'une algèbre de Sullivan acyclique  $E(U)$ . De même une algèbre de Sullivan relative (entre algèbres connexes) s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes (Sym(V), d) & \xrightarrow{\cong} & A \otimes (Sym(W), D) \otimes E(U) \\ & \nwarrow id \otimes 1 \quad \nearrow id \otimes 1 & \\ & A & \end{array}$$

La partie minimale est unique à isomorphisme près.

*Démonstration.* L'unicité découle de l'unicité du modèle minimal, voir la proposition 5.2.26 or 5.2.29 ci-dessous pour le cas relatif. Nous ne traitons que le cas absolu ; l'autre est similaire en travaillant dans la catégorie des algèbres dans les  $A$ -modules.

La différentielle  $d : V \rightarrow Sym(V)$  de  $V$  s'écrit (cf remarque 5.1.14) sous la forme  $d_1 + d_+$  où  $d_1 : V \rightarrow V$  est la partie linéaire et  $d_+(V) \subset$  est la partie décomposable ;  $d_1$  est une différentielle sur  $V^*$ . Le lemme 5.2.13 identifie les minimales avec celles telles que  $d_1 = 0$ . Donc si  $d_1 = 0$ , l'algèbre est déjà minimale. Sinon soit une décomposition de  $V^* = H^* \oplus B^* \oplus A^*$  telle que  $B^* = d_1(V^*)$  sont les bords de  $d_1$  et  $H^* \oplus B^* = \ker(d_1)$ . En particulier  $H^* \cong H^*(V^*, d_1)$  est la cohomologie de  $V^*$  par rapport à  $d_1$  et  $d_1$  envoie bijectivement  $A^*$  sur  $B^*$ . Cette décomposition existe car  $\mathbb{Q}$  est un corps et que l'on peut donc décomposer les cocycles sous la forme donnée. L'algèbre semi-libre  $Sym(A \xrightarrow{d_1} B)$  est contractile (et isomorphe à un  $E(U)$  par construction). Par construction on a un morphisme de complexes :  $A \hookrightarrow V$  qui induit un morphisme de cdgas  $Sym(A \xrightarrow{d_1} B) \rightarrow (Sym(V), d)$  (simplement en envoyant  $A$  sur  $A$  et  $B$  sur l'image par  $d$  (dans  $Sym(V)$ ) de  $A$ ). On note  $E(U)$  l'image de  $Sym(A \xrightarrow{d_1} B)$  que l'on identifie avec son image dans  $Sym(V)$ . Autrement dit on s'est ramené au cas où la différentielle de  $V$  sur  $E(U)$  est simplement linéaire induite par  $d_1 : A \rightarrow B$  et on travaille (en abusant les notations) dans ce cadre. Le quotient de l'algèbre sous-jacente  $Sym(V)$  par l'idéal engendré par  $Sym(A \xrightarrow{d_1} B)$  est une algèbre commutative libre (isomorphe à  $Sym(H^*)$ ) et minimale. Le morphisme quotient  $p : Sym(V^*) \rightarrow Sym(H^*)$  est un quasi-isomorphisme par le Théorème de Künneth appliqué à  $Q(Sym(V)) \rightarrow Q(Sym(H^*))$  et la proposition 5.2.26. Le Corollaire 5.3.5

139. qui est le coproduit dans la catégorie **CDGA**

nous donne un quasi-isomorphisme inverse  $g : \text{Sym}(H^*) \rightarrow \text{Sym}(V^*)$ . En particulier,  $p \circ g$  est un quasi-isomorphisme donc un isomorphisme par la proposition 5.2.26. Il suit que

$$g \otimes id : \text{Sym}(H^*) \otimes E(U) \rightarrow \text{Sym}(V) \otimes \text{Sym}(V) \rightarrow \text{Sym}(V)$$

est un isomorphisme d'algèbres puisque c'est un morphisme entre algèbres semi-libre qui est un isomorphisme au niveau des générateurs.  $\square$

Les notions de modèle de Sullivan s'étendent sans difficulté aux morphismes.

**Définition 5.2.28 (Modèles de Sullivan d'un morphisme).** Soit  $f : A \rightarrow B$  d'algèbres graduées différentielles commutatives.

- Un modèle de Sullivan relatif de  $f$  est une factorisation de  $f$  sous la forme

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \curvearrowright & \\ B & \xrightarrow{i} B \otimes \text{Sym}(V) \xrightarrow{\sim} & C \end{array}$$

où  $i$  est une algèbre de Sullivan relative.

- Un modèle de Sullivan relatif minimal de  $f$  est une factorisation comme la précédent où  $i$  est de Sullivan relative minimale.

**Proposition 5.2.29.** Tout morphisme de cdgas  $f : A \rightarrow B$  admet un modèle de Sullivan relatif.

De plus :

- si  $A$  et  $B$  sont connexes, alors  $f$  admet un modèle de Sullivan relatif *minimal* :  $A \hookrightarrow A \otimes \text{Sym}(V^*) \xrightarrow{\sim} B$  vérifiant  $V^0 = 0$ .
- Un modèle de Sullivan relatif minimal de  $f$  est *unique* à isomorphisme (non-canonique) près.
- En particulier, toute cdga connexe  $A$  admet un modèle de Sullivan minimal vérifiant  $V^0 = 0$  qui est unique à isomorphisme (non-naturel) près.

*Démonstration.* La structure de modèle cofibrement engendrée des cdgas assure (via l'axiome (MC5) et l'argument du petit objet) que tout morphisme admet un modèle de Sullivan relatif.

Le lemme 5.2.27 assure que dans le cas connexe, on peut décomposer sous la forme  $A \hookrightarrow A \otimes \text{Sym}(V^*) \cong A \hookrightarrow A \otimes \text{Sym}(W^*) \otimes E(U)$  avec  $W^0 = 0$ . Le morphisme d'espaces vectoriels graduée  $U \mapsto 0$  induit un morphisme de cdgas  $E(U) \rightarrow \mathbb{Q}$  qui est une section de l'unité  $\eta : \mathbb{Q} \rightarrow E(U)$ , en particulier un quasi-isomorphisme car  $\eta$  l'est. Le morphisme  $A \hookrightarrow \text{Sym}(W^*) \otimes E(U) \rightarrow \text{Sym}(W^*)$  induit est une algèbre de Sullivan relative minimale.

L'unicité découle immédiatement du lemme 5.3.10 ci-dessous appliqué au morphisme :  $f = id : A \rightarrow A$ .  $\square$

*Remarque 5.2.30.* La structure de modèle (et l'argument du petit objet) garantit aussi que l'on peut factoriser tout morphisme de cdgas  $f : A \rightarrow B$  sous la forme  $A \xrightarrow{\sim} A \otimes \text{Sym}(V) \twoheadrightarrow B$  où la première flèche est une algèbre de Sullivan relative et un quasi-isomorphisme.

## 5.3. HOMOTOPIE DES CDGAS

Nous allons préciser ici quelques propriétés de la relation d'homotopie dans les cdgas (et démontrer certains lemmes utilisés dans la section précédente).

Tout comme dans les espaces topologiques on peut utiliser l'objet en cylindre  $X \times I$  pour définir toutes les relations d'homotopie, dans les cdgas, nous avons un objet en chemin universel pour définir les relations d'homotopie entre morphismes de cdgas.

*Notation 5.3.1.* On note  $\mathbf{I}^* := \Omega_{PL}^*(\Delta^1)$  l'algèbre polyédrale de l'intervalle définie dans la section 5.4.

Explicitement on a donc

$$\mathbf{I}^* = \mathbb{Q}[t_0, t_1, dt_0, dt_1] / (t_0 + t_1 = 1, dt_0 + dt_1 = 0) = \mathbb{Q}[t, dt]$$

où la dernière équivalence est donnée en identifiant  $t_0 = t$ ,  $t_1 = 1 - t$  (et  $dt_0 = -dt - 1 = dt$ ). On a que les  $t_i$  sont de degré nuls, de différentielles respectives les  $d(t_i)$  (qui sont donc de degré 1).

*Notation 5.3.2.* On note  $\epsilon_i : \Omega_{PL}^*(\Delta^1) \rightarrow \mathbb{Q}$  les deux morphismes de cdgas définis par  $\epsilon_0(t) = 0$  et  $\epsilon_1(t) = 1$  (et nécessairement  $\epsilon_i(dt) = 0$ ).

On a, pour  $i = 0, 1$ , une factorisation

$$\begin{array}{ccc} & \text{id} & \\ & \curvearrowright & \\ B & \longrightarrow B \otimes \mathbf{I}^* \twoheadrightarrow B & \\ & \text{id} \otimes \epsilon_i & \end{array}$$

qui établit que  $B \otimes \mathbf{I}^*$  et les morphismes  $(\text{id} \otimes \epsilon_0, \text{id} \otimes \epsilon_1) : B \otimes \mathbf{I}^* \rightarrow B \times B = B \oplus B$  forment un objet en chemin pour  $B$  au sens de la définition 2.2.15.

**Définition 5.3.3 (Homotopie de Sullivan).** Deux morphismes de cdgas  $f_0, f_1 : A \rightarrow B$  sont dit homotopes au sens de Sullivan si il existe un morphisme de cdga  $H : A \rightarrow B \otimes \mathbf{I}^*$  tel que  $f_i = (\text{id} \otimes \epsilon_i) \circ H$  pour  $i = 0, 1$ .

Une homotopie de Sullivan est donc une homotopie à droite au sens des catégories de modèles. Si on suppose que la source est cofibrante, on a la propriété remarquable suivante<sup>140</sup>.

**Proposition 5.3.4.** Soit  $(\text{Sym}(V), d)$  une algèbre de Sullivan. La relation d'homotopie de Sullivan est une relation d'équivalence sur  $\text{Hom}_{\mathbf{CDGA}}((\text{Sym}(V), d), B)$  qui est équivalente aux relations d'homotopie  $\stackrel{l}{\sim}$ ,  $\stackrel{r}{\sim}$  et  $\simeq$  de la structure de modèle. En particulier, le quotient  $\text{Hom}_{\text{cdga}}((\text{Sym}(V), d), B)$  par la relation d'homotopie de Sullivan est en bijection avec le quotient  $\text{Hom}_{\mathbf{CDGA}}((\text{Sym}(V), d), B) / \simeq$ .

*Démonstration.* Puisque une homotopie de Sullivan est une homotopie à droite, étant donné que toute cdga est fibrante et qu'une algèbre de Sullivan est cofibrante, il suffit d'après le Corollaire 2.2.22 de montrer que pour tout objet en chemin  $B \xrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow B \times B$  de  $B$  et toute homotopie à droite  $H : (\text{Sym}(V), d) \rightarrow P$  entre  $f, g$ , alors il existe une homotopie de Sullivan  $K : (\text{Sym}(V), d) \rightarrow B \otimes \mathbf{I}^*$ . Soit  $B \xrightarrow{\sim} P' \twoheadrightarrow P$  une factorisation de l'équivalence faible  $B \rightarrow P$  donnée par (MC5) et (MC2). La factorisation implique que  $P' \xrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow B \times B$  et  $B \xrightarrow{\sim} P'$  est un objet en chemin. Comme  $(\text{Sym}(V), d)$  est cofibrante et que  $P' \xrightarrow{\sim} P$  est une fibration acyclique, le

140. la première affirmation peut aussi se démontrer à partir de la propriété d'extension 5.4.8

morphisme  $H$  se relève en  $K' : (Sym(V), d) \rightarrow P'$  (vérifiant  $H = (Sym(V), d) \xrightarrow{K'} P' \xrightarrow{\sim} P$ ), qui relève donc l'homotopie à droite associée à  $P$  à  $P'$ . Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B \otimes \mathbf{I}^* \\ \downarrow \wr & \nearrow \phi & \downarrow \epsilon_0 \times \epsilon_1 \\ P' & \xrightarrow{proj_0 \times proj_1} & B \times B \end{array}$$

donne le relèvement  $\phi$  par (MC4). La composée  $K := \phi \circ K' : (Sym(V), d) \rightarrow B \otimes \mathbf{I}^*$  est alors une homotopie de Sullivan.  $\square$

**Corollaire 5.3.5.** Si  $f : A \rightarrow B$  est une équivalence faible entre algèbres de Sullivan, alors il existe  $g : B \rightarrow A$  tel que  $f \circ g \simeq id_B$  et  $g \circ f \simeq id_A$ .

*Démonstration.* Sachant que toute cdga est fibrante, la proposition 5.3.4 précédente et la proposition 2.2.20.b) et e) (et le théorème 2.2.26) assure que les compositions  $\text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{CDGA})}(A, A) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{CDGA})}(A, B)$  et  $\text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{CDGA})}(B, B) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{CDGA})}(A, B)$  et  $\text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{CDGA})}(B, A) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{CDGA})}(B, B)$  sont des bijections et que les ensembles en question sont les quotients des morphismes de cdgas par la relation d'homotopie. Un représentant de la préimage par  $f_*$  de  $id_B$  donne  $g$  et le résultat suit.  $\square$

*Remarque 5.3.6.* Les classes d'homotopie de Sullivan sont en fait le  $\pi_0$  d'un ensemble simplicial de morphismes. En effet, on peut définir

$$\text{Map}_{\mathbf{CDGA}}(A, B)_\bullet := \text{Hom}_{\mathbf{CDGA}}(A, B \otimes \Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet))$$

munie de la structure simpliciale induite par  $[n] \mapsto \Omega_{PL}^*(\Delta^n)$  où  $\Omega_{PL}^*(\Delta^n)$  est défini dans la section 5.4.

**Lemme 5.3.7.** Soit  $f, g : A \rightarrow B$  un morphisme entre algèbres connexes augmentées. Alors si  $f$  et  $g$  sont homotopes,  $\pi_*(f) = \pi_*(g) : \pi_*(A) \rightarrow \pi_*(B)$ . Si de plus les algèbres sont de Sullivan minimales, alors  $Q(f) = Q(g) : Q(A) \rightarrow Q(B)$ .

*Démonstration.* Le théorème de Kunneth implique que les applications induites  $\tilde{\epsilon}_i : Q(B) \otimes \mathbf{I}^* \rightarrow Q(B)$  sont identiques en cohomologie. On en déduit que c'est aussi le cas pour  $Q(B \otimes \mathbf{I}^*) \rightarrow Q(B)$  pour les algèbres minimales et le lemme en découle.  $\square$

Les relèvements donnés par l'axiome (MC4) de la structure de modèle (Corollaire 5.2.8) vérifient par ailleurs une propriété d'unicité.

**Proposition 5.3.8.** Soit  $A \hookrightarrow A \otimes (Sym(V), d)$  une algèbre de Sullivan relative. Étant donné un diagramme commutatif de cdgas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow id \otimes 1 & \nearrow h & \downarrow p \\ A \otimes (Sym(V), d) & \longrightarrow & C \end{array}$$

un relevé  $h$  existe dès que l'une des flèches verticale est un quasi-isomorphisme. De plus le relevé  $h$  est unique à homotopie de Sullivan près (relativement <sup>141</sup> à  $A$ ).

141. c'est à dire que l'homotopie est un morphisme de  $A$ -modules

On peut remarquer que le diagramme est un diagramme de  $A$ -algèbres graduées différentielles commutatives<sup>142</sup> où les structures de  $A$ -algèbres sont induites par les morphismes d'algèbres.

*Démonstration.* L'existence des relevés découle immédiatement de la structure de modèle. Si la flèche verticale de gauche est une cofibration acyclique, alors comme toute cdga est fibrante, on a que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CDGA}}(A \otimes (Sym(V), d), B) / \sim \xrightarrow{(id \otimes 1)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{CDGA}}(A, B) / \sim$$

est une bijection par la proposition 2.2.20.e).

Soit maintenant  $p : B \xrightarrow{\sim} C$  est une fibration acyclique. La commutativité du diagramme assure que nos morphismes de cdgas sont aussi des morphismes de  $A$ -modules où les structures de  $A$ -modules sont induites par les morphismes de cdgas. Autrement dit, le diagramme est un diagramme de monoides commutatifs et unitaires dans la catégorie des  $A$ -modules. Mais les morphismes de  $A$ -algèbres graduées différentielles commutatives  $A \otimes Sym(V) \rightarrow B$  sont en bijection avec les morphismes d'algèbres graduées différentielles commutatives  $Sym(V) \rightarrow B$ . On peut alors appliquer la proposition 2.2.20.b) pour conclure.  $\square$

Les algèbres de Sullivan minimales vérifient la propriété suivante similaire à leur propriété d'isomorphisme.

**Lemme 5.3.9.** Si  $f_0, f_1 : A \rightarrow B$  sont deux morphismes homotopes entre deux algèbres de Sullivan minimales connexes, alors  $f_0 = f_1$ .

*Démonstration.* Soit  $H : Sym(V) \rightarrow Sym(W) \otimes \mathbf{I}^*$  une homotopie pour  $f, g : Sym(V) \rightarrow Sym(W)$  deux algèbres de Sullivan minimales. Par le corollaire 5.3.5, il existe  $g : Sym(W) \rightarrow Sym(W) \otimes \mathbf{I}^*$  tel On peut la factoriser sous la forme Par le lemme 5.3.4, deux tels morphismes sont homotopes au sens des catégories de modèle et définissent donc le même élément  $\square$

Nous démontrons enfin un lemme utilisé ci-dessus.

**Lemme 5.3.10.** Soit un diagramme commutatif de cdgas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A \otimes Sym(V) \\ \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\ C & \xrightarrow{j} & C \otimes Sym(W) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \sim \\ \xrightarrow{\sim} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ B \end{array}$$

où  $i, j$  sont des algèbres de Sullivan relatives minimales. Alors il existe un quasi-isomorphisme relevé  $\bar{f}$  rendant le diagramme commutatif.

Si de plus  $f : A \rightarrow B$  est un *isomorphisme* alors  $\bar{f}$  est un isomorphisme aussi.

<sup>142</sup>. autrement dit de monoïde unitaire commutatif dans la catégorie monoidale des  $A$ -modules différentiels gradués

*Démonstration.* Par la remarque 5.2.20, on peut factoriser  $C \otimes \text{Sym}(W) \xrightarrow{\sim} B$  sous la forme  $C \otimes \text{Sym}(W) \xrightarrow{id \otimes \eta} C \otimes \text{Sym}(W) \otimes E(U) \xrightarrow{\sim} B$ . Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(id \otimes \eta)j \circ f} & C \otimes \text{Sym}(W) \otimes E(U) \\ \downarrow i & \searrow \tilde{f} & \downarrow \wr \\ A \otimes \text{Sym}(V) & \xrightarrow{\sim} & B \end{array}$$

assure l'existence d'un relevé et on obtient  $\bar{f}$  comme la composée  $A \otimes \text{Sym}(V) \xrightarrow{\tilde{f}} C \otimes \text{Sym}(W) \otimes E(U) \rightarrow C \otimes \text{Sym}(W)$ . C'est un quasi-isomorphisme par la propriété (MC2).

Supposons maintenant que  $f$  soit un isomorphisme. En appliquant le résultat au diagramme évident avec  $f^{-1}$ , on obtient un quasi-isomorphisme  $\bar{f}^{-1} : C \otimes \text{Sym}(W) \rightarrow A \otimes \text{Sym}(V)$ . On a que  $\bar{f}^{-1} \circ \bar{f} : A \otimes \text{Sym}(V) \rightarrow A \otimes \text{Sym}(V)$  est un quasi-isomorphisme qui fixe  $A$ . Par la proposition 5.3.8, ce quasi-isomorphisme est homotope à l'identité par une homotopie qui fixe  $A$  et de même pour  $\bar{f} \circ \bar{f}^{-1}$ . Une démonstration analogue à celle du Lemme 5.3.7 nous donne alors que l'application induite  $A \otimes Q(\text{Sym}(V)) \rightarrow A \otimes Q(\text{Sym}(V))$  est un isomorphisme fixant  $A$  et une démonstration analogue à celle de la proposition 5.2.26 montre que ce morphisme est un isomorphisme. On en déduit donc que  $\bar{f}$  a un inverse à droite. Un raisonnement inversant le rôle de  $f$  et  $f^{-1}$  nous donne un inverse à gauche et donc  $\bar{f}$  est un isomorphisme.  $A \otimes Q(\text{Sym}(V))$  l'on a un morphisme induit  $A \otimes Q(\text{Sym}(V)) \rightarrow C \otimes Q(\text{Sym}(W))$  qui est un quasi-isomorphisme. et on veut montrer que  $\bar{f}^{-1} \circ \bar{f} = id$  (la composition dans l'autre sens sera alors aussi l'identité par symétrie de l'argument). Il suit alors du Lemme 5.3.9 que la composée est l'identité.  $\square$

#### 5.4. FORMES POLYHÉDRALES

On introduit maintenant l'analogue, du à Sullivan, des formes de de Rham pour tout espace topologique. L'idée consiste à d'abord définir une version polyédrale des formes différentielles sur le  $n$ -disque muni de sa triangulation standard ; c'est à dire sur le  $n$ -simplexe standard  $\Delta^n$ .

**Définition 5.4.1.** L'algèbre des formes polyédrales sur  $\Delta^n$  est définie comme la cdga quotient

$$\Omega_{PL}^*(\Delta^n) := \mathbb{Q}[t_0, \dots, t_n, dt_0, \dots, dt_n] \Big/ \begin{array}{l} t_0 + \dots + t_n = 1 \\ dt_0 + \dots + dt_n = 0 \end{array}$$

où les  $t_i$  sont en degrés 0 et les  $dt_i$  sont en degrés 1. La différentielle  $d : \Omega_{PL}^*(\Delta^n) \rightarrow \Omega_{PL}^{*+1}(\Delta^n)$  est donnée, pour tout  $i = 0 \dots n$ , par

$$d(t_i) = dt_i \quad \text{et} \quad d(dt_i) = 0.$$

*Remarque 5.4.2.* Comme les  $dt_i$  sont en degrés 1 et l'algèbre est graduée commutative, on a que  $\Omega_{PL}^{i>n}(\Delta^n) \cong 0$ .

*Remarque 5.4.3 (Lien avec les formes de De Rham).* On a une inclusion évidente de  $\Omega_{PL}^0(\Delta^n)$  dans les fonctions  $C^\infty(\Delta^n)$  en tant que polynômes à coefficients rationnels. On en déduit un isomorphisme naturel

$$\Omega_{dR}^*(\Delta^n) \cong C^\infty(\Delta^n) \otimes_{\Omega_{PL}^0(\Delta^n)} \Omega_{PL}^*(\Delta^n).$$

La structure cosimpliciale des  $\Delta^n$  induit une structure simpliciale sur les formes polyédrales définie comme suit : pour  $i = 0 \dots n$  et  $k = 0 \dots n$ , on pose

$$(29) \quad d_i(t_k) := \begin{cases} x_k & \text{si } k < i \\ 0 & \text{si } k = i \\ x_{k-1} & \text{si } k > i \end{cases} \quad s_i(t_k) := \begin{cases} x_k & \text{si } k < i \\ x_k + x_{k+1} & \text{si } k = i \\ x_{k+1} & \text{si } k > i \end{cases}$$

et on applique la même formule pour les  $dt_k$ .

**Lemme 5.4.4.** La structure (29) donne une structure d'objet simplicial  $[n] \mapsto \Omega_{PL}^*(\Delta^n)$  dans **CDGA**<sup>143</sup> aux formes polyédrales sur les simplexes standards.

Cette structure simpliciale vérifie deux propriétés utiles. Tout d'abord, les formes polyédrales, pour chaque simplexe  $\Delta^n$  fixée sont contractibles (tout comme les formes de de Rham sur un disque). Par ailleurs, la cdga simpliciale est-elle même "contractible" par rapport à la structure simpliciale. Ces deux propriétés s'énoncent plus précisément comme suit :

**Proposition 5.4.5.**

- (1) (*Lemme de Poincaré PL*) l'unité  $\eta : \mathbb{Q} \rightarrow \Omega_{PL}^*(\Delta^n)$  est un quasi-isomorphisme (de cdgas).
  - (2) Pour tout  $i \geq 0$ , on a que le  $\mathbb{Q}$ -module simplicial  $\Omega_{PL}^i(\Delta^\bullet)$  est *simplicialement contractile* : c'est à dire qu'il existe un morphisme de  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $s : \Omega_{PL}^i(\Delta^\bullet) \rightarrow \Omega_{PL}^i(\Delta^{\bullet+1})$  tel que
- $$(30) \quad d_0 s = id, \quad d_1 s = 0 \text{ si } \bullet = 0 \text{ et } d_{j+1} s = s d_j \text{ si } \bullet > 0, \quad s_{j+1} s_j = s s_j.$$

En particulier l'homologie simpliciale  $H_*(\Omega_{PL}^i(\Delta^\bullet), \sum (-1)^j d_j)$  est nulle et la réalisation géométrique de  $\Omega_{PL}^i(\Delta^\bullet)$  est contractile.

*Remarque 5.4.6.* Les conditions (30) montrent précisément que l'opérateur  $s$  est un opérateur d'homotopie entre  $id$  et 0 dans le complexe  $(\Omega_{PL}^i(\Delta^\bullet), \sum (-1)^j d_j)$ . On peut montrer facilement que si une application vérifiant ces conditions est définie sur un ensemble simplicial de Kan, comme c'est le cas pour  $\Omega_{PL}^i(\Delta^\bullet)$ , alors les groupes d'homotopie de ce dernier sont tous nuls.

*Remarque 5.4.7 (Propriété d'extension).* L'homotopie simpliciale  $s$  garantit que les  $q$ -formes polyédrales  $\Omega_{PL}^q(\Delta^\bullet)$  forment un  $\mathbb{Q}$ -module simplicial *étendable*<sup>144</sup> : c'est à dire que

*Lemme 5.4.8.* Pour tout  $n \geq 1$ , tout sous ensemble  $J \subset [n]$ , et toute famille  $(\omega_j \in \Omega_{PL}^q(\Delta^{n-1}))_{j \in J}$  telle que

$$d_i \omega_j = d_{j-1} \omega_i \text{ si } i < j,$$

il existe une  $q$ -forme  $\omega \in \Omega_{PL}^q(\Delta^n)$  sur  $\Delta^n$  telle que  $d_j \omega = \omega_j$  pour tout  $j \in J$ .

En particulier les  $i$ -formes PL forment un ensemble simplicial de Kan pour tout  $i$ , ce qui est de toutes façons une propriété de tous les groupes simpliciaux.

On peut maintenant définir les formes PL associées à tout ensemble simplicial ou espace topologique.

<sup>143.</sup> on dira simplement de cdga simpliciale.

<sup>144.</sup> on peut penser à cette propriété comme une propriété de faisceaux : si on a une famille d'objets dont les restrictions à leurs intersections communes sont les mêmes, alors ils sont la restriction d'un objet global



**Définition 5.4.9.**

- (1) On note
- $\Omega_{PL}^* : \mathbf{sEns} \longrightarrow \mathbf{CDGA}^{op}$
- le foncteur défini par

$$X_\bullet \mapsto \Omega_{PL}^*(X_\bullet) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, \Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet))$$

muni de la structure de cdga définie degré par degré.

- (2) On note également
- $\Omega_{PL}^* : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{CDGA}^{op}$
- le foncteur composé défini par

$$X \mapsto \Omega_{PL}^*(\mathrm{Sing}_\bullet(X))$$

On appelle ces cochaines les formes polyédrales (ou juste PL) associées à  $X_\bullet$  ou  $X$ .

La structure degré par degré signifie que les  $i$ -formes PL de  $X_\bullet$  sont l'ensemble  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, \Omega^i(\Delta^\bullet))$  munie de la structure de  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel induite par celle de  $\Omega^i(\Delta^\bullet)$  en tout degré simplicial  $\bullet$  (c'est à dire par la somme des fonctions). Le produit est induit par le produit des formes  $((f_n) \cdot (g_n) = (f_n \wedge g_n)$  où  $\wedge$  désigne la multiplication dans  $\Omega_{PL}^*(\Delta^n)$ ) et la différentielle est définie de même ( $d((f_n)_{n \geq 0}) = (d(f_n))_{n \geq 0}$ ).

*Remarque 5.4.10.* Une façon plus commode et équivalente d'énoncer le résultat du lemme 5.4.8 est de tout simplement de remarquer que les restrictions  $\Omega_{PL}^i(\Delta^n) \rightarrow \Omega_{PL}^i(\partial\Delta^n)$  sont surjectives.

Le fait que  $\Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet)$  soit une CDGA simpliciale garantit que la structure de cdga précédente est bien définie.

*Remarque 5.4.11.* Le lemme de Yoneda 3.1.13 nous assure qu'il y a un isomorphisme canonique

$$\Omega_{PL}^*(\Delta_\bullet^n) \cong \Omega_{PL}^*(\Delta^n)$$

ce qui assure que notre terminologie de formes polyédrale pour le simplexe standard est consistante.

De manière générale, si  $K$  est un complexe simplicial (au sens de la définition 3.1.3), on obtient alors qu'une  $i$ -forme polyédrale est exactement une collection de  $i$ -formes sur chaque simplexe de  $K$  dont les restrictions à leurs faces communes sont identiques.

*Remarque 5.4.12.* On a un analogue du Lemme 3.2.17.

*Lemme 5.4.13.* Pour toute inclusion  $K_\bullet \hookrightarrow L_\bullet$  d'ensembles simpliciaux, le morphisme de cdga induit  $\Omega_{PL}^*(L_\bullet) \rightarrow \Omega_{PL}^*(K_\bullet)$  est surjectif en tout degré; en particulier c'est une fibration de cdga.

*Démonstration.* Cela se démontrer en utilisant que le fait que les formes PL sur les simplexes soient étendables (remarque 5.4.7) qui donne le cas de l'inclusion  $\partial\Delta_\bullet^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n$ . En utilisant que  $L_\bullet$  se reconstruit en recollant des simplexes sur leur bord (cf. la preuve du Lemme 3.2.9), le résultat en découle.  $\square$

Du lemme 3.2.17 découle qu'on peut définir les cochaines d'une paire  $(L_\bullet, K_\bullet)$  comme le noyau de ce morphisme et obtenir une suite exacte longue naturelle en cohomologie reliant les formes PL relatives et absolues.

*Remarque 5.4.14.* On peut remplacer la cdga simpliciale  $\Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet)$  par n'importe quelle cdga simpliciale  $\mathcal{A}_\bullet^*$  dans la définition 5.4.9 pour définir des cdga fonctorielles  $\mathcal{A}^*(X_\bullet)$  (resp.  $\mathcal{A}^*(X)$ ) pour tout ensemble simplicial  $X_\bullet$  (resp. espace topologique  $X$ ). Si de plus la cdga obtenue est étendable, alors le lemme 5.4.13 est valide pour cette dernière.

Les formes polyédrales réalisent l'objectif annoncé de donner un modèle naturel et commutatif au sens gradué des cochaines singulières. Pour relier les formes PL à la cohomologie singulière, on peut utiliser un analogue PL du théorème de De Rham.

Rappelons qu'une  $n$ -forme  $\omega \in \Omega_{PL}^n(X_\bullet)$  est une famille  $(\omega_i := \sum_\alpha f_{i,\alpha} dt_{\alpha_0} \cdots dt_{\alpha_i})$  où les  $f_{i,\alpha}$  sont fonctions de  $X_\bullet$  à valeur dans les polynômes à coefficients rationnels en les variables  $t_j$ . Notons que pour  $i = n$ , on obtient simplement un élément  $f_n dt_0 \cdots dt_n$ . En particulier, on peut intégrer, pour tout  $x_n \in X_n$ , de telles formes sur le  $n$ -simplexe standard et obtenir un rationnel. On définit ainsi l'application linéaire d'intégration  $\int \omega : C_n(X_\bullet) = \mathbb{Q} \langle X_n \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}$  par, pour tout simplexe  $x_n \in X_n$ ,

$$(31) \quad \int \omega(x_n) := \int_{\Delta^n} f_n(x_n) dt_0 \cdots dt_n.$$

En prenant  $X_\bullet = \text{Sing}_\bullet(X)$ , on obtient<sup>145</sup> ainsi  $\int \omega \in C^*(X_\bullet)$  (où  $C^*(X)$  est le complexe des cochaines singulières de  $X$ ). En faisant varier  $\omega$  on obtient ainsi une application linéaire

$$\int : \Omega_{PL}^*(X) \longrightarrow C^*(X)$$

(et plus généralement, pour tout ensemble simplicial  $X_\bullet$ , une application linéaire  $\int : \Omega_{PL}^*(X_\bullet) \longrightarrow C^*(X_\bullet)$ , donnée par  $\omega \mapsto \int \omega$ . Cette application est évidemment naturelle en  $X$  (resp.  $X_\bullet$ ).

**Théorème 5.4.15** (Sullivan). L'application  $\int : \Omega_{PL}^*(X) \longrightarrow C^*(X)$  est un quasi-isomorphisme de complexes de cochaines qui induit un isomorphisme d'algèbres en cohomologie.

De plus, elle est induite, en cohomologie, par un zigzag de quasi-isomorphismes naturels d'algèbres associatives différentielles graduées unitaires entre  $\Omega_{PL}^*(X)$  et  $C^*(X)$  (munie du cup produit).

Les mêmes résultats ont lieu pour tout ensemble simplicial et les cochaines simpliciales.

Le premier point suit essentiellement de la formule de Stokes et du lemme de Poincaré PL.

*Remarque 5.4.16.* Le dernier point précise le premier, en affirmant que la structure multiplicative<sup>146</sup> des cochaines singulières est bien équivalente à celle des formes polynomiales (et pas juste les algèbres induites en cohomologie).

Ceci se démontre essentiellement de la manière suivante. On dispose de l'algèbre différentielle graduée associative simpliciale  $C^*(\Delta^n)$  dont la structure simpliciale est induite par la structure cosimpliciale 3.1.8 des simplexes standards et la fonctorialité de l'algèbre des cochaines singulières; elle est par ailleurs étendable (5.4.7). On peut alors construire pour tout espace topologique  $X$ , les cochaines  $\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\text{Sing}_\bullet(X), C^*(\Delta^\bullet))$  qui est une dg-algèbre associative qui est *isomorphe*

<sup>145.</sup> de manière générale, on obtient un élément dans le complexe des cochaines simpliciales de  $X_\bullet$ , qui est défini comme étant, en degré  $i$ , le dual linéaire de  $C_i(X_\bullet)$ , muni de la différentielle  $(-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j d_j^*$

<sup>146.</sup> il admet même un relèvement à des structures multiplicatives associatives et homotopiquement commutatives, qui se précise formellement en utilisant le langage des opérades

aux cochaines singulières de  $X$  en tant qu'algèbre différentielle graduée<sup>147</sup>. On considère alors le zigzag de morphismes d'algèbres associatives différentielles graduées :

$$(32) \quad \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\text{Sing}_\bullet(X), C^*(\Delta^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\text{Sing}_\bullet(X), C^*(\Delta^\bullet) \otimes \Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet)) \xleftarrow{\sim} \Omega_{PL}^*(X)$$

dont les flèches sont induites par les morphismes

$$C^*(\Delta^\bullet) \xrightarrow{id \otimes \eta} C^*(\Delta^\bullet) \otimes \Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet),$$

$$\Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet) \xrightarrow{\eta \otimes id} C^*(\Delta^\bullet) \otimes \Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet)$$

induites par les morphismes d'unité respectifs de  $\Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet)$  et  $C^*(\Delta^\bullet)$ . Les flèches de (32) sont des quasi-isomorphismes pour tout  $X_\bullet$  car  $C^*(\Delta^\bullet)$  vérifie également les résultats de la proposition 5.4.5.(1) et (2) (ce qui permet de démontrer ce résultat par récurrence en passant aux cochaines relatives à partir du cas des simplexes).

La construction des formes PL d'un polyèdre a un adjoint.

**Proposition 5.4.17.** Le foncteur  $\Omega_{PL}^* : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{CDGA}^{op}$  est un adjoint à gauche.

Précisément, on a une adjonction  $\mathbf{sEns} \xrightleftharpoons[S_\bullet^\Delta]{\Omega_{PL}^*} \mathbf{CDGA}^{op}$  où l'adjoint à droite  $S_\bullet^\Delta$  est donné par

$$S_\bullet^\Delta(A^*) := \text{Hom}_{\mathbf{CDGA}}(A^*, \Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet)).$$

La structure simpliciale est donnée niveau par niveau à partir de celle de  $\Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet)$ .

*Démonstration.* Cela découle des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{CDGA}}(A^*, \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, \Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet))) &\cong \text{Hom}_{\mathbf{sCDGA}}(A^* \times X_\bullet, \Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet)) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, \text{hom}_{\mathbf{CDGA}}(A^*, \Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet))) \end{aligned}$$

où  $A^* \times X_\bullet$  est la cdga simpliciale obtenue en prenant, en degré simplicial, l'algèbre  $A^* \times X_i = \prod_{x \in X_i} A^*$ .  $\square$

On peut penser à cette adjonction comme une variante de l'adjonction donnée par la réalisation géométrique et l'ensemble singulier. En effet,  $\Omega_{PL}^*(\Delta^\bullet)$  est un objet cosimplicial naturel dans  $\mathbf{CDGA}^{op}$  ce qui permet d'interpréter  $S_\bullet^\Delta$  exactement comme le foncteur  $\text{Sing}_\bullet(-)$ . Par ailleurs la définition de  $\Omega_{PL}^*(X_\bullet)$  devient une variante immédiate de la réalisation géométrique si on interprète la formule comme étant à valeur dans  $\mathbf{CDGA}^{op}$  et pas  $\mathbf{CDGA}$ .

## 5.5. ESPACES ET ALGÈBRES FORMELLES

La cohomologie d'une cdga est une algèbre graduée (Remarque 5.1.5). Une question naturelle est de voir si cette structure est équivalente à celle sur les cochaines.

147. l'isomorphisme est donné par l'application qui à  $f : \text{Sing}_\bullet(X) \rightarrow C^n(\Delta^\bullet)$ , notée  $\sigma \mapsto f_\sigma : \mathbb{Q}\text{Sing}_\bullet(\Delta^\bullet) \rightarrow \mathbb{Q}$ , associe la cochaîne singulière  $\text{Sing}_n(X) \ni \sigma \mapsto f_\sigma(\Delta^n \xrightarrow{id} \Delta^n)$

**Définition 5.5.1** (*formalité*). Une cdga  $(A, d)$  est dite formelle si elle est faiblement équivalente (autrement dit isomorphe dans la catégorie  $\mathbf{Ho}(\mathbf{CDGA})$ ) à son algèbre de cohomologie  $(H^*(A), 0)$  en tant que cdga.

Un *espace topologique*  $X$  (ou un ensemble simplicial) est *formel* si ses formes polyédrales  $\Omega_{PL}^*(X)$  sont formelles en tant que cdga.

*Remarque 5.5.2.* Rappelons que deux cdgas  $A, B$  sont faiblement équivalentes si, par définition, elles sont reliées par un zigzag

$$A \xleftarrow{\sim} A_1 \xrightarrow{\sim} \dots \xleftarrow{\sim} A_n \xrightarrow{\sim} B$$

où les flèches sont des morphismes de cdgas qui sont des quasi-isomorphismes (autrement dit des équivalences faibles dans  $\mathbf{CDGA}$ ). Ce dernier point est équivalent à dire que  $A$  est isomorphe à  $B$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{CDGA})$ .

Par ailleurs, quitte à prendre des tirés-en-arrière de cdgas, tout zigzag est équivalent à un zigzag avec  $n = 1$  (c'est à dire avec un seul intermédiaire).

*Remarque 5.5.3.* Un complexe de cochaines sur un corps est toujours quasi-isomorphe à sa cohomologie (en tant que complexe de cochaines). Si ce complexe est en plus une cdga, ce quasi-isomorphisme induit la structure d'algèbre sur la cohomologie, mais, n'est *pas* un morphisme de cdgas en général. La propriété d'être formel est une vraie condition non-triviale pour une cdga, voir la feuille de TD 5 pour voir un exemple de cdgas non-formelle.

Cette notion de formalité et ses problématiques s'étend évidemment à toute structure algébrique (Lie, associative, etc...) sur un complexe de cochaines ou par exemple aux complexes de faisceaux.

Nous allons étudier un exemple crucial d'espace formel :

*Exemple 5.5.4* (*Modèle minimal et formalité des sphères*). Soit  $n \geq 1$ . L'anneau de cohomologie de  $\mathbb{S}^n$  est

$$H^*(\mathbb{S}^n, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 = 0)$$

où  $x$  est un générateur de degré  $n$ . Remarquons que si  $n$  est impair, la relation  $x^2 = 0$  est redondante puisque elle est vérifiée automatiquement pour tout générateur de degré impair (Remarque 5.1.4).

On commence donc par le cas impair  $n = 2k - 1$  ( $k \geq 1$ ). Notons  $\tilde{x}$  un  $2k - 1$ -cocycle de  $\Omega_{PL}^*(\mathbb{S}^{2k-1})$  (dont la cohomologie est  $H^*(\mathbb{S}^{2k-1}, \mathbb{Q})$  par le théorème 5.4.15) engendrant  $H^{2k-1}(\mathbb{S}^{2k-1})$ . Comme  $\tilde{x}$  est de degré impair, on a  $\tilde{x}^2 = 0$  et l'application

$$(Sym(\mathbb{Q}x), 0) \longrightarrow (\Omega_{PL}^*(\mathbb{S}^{2k-1})_n, d)$$

définie comme l'unique morphisme de cdgas qui envoie  $x$  sur  $\tilde{x}$  sur lui même est un quasi-isomorphisme de cdgas. Comme l'algèbre symétrique à gauche est la cohomologie de  $\mathbb{S}^{2k-1}$  on a démontré la formalité de la sphère  $\mathbb{S}^{2k-1}$ .

Dans le cas pair  $n = 2k$  ( $k \geq 0$ ), notons encore  $\tilde{x}$  un cocycle de  $\Omega_{PL}^*(\mathbb{S}^{2k})$  engendrant  $H^{2k}(\mathbb{S}^{2k})$ . On a encore un morphisme de cdgas  $Sym(\mathbb{Q}x), 0 \longrightarrow (\Omega_{PL}^*(\mathbb{S}^{2k})_n, d)$  qui envoie le générateur de la source sur  $\tilde{x}$ . Ce morphisme n'est plus un quasi-isomorphisme car  $x$  est de degré pair et donc son carré est une classe de cohomologie de  $Sym(\mathbb{Q}\tilde{x}), 0$ , qu'il convient donc de tuer. La classe  $\tilde{x}^2$  est un bord dans  $\Omega_{PL}^{4k}(\mathbb{S}^{2k})$  (car c'est un cycle). Soit  $\tilde{y} \in \Omega_{PL}^{4k-1}(\mathbb{S}^{2k})$  une  $4k - 1$ -cochaines telle que  $d(\tilde{y}) = \tilde{x}^2$ . Soit  $y$  un élément de degré  $4k - 1$  et munissons  $Sym(\mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y)$  de la différentielle définie, sur les générateurs, par  $d(y) = x^2$  et  $d(x) = 0$  (ce qui implique en particulier

que  $d^2 = 0$ ). Soit  $\psi : (Sym(\mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y), d) \longrightarrow H^*(\mathbb{S}^{2k}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x]/(x^2 = 0)$  l'unique morphisme d'algèbres graduées commutatives envoyant  $y$  sur 0 et  $x$  sur sa classe dans le quotient. C'est un morphisme de cdgas  $x$  est un cocycle et un quasi-isomorphisme car, par des considérations immédiates de degré, un élément de  $Sym(\mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y)$  est de la forme  $P(x) + Q(x)y$  (où  $P, Q$  sont des polynômes) et a pour différentielle  $Q(x)x^2$ . Soit alors  $\phi$  l'unique morphisme d'algèbres graduées commutatives

$$(Sym(\mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y), d) \longrightarrow \Omega_{PL}^*(\mathbb{S}^{2k})$$

donné par  $\phi(x) = \tilde{x}$ ,  $\phi(y) = \tilde{y}$ . Par construction, c'est un morphisme de cdgas et un quasi-isomorphisme vu le calcul précédent. Ceci établit la formalité de  $\mathbb{S}^{2k}$ .

Par ailleurs, les modèles semi-libres donnés sont des modèles de Sullivan minimaux de  $S^n$  (cf. lemme 5.2.13). Ainsi :

**Proposition 5.5.5.** Soit  $n \geq 1$ . Les sphères  $S^n$  sont formelles et ont pour modèle de Sullivan minimal

$$Sym(\mathbb{Q}x), 0 \text{ avec } x \text{ de degré } 2k - 1 \text{ si } n = 2k - 1,$$

$$(Sym(\mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y), d) \text{ avec } x \text{ de degré } 2k, y \text{ de degré } 4k - 1 \text{ si } n = 2k.$$

La sphère  $S^0$  est aussi formelle.

**Remarque 5.5.6.** L'exemple précédent des sphères impaires se généralise facilement à toute cdga (et donc tout espace) dont la cohomologie est une algèbre symétrique  $Sym(W^*)$ . Ainsi  $\mathbb{C}P^\infty$  est formel.

**Exemple 5.5.7.** Une démonstration similaire au cas des sphères de dimension paire prouve que les espaces projectifs réels et complexes  $\mathbb{R}P^n$  et  $\mathbb{C}P^n$  sont formels.

Il existe beaucoup d'espaces intéressants formels ; la proposition suivante énumère un certain nombre.

**Proposition 5.5.8.**

- (1) Si  $X$  est un groupe topologique (ou même simplement un  $H$ -espace) alors  $X$  est formel (c'est en particulier le cas de  $\Omega_{x_0}X$  et de tout groupe de Lie donc).
- (2) Si  $X$  est une suspension  $X \cong \Sigma Y$  alors  $X$  est formel.
- (3) (*Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan*) Si  $X$  est une variété de Kahler compacte, alors  $X$  est formel.

**Exercice 5.5.9.** Montrer qu'un produit (resp. un bouquet) d'espaces formels (resp. pointés) est formel.

## 5.6. RATIONNALISATION ET ÉQUIVALENCE HOMOTOPIQUE ENTRE ESPACES ET CDGAS

Nous allons maintenant comparer les théories homotopiques des cdgas et des espaces topologiques. Nous disposons de deux adjonctions  $\mathbf{sEns} \xrightleftharpoons[S_\bullet^\Delta]{\Omega_{PL}^*} \mathbf{CDGA}^{op}$  et

$| - | : \mathbf{sEns} \rightleftarrows \mathbf{Top} : \text{Sing}_\bullet(-)$  (données par les propositions 3.1.19 et 5.4.17).

**Définition 5.6.1.** La réalisation spatiale des cdgas est le foncteur composé  $\mathbf{CDGA}^{op} \rightarrow \mathbf{Top}$  défini par  $A \mapsto |S_\bullet^\Delta(A)|$ . On appellera  $S_\bullet^\Delta(A)$  la réalisation simpliciale de  $A$ .

On sait (Corollaire 3.2.18) que la réalisation géométrique est de Quillen, et qui plus est, une équivalence de Quillen.

*Remarque 5.6.2.* L'adjonction entre ensembles simpliciaux et espaces topologiques passe aux catégories pointées. La structure de modèle sur les espaces pointés étant donnée en déclarant que les équivalences faibles, fibrations et cofibrations sont les applications qui le sont si on oublie qu'elles sont pointées (cf Exercice 2.5.7). Pour les cdgas, la notion équivalente à celle d'être pointée est celle donnée par les algèbres augmentées (Remarque 5.1.15). L'adjonction entre  $\mathbf{sEns}$  et  $\mathbf{CDGA}^{op}$  passe à ce

cadre là formellement aussi pour donner une adjonction  $\mathbf{sEns}_* \xrightleftharpoons[S_\bullet^\Delta]{\Omega_{PL}^*} \mathbf{CDGA}_{aug}^{op}$ .

Notons que les limites dans les catégories pointées sont les mêmes que dans les catégories non-pointées. En revanche les colimites (en particulier les coproduits) sont différentes.

Les adjonctions entre ensembles simpliciaux et cdgas (resp. pointés et augmentés) sont de Quillen :

**Proposition 5.6.3.** L'adjonction  $\mathbf{sEns} \xrightleftharpoons[S_\bullet^\Delta]{\Omega_{PL}^*} \mathbf{CDGA}^{op}$  est une adjonction de Quillen.

L'adjonction induite  $\mathbf{sEns}_* \xrightleftharpoons[S_\bullet^\Delta]{\Omega_{PL}^*} \mathbf{CDGA}_{aug}^{op}$  est également une adjonction de Quillen.

*Démonstration.* Rappelons que les cofibrations pour la structure de modèle de  $\mathbf{CDGA}^{op}$  sont les fibrations de  $\mathbf{CDGA}$ . Il suffit, par le lemme 2.5.5, de montrer que  $\Omega_{PL}^*$  préserve les fibrations et les cofibrations acycliques. Il préserve les équivalences faibles car une équivalence d'homotopie faible entre espaces topologiques (ou ensembles simpliciaux) induit un quasi-isomorphisme de leurs cochaines singulières et donc par le théorème de de Rham-Sullivan 5.4.15, on obtient un diagramme commutatif  $\Omega_{PL}^*(X) \xrightarrow{\Omega_{PL}^*(f)} \Omega_{PL}^*(Y)$  impliquant que  $\Omega_{PL}^*(f)$  est un quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} f \downarrow \sim & & \sim \downarrow f \\ C^*(X) & \xrightarrow[\sim]{f^*} & C^*(Y) \end{array}$$

si  $f : Y \rightarrow X$  est une équivalence faible. Si  $K_\bullet \hookrightarrow L_\bullet$  est une cofibration (c'est à dire une inclusion), alors  $\Omega_{PL}^*(L_\bullet) \rightarrow \Omega_{PL}^*(K_\bullet)$  est surjective en chaque degré par le Lemme 5.4.13, c'est donc une fibration dans  $\mathbf{CDGA}$  donc une cofibration dans  $\mathbf{CDGA}^{op}$  et le résultat est démontré.  $\square$

Cette adjonction 5.6.3 ne peut évidemment pas être une équivalence (déjà car il existe des cdgas qui ne sont pas des sommes directes de cdgas connexes même à quasi-isomorphisme près), notamment car une cdga ne donne lieu qu'à des invariants  $\mathbb{Q}$ -linéaires, ce qui n'est évidemment pas le cas d'un espace quelconque. Nous allons voir que cette dernière obstruction est essentiellement la seule lorsque l'on se restreint à des espaces simplement connexes.

Pour cela on introduit la notion suivante

**Définition 5.6.4** (*espace rationnel*). Un espace (resp. ensemble simplicial) simplement connexe  $X$  est dit *rationnel* si ses groupes d'homotopie <sup>148</sup>  $\pi_n(X)$  ( $n \geq 2$ ) sont des  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels.

Notons que un groupe abélien est naturellement muni d'une structure de  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel si il est uniquement divisible, c'est à dire divisible (tout élément  $x$  s'écrit sous la forme  $ny$  pour tout  $n > 0$ ) et sans torsion. De manière équivalente on a

**Lemme 5.6.5.** Un espace simplement connexe est rationnel si et seulement si

- ses groupes d'homologie  $H_i(X, \mathbb{Z})$  sont des  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels (pour  $i \geq 2$ )
- si et seulement si les groupes  $\tilde{H}_i(\Omega X, \mathbb{Z})$  sont des  $\mathbb{Q}$  espaces vectoriels pour tout  $i \geq 1$ .

A priori cette condition est contraignante. On va cependant voir que tout espace simplement connexe a une rationalisation universelle.

On définit maintenant une notion d'équivalence faible appropriée pour travailler avec des invariants rationnels et des espaces rationnels.

**Lemme et Définition 5.6.6** (*équivalence rationnelle*). Une application  $f : X \rightarrow Y$  entre espaces topologiques (resp. ensembles simpliciaux) simplement connexes est une équivalence rationnelle si elle vérifie l'une (et donc toutes) les conditions équivalentes suivantes :

- l'application induite  $f_* \otimes \mathbb{Q} : \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_i(Y) \otimes \mathbb{Q}$  est un isomorphisme pour tout  $i \geq 2$
- l'application induite  $H_*(f, \mathbb{Q}) : H_*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(Y, \mathbb{Q})$  est un isomorphisme pour tout  $i \geq 2$
- l'application induite  $H^*(f, \mathbb{Q}) : H^*(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$  est un isomorphisme pour tout  $i \geq 2$ .

L'équivalence entre les différentes définitions provient essentiellement des théorèmes de Whitehead, des coefficients universels et d'Hurewicz.

*Remarque 5.6.7.* Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application entre espaces rationnels, alors  $f$  est une équivalence rationnelle si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie faible.

Étant donné que l'on s'intéresse aux espaces simplement connexes, on a envie de restreindre **Top** et **sEns** à ce cadre. Pour rester dans ce contexte, on doit évidemment regarder des (co)limites pointées homotopiquement. Le plus facile pour définir une structure de modèle dans ce contexte est de passer aux

**Définition 5.6.8.** Un ensemble simplicial est 1-réduit si son 1-squelette est réduit à un seul point (c'est à dire qu'il a un seul sommet et un seul 1-simplexe donné par la dégénérescence du sommet). On note **sEns**<sup>1-red</sup> la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux 1-réduits.

*Notation 5.6.9.* On note **Top**<sup>1</sup>, **sEns**<sup>1</sup>, **Top**<sub>\*</sub><sup>1</sup>, **sEns**<sub>\*</sub><sup>1</sup> les sous-catégories pleines des espaces topologiques et ensembles simpliciaux simplement connexes, respectivement simplement connexes et pointées. On considère aussi les sous-catégories **Ho(Top**<sup>1</sup>) etc.. correspondant aux sous-objets et morphismes (quotients) correspondants à ces catégories dans les catégories homotopiques.

<sup>148</sup>. on ne précise pas les points bases puisque les espaces sont simplement connexes

La catégorie de modèle des ensembles simpliciaux passe à la sous-catégorie  $\mathbf{sEns}^{1-red}$  (ce qui se voit dans la preuve de la proposition/définition 5.6.10) Un ensemble simplicial 1-réduit est évidemment simplement connexe (puisque on peut utiliser les groupes d'homotopie simpliciale). On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{Ho}(\mathbf{Top}^1) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{Ho}(\mathbf{sEns}^1) & \xleftarrow{\simeq} & \mathbf{Ho}(\mathbf{sEns}^{1-red}) \\
 \uparrow & & \uparrow & \swarrow \simeq & \\
 \mathbf{Ho}(\mathbf{Top}_*^1) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{Ho}(\mathbf{sEns}_*^1) & & 
 \end{array}$$

dont on déduit que toutes les catégories homotopiques du diagramme sont équivalentes. L'équivalence diagonale à gauche suit du fait qu'un ensemble simplicial 1-réduit n'a pas d'homotopie en degré 0 et 1 (comme il est évident sur les groupes d'homotopie simpliciaux). On modifie maintenant la catégorie de modèle de manière à s'intéresser aux équivalences rationnelles (en particulier on rajoute des équivalences faibles).

**Proposition 5.6.10.** On munit la sous-catégorie pleine  $\mathbf{sEns}^{1-red}$  des classes de morphismes suivantes :

- les équivalences faibles sont les équivalences rationnelles,
- les cofibrations sont les cofibrations de  $\mathbf{sEns}$ ,
- les fibrations sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations acycliques.

Cette classe de morphisme fait de  $\mathbf{sEns}^{1-red}$  une catégorie de modèle.

On notera  $\mathbf{sEns}_{\mathbb{Q}}^{1-red}$  la structure de modèle induite. On notera que toute fibration dans cette catégorie est en particulier une fibration de Kan.

*Démonstration.* La propriété (MC2) s'obtient en passant aux groupes d'homologie, tout comme la stabilité par rétracte des équivalences rationnelles. Celles pour les cofibrations suit de celle des ensembles simpliciaux et celle des fibrations est automatique puisque elles sont définies par propriété de relèvement à droite. Pour (MC5), on remarque que si  $X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{\sim} Y$  est une factorisation dans  $\mathbf{sEns}$  où  $X, Y$  sont 1-réduits, alors, en notant que l'image  $i(X)$  est également 1-réduite, on obtient une cofibration  $X \hookrightarrow Z_{red}$  où  $Z_{red}$  est le complexe simplicial obtenu en ne gardant que les 0 et 1-simplexes dans l'image de  $i(X)$  (c'est à dire qu'on a retiré les autres et toutes leurs dégénérescences). Comme  $Z \rightarrow Y$  est fibration et  $Y$  1-réduit, il suit que le morphisme d'ensemble simplicial induit  $Z_{red} \rightarrow Z \rightarrow Y$  est encore une fibration de Kan (il n'y aucune condition non-triviale à vérifier dans la condition de Kan par rapports aux simplexes que nous avons enlevé). Par ailleurs, c'est une équivalence faible pour les mêmes raisons : les groupes d'homotopie simpliciaux d'un remplacement fibrant  $\tilde{Z}$  de  $Z$  sont les mêmes que ceux du remplacement fibrant  $\tilde{Z}_{red}$  obtenu en réduisant  $\tilde{Z}$  (ceci ne change aps son caractère fibrant en vertu du même argument que précédemment puisque  $\{*\}$  est réduit). En effet, on a rien changé dans les groupes d'homotopie en degré  $\geq 2$  et les autres sont nuls puisque ceux de  $Y$  le sont.

Ainsi  $X \hookrightarrow Z_{red} \rightarrow Y$  est bien une cofibration suivie d'une fibration de Kan acyclique qui par définition de la structure de modèle est la même chose qu'un morphisme ayant la propriété de relèvement des cofibrations (puisque c'est le cas dans  $\mathbf{sEns}$ ). Montrons maintenant la propriété de relèvement des fibrations qui sont des équivalences rationnelles.



Soit  $X \rightarrow Y$  une fibration et une équivalence rationnelle. D'après ce qu'on vient de voir, on peut la factoriser sous la forme  $X \hookrightarrow Z \xrightarrow{\sim} Y$  sous la forme d'une cofibration et d'une fibration acyclique (pour la nouvelle structure de modèle). D'après la propriété 2 pour 3,  $X \hookrightarrow Z$  est aussi une équivalence rationnelle. Ainsi elle a la propriété de relèvement à gauche par rapport à toute fibration acyclique de la nouvelle structure et en particulier  $X \rightarrow Y$ . Le relèvement induit dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xlongequal{\quad} & X \\ \downarrow \wr & \nearrow \wr & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

assure que  $X \rightarrow Y$  est un rétracte de  $Z \xrightarrow{\sim} Y$  et donc a bien la propriété de relèvement à gauche par rapport à toute cofibration. L'existence de l'autre factorisation est plus délicate et technique et nous renvoyons à [15].  $\square$

**Proposition 5.6.11.** Les objets fibrants de la catégorie de modèle  $\mathbf{sEns}_{\mathbb{Q}}^{1-red}$  sont exactement les ensembles simpliciaux fibrants et rationnels.

*Démonstration.* Ils sont nécessairement fibrants puisque des fibrations dans cette catégorie de modèle sont en particulier des fibrations de Kan. Pour montrer qu'ils sont de plus rationnels, on utilise le fait que l'on peut représenter toute application de degré  $k$  de  $S^n \rightarrow S^n$  (c'est à dire induisant la multiplication par  $k$  sur les groupes d'homotopie) par une cofibration qui est une équivalence rationnelle. En effet si  $f$  est une telle application, on construit  $S^n \times [0, 1] \coprod_f S^n = cyl(f)$  où le recollement identifie  $S^n \times \{1\}$  avec son image par  $f$ . L'inclusion  $S^n \hookrightarrow cyl(f)$  est donc la multiplication par  $k$  en homotopie et induit donc un isomorphisme au niveau des groupes d'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . Il suit de l'existence du relèvement dans

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sing}_{\bullet}(S^n)_{\bullet, red} & \longrightarrow & X \\ \downarrow \wr & \nearrow \wr & \downarrow \\ \mathrm{Sing}_{\bullet}(cyl(f))_{\bullet, red} & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

divisibles par tout entier.  $\square$

**Corollaire 5.6.12.** Tout espace simplement connexe a un remplacement rationnel  $X \xrightarrow{\sim} X_{\mathbb{Q}}$  où  $X_{\mathbb{Q}}$  est un espace rationnel. De plus  $X_{\mathbb{Q}}$  est un CW-complexe relatif.

La dernière assertion se démontre comme le fait que la réalisation géométrique est un CW-complexe. Par ailleurs, quitte à passer d'abord au revêtement universel, on peut donc associer à tout espace un espace rationnel canonique, cela dit cette opération perd évidemment toute information sur le groupe fondamental.

On définit de même une structure de modèle sur les cdgas 1-réduites (qui sont canoniquement augmentées)  $\mathbf{CDGA}^{1-red}$  dont la catégorie homotopique est équivalente à la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{CDGA})$  dont les objets sont les cdgas simplement connexes<sup>149</sup>. Ceci découle de la preuve de la Proposition 5.2.29, qui montre que si  $A$  est simplement connexe, on peut trouver un modèle de Sullivan (minimal)  $(Sym(V^*), d) \rightarrow A$  avec  $V^0 = V^1 = 0$ .

On énonce maintenant le résultat fondamental expliquant la relation entre la théorie homotopique des espaces rationnels et les cdgas, du à Quillen, Sullivan :

<sup>149</sup>. celles qui sont connexes et dont la cohomologie en degré 1 est nulle

**Théorème 5.6.13.** L'adjonction de Quillen de la proposition 5.6.3 induit une *adjonction de Quillen*  $\mathbf{sEns}_{\mathbb{Q}}^{1-red} \xrightleftharpoons[S_{\bullet}^{\Delta}]{\Omega_{PL}^*} (\mathbf{CDGA}^{1-red})^{op}$  et une équivalence de catégorie

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{Top}_{\mathbb{Q}f}^1) \simeq \mathbf{Ho}(\mathbf{CDGA}_f^1)$$

entre les catégories homotopiques des espaces simplement connexes de type fini (c'est à dire dont les groupes d'homologie sont de dimension finie en chaque degré) et les cdgas simplement connexes de type fini (là encore degré par degré).

*Remarque 5.6.14.* Le théorème reste vrai pour des espaces dits *nilpotents*, c'est à dire ceux qui sont connexes et dont le groupe fondamental est nilpotent et agit de manière nilpotente sur les groupes d'homotopie supérieurs (une fois étendu la définition de la rationalisation pour ces espaces).

Comme toute cdga connexe a un modèle de Sullivan minimal connexe (et en utilisant les lemmes 5.3.4 et 5.3.9), on obtient

**Corollaire 5.6.15.**

- Les classes d'isomorphismes dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top}_{\mathbb{Q},f}^1)$  sont les mêmes que les classes d'isomorphismes d'algèbres de Sullivan minimale  $(Sym(V), d)$  avec  $V^0 = V^1 = 0$ .
- On a des bijections naturelles entre  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Top}_{\mathbb{Q}}^1)}(X, Y)$  et les classes d'homotopie de Sullivan (resp. isomorphismes) entre modèles de Sullivan (resp. minimaux) de  $X$  et  $Y$ .

Le point fondamental de la preuve du Théorème 5.6.13 est le suivant :

**Proposition 5.6.16.** Soit  $(Sym(V^*), d)$  une algèbre de Sullivan minimale avec  $V^0 = V^1 = 0$ . On a un accouplement naturel bilinéaire non-dégénéré  $\pi_n(|S_{\bullet}^{\Delta}(Sym(V^*), d)|) \times V^n \rightarrow \mathbb{Q}$  qui induit un isomorphisme  $V^n \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\pi_n(|S_{\bullet}^{\Delta}(Sym(V^*), d)|), \mathbb{Q})$  si  $V^n$  est de type fini.

Puisque tout espace connexe admet un modèle minimal (que l'on peut choisir de telle sorte que  $V^0 = V^1 = 0$ ) et par invariance homotopique de la réalisation spatiale (théorème 5.6.13) on en déduit le critère très pratique suivant :

**Corollaire 5.6.17.** Soit  $X$  un espace topologique simplement connexe de type fini et  $(Sym(V), d)$  un modèle de Sullivan minimal de  $X$ . Alors on a des isomorphismes

$$V^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\pi_n(X), \mathbb{Q}).$$

Le corollaire donne un moyen efficace très pratique pour calculer les groupes d'homotopie rationnels d'un espace simplement connexe. Il suffit de dualiser les  $V^i$  d'un modèle minimal.

*Aperçu de la preuve de la Proposition 5.6.16.* Par l'équivalence de Quillen entre  $\mathbf{sEns}$  et  $\mathbf{Top}$ , il suffit de démontrer le résultat au niveau des groupes d'homotopie simplifiées de  $S_{\bullet}^{\Delta}(Sym(V^*), d)|)$ .

Notons  $Sym(S_n^*)$  le modèle minimal de la sphère de dimension  $n$  (Proposition 5.5.5) ; ainsi  $S_n^n$  a un générateur et les autres composantes sont nulles si  $n$  est impair et  $S_n^{2n-1}$  a un autre générateur si  $n$  est pair (et la différentielle de ce dernier est le carré du générateur de  $S_n^n$ ).

On a des bijections induites par nos diverses adjonctions de Quillen :

$$\begin{aligned}
 (33) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{sEns})}(\partial\Delta_{\bullet}^{n+1}, S_{\bullet}^{\Delta}((Sym(V^*), d)) \\
 \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{CDGA}^{op})}(\Omega_{PL}^*(\partial\Delta_{\bullet}^{n+1}), (Sym(V^*), d)) \\
 \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{CDGA})}((Sym(V^*), d), \Omega_{PL}^*(\partial\Delta_{\bullet}^{n+1})) \\
 \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{CDGA})}((Sym(V^*), d), Sym(S_n^*))
 \end{aligned}$$

le dernier isomorphisme étant induit par les propriétés de relèvement des algèbres de Sullivan et le quasi-isomorphisme naturel  $Sym(S_n^*) \rightarrow \Omega_{PL}^*(\partial\Delta_{\bullet}^{n+1})$ .

Par ailleurs, par formalité de  $Sym(S_n^*)$  (Proposition 5.5.5), lemme 5.3.9 et propriétés des algèbres semi-libres, on a qu'une classe d'homotopie de morphisme de  $\mathbf{cdga} (Sym(V^*), d)$  dans  $Sym(S_n^*)$  est uniquement déterminée par sa composante  $\phi : V^n \rightarrow H^n(S_n^*) \cong \mathbb{Q}$ . On obtient ainsi une application

$$\pi_n(S_{\bullet}^{\Delta}((Sym(V^*), d))) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{sEns})}(\partial\Delta_{\bullet}^{n+1}, S_{\bullet}^{\Delta}((Sym(V^*), d))) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V^n, \mathbb{Q})$$

induisant notre accouplement. Pour vérifier qu'il est bilinéaire, on utilise un modèle minimal du wedge  $S^n \vee S^n$  de deux sphères et vérifier que c'est précisément un isomorphisme nécessite d'étudier en détail la construction par induction sur  $i$  et sur la dimension de  $V^i$ .

La preuve montre que ce pairing est non-dégénéré si les groupes d'homotopie  $\pi_n(S_{\bullet}^{\Delta}((Sym(V^*), d))) \otimes \mathbb{Q}$  sont de types finis ce que l'on peut montrer être équivalent à demander que  $V^n$  est de dimension finie.  $\square$

*Points essentiels de la preuve du théorème 5.6.13.* Que l'adjonction passe aux catégories 1-réduites se voit directement à partir de la définition des foncteurs  $\Omega_{PL}^*$  et  $S_{\bullet}^{\Delta}$ . Par les équivalences de catégories homotopiques que nous avons vu, la deuxième affirmation se réduit à montrer que l'unité et la counité de l'adjonction induite

$$\mathrm{Ho}(\mathbf{sEns}_{\mathbb{Q}}^{1-red}) \xrightleftharpoons[\mathbb{R}S_{\bullet}^{\Delta}]{\mathbb{L}\Omega_{PL}^*} (\mathrm{Ho}(\mathbf{CDGA}^{1-red})^{op}) \text{ entre les catégories homotopiques sont}$$

des équivalences faibles lorsque  $V$  est de type fini en chaque degré. C'est à dire que pour tout modèle de Sullivan, que l'on peut supposer minimal,  $(Sym(V), d) \rightarrow A$  et tout ensemble simplicial fibrant 1-réduit  $X_{\bullet}$ , les morphismes canoniques

$$(34) \quad (Sym(V), d) \longrightarrow \Omega_{PL}^*(S_{\bullet}^{\Delta}((Sym(V), d)))$$

$$(35) \quad X_{\bullet} \longrightarrow S_{\bullet}^{\Delta}(\Omega_{PL}^*(X_{\bullet}))$$

sont des équivalences faibles (respectivement dans  $\mathbf{CDGA}$  et dans  $\mathbf{sEns}_{\mathbb{Q}}^{1-red}$ ). On remarque que le fait que (35) soit une équivalence faible découle en fait de (34). En effet, cette propriété est équivalente par définition au fait que  $|X_{\bullet}| \rightarrow |S_{\bullet}^{\Delta}(\Omega_{PL}^*(X_{\bullet}))|$  est une équivalence rationnelle ce qui est équivalent par le lemme et définition 5.6.6 à demander que le morphisme d'algèbres différentielles associatives graduées

$$C^*(|S_{\bullet}^{\Delta}(\Omega_{PL}^*(X_{\bullet}))|, \mathbb{Q}) \longrightarrow C^*(X_{\bullet}, \mathbb{Q})$$

est un quasi-isomorphisme, ce qui par le théorème de Sullivan-De Rham 5.4.15, est équivalent à demander que le morphisme de  $\mathbf{cdgas}$

$$\Omega_{PL}^*(|S_{\bullet}^{\Delta}(\Omega_{PL}^*(X_{\bullet}))|, \mathbb{Q}) \longrightarrow \Omega_{PL}^*(X_{\bullet}, \mathbb{Q})$$

est un quasi-isomorphisme. En prenant un modèle de Sullivan  $(Sym(V), d) \xrightarrow{\sim} A$  avec  $V^0 = V^1 = 0$  de  $X_\bullet$ , on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{PL}^*(|S_\bullet^\Delta(\Omega_{PL}^*(X_\bullet))|, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\quad} & \Omega_{PL}^*(X_\bullet, \mathbb{Q}) \\ & \nwarrow \quad \nearrow \sim & \\ & (Sym(V), d) & \end{array}$$

d'où l'on déduit que le fait que (34) est un quasi-isomorphisme implique que (35) l'est aussi.

Maintenant le fait que (34) soit une équivalence faible découle en fait de la Proposition 5.6.16. En effet, si  $V$  est concentré en un seul degré, alors, nécessairement la différentielle est nulle et cela devient une conséquence de cette proposition et du théorème d'Hurewicz<sup>150</sup> qui donne un isomorphisme en cohomologie en degré  $n$ . On travaille ensuite par récurrence sur  $n$  pour se ramener à montrer qu'il suffit de démontrer le résultat pour tout  $V$  tel que  $V_i > n = 0$  (en utilisant essentiellement que l'homologie en degré  $< n$  n'interagit pas  $V^{i>n}$ ).

Le cas  $V^{i>n} = 0$  se traite là aussi par récurrence en considérant un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccc} Sym(V^{<n}) & \hookrightarrow & Sym(V^{<n} \oplus V^n) & \twoheadrightarrow & Sym(V^n) \\ \sim \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim \\ \Omega_{PL}^*(S_\bullet^\Delta(Sym(V^{<n}))) & \longrightarrow & \Omega_{PL}^*(S_\bullet^\Delta(Sym(V^{<n} \oplus V^n))) & \longrightarrow & \Omega_{PL}^*(S_\bullet^\Delta(Sym(V^n))) \end{array}$$

où les quasi-isomorphismes verticaux à droite et à gauche sont obtenus par l'hypothèse de récurrence et implique que celui du milieu en est un.  $\square$

*Exemple 5.6.18 (Théorème de Serre).* Dans la proposition 5.5.5 nous avons déterminé le modèle minimal  $(Sym(V_n^*), d)$  des sphères  $\mathbb{S}^n$ . D'un autre côté, la proposition 5.6.16 nous assure que les groupes d'homotopie des sphères vérifient

$$\pi_m(\mathbb{S}^n) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(V_n^m, \mathbb{Q})$$

puisque les  $V_n^i$  sont de dimension finie. La forme explicite des  $V_n^*$  déterminée dans la proposition 5.5.5 nous redonne alors immédiatement le Théorème de Serre 1.7.9.

Soit  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  une fibration de Serre avec  $B$  simplement connexe et  $E$  connexe par arcs. On suppose de plus que  $E$  et  $F$  sont de type finis. Soit  $(Sym(V), d) \rightarrow \Omega_{PL}^*(B)$  un modèle de Sullivan (que l'on peut choisir minimal) de  $B$ . Soit maintenant un modèle de Sullivan relatif (que l'on peut encore prendre minimal)

$$\begin{array}{ccccc} (Sym(V), d) & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{PL}^*(B) & \xrightarrow{p^*} & \Omega_{PL}^*(E) \\ & \searrow id \otimes 1 & & \nearrow \sim & \\ & & (Sym(V) \otimes Sym(W), D) & & \end{array}$$

<sup>150.</sup> précisément on l'applique dans le cas d'un espace qui a un unique groupe d'homotopie non-trivial, ce qui s'appelle un espace d'Eilenberg-MacLane pour lesquels on sait exhiber leur anneau de cohomologie

du morphisme de cdga induit par  $p : E \rightarrow B$  (dont l'existence découle de la proposition 5.3.8). La flèche canonique  $i^* : \Omega_{PL}^*(E) \rightarrow \Omega_{PL}^*(F)$  induit un morphisme canonique

$$(36) \quad \mathbb{Q} \otimes_{(Sym(V), d)} (Sym(V) \otimes Sym(W), D) \xrightarrow{id \otimes i^*} \Omega_{PL}^*(F)$$

puisque  $i^* \circ p^* = 0$ . Le produit tensoriel à la source est le produit tensoriel dans la catégorie des  $(Sym(V), d)$ -modules gradués et hérite d'une structure de cdga canonique<sup>151</sup> définie par le produit tensoriel des multiplications. Pour cette structure, la flèche (36) est un morphisme de cdgas.

**Proposition 5.6.19.** Sous les hypothèses précédentes, le morphisme de cdgas

$$\mathbb{Q} \otimes_{(Sym(V), d)} (Sym(V) \otimes Sym(W), D) \xrightarrow{id \otimes i^*} \Omega_{PL}^*(F)$$

est un quasi-isomorphisme.

La preuve de cette proposition est essentiellement le fait qu'une équivalence de Quillen préserve les limites homotopiques et que la fibre d'une fibration est faiblement équivalente à la limite homotopique (c'est à dire le noyau homotopique) du morphisme.

Notons que l'on peut réécrire  $\mathbb{Q} \otimes_{(Sym(V), d)} (Sym(V) \otimes Sym(W), D) \cong (Sym(W), \bar{D})$

où la différentielle  $\bar{D}$  est induite par la restriction  $W \rightarrow (Sym(V) \otimes Sym(W))$  dans le passage au quotient.

*Exemple 5.6.20* (Cohomologie de  $\Omega X$ ). Considérons la fibration  $\Omega_x X \rightarrow P_x X \rightarrow X$  d'un espace connexe par arcs  $X$  où  $P_x X$  désigne les chemins commençant en  $x$  et  $\Omega_x X$  les lacets pointés en  $x$ . Soit  $(Sym(V), d) \rightarrow \Omega_{PL}^*(X)$  un modèle de Sullivan *minimal* de  $X$  avec  $V^1 = V^0 = 0$ . L'espace  $P_x X$  est contractible. Un modèle de Sullivan relatif de  $(Sym(V), d) \rightarrow \Omega_{PL}^*(X) \rightarrow \Omega_{PL}^*(P_x X)$  est alors donné par l'inclusion  $Sym(V) \rightarrow (Sym(V \oplus V[-1]), D)$  qui envoie  $V$  sur lui même identiquement. Ici la différentielle  $D$  est celle donnée par le cone de l'identité. Plus exactement, pour  $v \in V^n$ , on choisit  $D(v) = d(v) \in Sym(V) \subset Sym(V \oplus V[-1])$  et pour  $w \in V[-1]^n = V^{n+1}$  on choisit  $d(w) = w - s(d(w)) \in V^{n+1} \oplus Sym(V) \otimes V[-1]$  où  $s : Sym(V) \rightarrow Sym(V \oplus V[-1])$  est l'unique dérivation de degré  $-1$  définie par la restriction  $s|_V$  qui envoie  $v$  sur le même élément mais vu dans  $V[-1]$  (et donc vu comme étant en degré  $n-1$ ). Ainsi  $s(v_1 \cdots v_m) = \sum \pm v_1 \cdots v_{j-1} s(v_j) \cdots v_m$  où  $\pm$  est  $-1$  à la puissance la somme des degrés de  $v_1, \dots, v_{j-1}$ .

*Exercice 5.6.21.* Montrer que  $(Sym(V \oplus V[-1]), D)$  est bien une cdga, de Sullivan et est quasi-isomorphe à  $\mathbb{Q}$  (indication, il suffit de voir que cette cdga a une filtration dont le gradué associé est  $E(V)$  où  $V$  est muni de la différentielle nulle et de savoir que si un morphisme entre deux complexes filtrés est un quasi-isomorphisme sur le gradué associé, alors il l'est sur les complexes eux-mêmes).

On en déduit que l'inclusion  $(Sym(V), d) \hookrightarrow Sym(V) \otimes Sym(V[-1]) \cong (Sym(V \oplus V[-1]), D)$  est bien un modèle de Sullivan de  $(Sym(V), d) \rightarrow \Omega_{PL}^*(X) \rightarrow \Omega_{PL}^*(P_x X)$ .

<sup>151</sup>. le produit tensoriel au dessus de  $A$  est le coproduit dans la catégorie des  $A$ -cdgas pour toute cdga  $A$ .

La Proposition 5.6.19 nous donne alors qu'un modèle de Sullivan de l'espace des lacets pointés  $\Omega_x X$  est

$$\mathbb{Q} \otimes_{Sym(V)} (Sym(V \oplus V[-1]), D) \cong (Sym(V[-1]), \overline{D}).$$

Par construction, comme  $(Sym(V), d)$  est un modèle minimal et  $V^1 = V^0 = 0$ , la différentielle  $d$  est à valeur dans  $Sym^{\geq 2}(V)$  et ainsi  $D$  a toujours au moins une composante dans  $Sym^{\geq 1}(V)$ . Il suit que  $\overline{D} = 0$ . Par conséquent, on obtient que *le modèle minimal de  $\Omega_x X$  est  $(Sym(V[-1]), 0)$  où  $V$  est l'espace gradué sous-jacent au modèle minimal de  $X$ .*

En particulier, on obtient immédiatement la cohomologie de  $\Omega_x X$ , que c'est une algèbre symétrique et que cet espace est formel !

## VI. APPENDICE : (R)APPELS DE TOPOLOGIE ET THÉORIE DES CATÉGORIES

Le but de cet appendice est de fixer certaines notations, conventions et de préciser ou rappeler selon les cas quelques résultats ou notions de topologie et catégories utilisés. Il est écrit dans un style plus sec et essentiellement sans preuves (que l'on peut trouver dans des textes classiques de topologie ou catégories, par exemple ceux de la bibliographie ou vos notes de cours préférées).

### 6.1. QUELQUES NOTIONS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE

Nous précisons dans cette partie quelques notations et résultats généraux de topologie générale que nous allons utiliser. Nous utilisons la terminologie standard suivante

**Définition 6.1.1.** Un espace topologique  $X$  est un ensemble muni d'une famille de sous-ensembles  $U \subset X$  appelés ouverts, satisfaisant les propriétés suivantes :

- (1)  $X$  et l'ensemble vide  $\emptyset$  sont ouverts,
- (2) une réunion quelconque  $\bigcup_i U_i$  d'ouverts est un ouvert,
- (3) l'intersection d'une famille *finie* d'ouverts est un ouvert.

Un sous-espace topologique de  $X$  est un sous-ensemble  $A \subset X$  muni de la topologie induite, c'est à dire dont les ouverts sont ceux les sous-ensemble  $U \cap A$  où  $U$  est un ouvert de  $X$ .

Un *homéomorphisme* est une bijection continue dont la réciproque est aussi continue.

- Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  entre espaces topologiques est continue si la pré-image par  $f$  de tout ouvert est un ouvert.
- Un espace topologique est discret si tous sous-ensemble est ouvert.
- Un espace topologique est grossier si ses seuls ouverts sont lui-même et  $\emptyset$ .

*Notation 6.1.2.* On notera  $X \cong Y$  lorsque  $X$  et  $Y$  seront homéomorphes.

**6.1.1. Espaces séparés, compacts et variantes.** Une propriété très utile en topologie est celle d'être un espace séparé, qui est automatique pour les espaces métrisables, mais n'est pas nécessairement préservé par les passages aux quotients (voir 6.1.3). Cette propriété qui signifie que les points sont séparés (au sens du français) par des ouverts fait partie d'un hiérarchie d'axiomes dits de séparation classique qui est récapitulée dans la définition suivante :

**Définition 6.1.3** (Axiomes de Séparation). Soit  $X$  un espace topologique.

$(T_0)$ :  $X$  est  $T_0$  (ou de Kolmogoroff) si pour tout point  $x \neq y$ , il existe un ouvert contenant l'un des points et pas l'autre.

$(T_1)$ :  $X$  est dit <sup>152</sup>  $T_1$  si pour tout points  $x \neq y$ , il existe un ouvert  $U_x$  contenant  $x$  et pas  $y$  et un ouvert  $U_y$  contenant  $y$  et pas  $x$ .

**Séparé**  $= (T_2)$ :  $X$  est **séparé** si pour tout  $x \neq y$ , il existe des ouverts *disjoints*  $U_x$  contenant  $x$  et  $U_y$  contenant  $y$ .

---

<sup>152</sup>. parfois appelé de Fréchet, mais c'est une terminologie ambiguë et non-univoque qu'il vaut mieux proscrire

( $T_3$ ):  $X$  est  $T_3$  ou **régulier** s'il est  $T_0$  et vérifie en plus la propriété ( $\tilde{T}_3$ ) : pour tout fermé  $F$  et point  $x \notin F$ , il existe des ouverts  $O_x, O_F$  disjoints contenant respectivement  $x$  et  $F$ .

( $T_4$ ):  $X$  est  $T_4$  ou **normal** s'il est  $T_1$  et vérifie en plus la propriété ( $\tilde{T}_4$ ) : si  $A, B$  sont des fermés disjoints dans  $X$ , il existe des ouverts  $O_A, O_B$  disjoints contenant respectivement  $A$  et  $B$ .

*Remarque 6.1.4.* En anglais, un espace séparé est appelé espace de *Hausdorff*.

Au plus un espace est élevé dans cette hiérarchie, au plus il est facile de construire des fonctions continues sur ces espaces.

Ces notions de séparation sont strictement différentes et s'impliquent les unes les autres. En particulier les espaces normaux et régulier sont séparés<sup>153</sup>. On pourra consulter les exercices pour voir plus d'exemples.

*Exemple 6.1.5.* Tout espace métrisable est séparé et même normal. C'est également le cas de toute variété (au sens français du terme, ce qui inclut qu'elle est séparée notamment).

Un sous-ensemble de  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  muni de la topologie de Zariski (c'est à dire dont les fermés sont les ensembles de racines d'un polynôme) n'est pas séparé.

*Exemple 6.1.6.* Soit  $(X, \preceq)$  un ensemble (partiellement) ordonné. Pour  $x \in X$ , on introduit les parties :

$$D_x = \{y \in X \mid x \preceq y\} \text{ et } G_x = \{y \in X \mid y \preceq x\}.$$

Les ensembles  $D_x$  (respectivement les ensembles  $G_x$ ) forment la base d'une topologie appelée topologie droite (resp. gauche). Ces espaces topologiques sont  $T_0$  mais pas  $T_1$  en général. Par ailleurs tout espace  $T_0$  qui vérifie que l'intersection quelconque d'ouvert est ouverte est homéomorphe à un ensemble partiellement ordonné muni de la topologie droite.

Une des principales propriétés des espaces normaux est résumée dans le Théorème suivant.

**Théorème 6.1.7** (Tietze). Soit  $X$  un espace normal et  $F$  un fermé de  $X$ . Toute fonction continue  $\phi : F \rightarrow \mathbb{R}$  s'étend en une fonction continue  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  (i.e. vérifiant que pour tout  $x \in F$ ,  $\Phi(x) = \phi(x)$ ).

En prenant  $F = A \cup B$  la réunion de deux fermés disjoints, on obtient comme corollaire

**Lemme 6.1.8** (Urysohn). Soient  $A, B$  deux fermés disjoints d'un espace normal. Alors il existe une fonction continue sur  $X$  qui vaut 0 sur  $A$  et 1 sur  $B$ .

Une autre notion vraiment fondamentale est celle de compacité et ses variantes. Il existe une petite subtilité à son sujet pour les espaces topologiques généraux et des différences de terminologie entre certaines traditions auxquelles il convient de faire attention, cf remarque 6.1.12.

---

<sup>153</sup>. au sens du français. Les anglophones font la distinction entre la propriété de séparation des fermés et celles d'être  $T_1$  ou  $T_0$  en plus



**Définition 6.1.9** (Espace compact). Un espace topologique  $X$  est dit compact s'il est séparé et que de tout recouvrement de  $X$  par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini.

Un espace est dit localement compact, si pour tout point  $x \in X$ , il existe un voisinage compact de  $x$ .

**Lemme 6.1.10.** Un fermé dans un compact est compact.

*Exercice 6.1.11.* Démontrer le lemme.

*Remarque 6.1.12.* Bien entendu, la première propriété est inutile dans les espaces métrisables car ces derniers sont toujours séparés.

Par ailleurs, on notera qu'en littérature anglo-saxonne, l'hypothèse  $X$  séparé est souvent omise<sup>154</sup>, ce qui n'est pas le cas dans la tradition française. Par exemple un espace muni de la topologie grossière est toujours compact au sens anglo-saxon usuel. De même, si  $Y$  n'est pas séparé, alors un précompact (c'est à dire un espace vérifiant la propriété de recouvrement) de  $Y$  n'est pas forcément fermé dans  $Y$  (il suffit de considérer un singleton dans un espace grossier pour trouver un exemple).

L'hypothèse séparé est *fondamentale* pour obtenir la proposition bien connue et utile :

*Proposition 6.1.13.* Soit  $X$  un espace compact et  $Y$  un espace séparé.

- (1) Tout compact de  $Y$  est fermé ;
- (2) pour toute application continue  $f : X \rightarrow Y$ , on a que  $f(X)$  est compact.
- (3) Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue, injective d'un compact dans un espace séparé alors c'est un homéomorphisme de  $X$  sur  $f(X) \subset Y$  (où  $f(X)$  est muni de sa topologie de sous-espace de  $Y$ ).

**Proposition 6.1.14.** Tout espace compact est normal.

**Définition 6.1.15** (Espace paracompact). Un espace paracompact est un espace topologique *séparé* vérifiant que tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  admet un *raffinement localement fini*, c'est à dire un recouvrement par des ouverts  $(V_j)_{j \in J}$  tel que chaque  $V_j$  est inclus dans un  $U_i$ , et de sorte que tout point est inclus dans un nombre *fini* de  $V_j$ .

*Exemple 6.1.16.* Toute variété topologique (au sens du français) est paracompacte. Tout espace métrisable est également paracompact.

Une des principales utilisations des espaces paracompact est le résultat suivant.

**Proposition 6.1.17** (partition de l'unité). Soit  $X$  un espace paracompact et  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Alors il existe un ensemble  $(f_i)_{i \in I}$  de fonctions continues de  $X$  dans  $[0, 1]$  vérifiant que  $f_i$  est à support dans  $U_i$ , tout point  $x$  admet un voisinage sur lequel seul un nombre fini de  $f_i$  sont non-nulles et de plus  $\sum_{i \in I} f_i = 1$  sur ce voisinage.

**6.1.2. Topologie compacte-ouverte pour les espaces de fonctions.** Soit  $X, Y$  deux espaces topologiques. On note  $Y^X$  l'espace des fonctions continues  $Y^X := \{f : X \rightarrow Y, f \text{ continue}\}$ . Ces objets apparaissent régulièrement en topologie algébrique, par exemple pour définir les espaces de chemins 1.6.7. La topologie de ces espaces est donnée par

154. c'est ce qu'on appelle un espace pré-compact en français

**Définition 6.1.18.** La topologie compacte-ouverte est la topologie sur  $Y^X$  dont les ouverts sont engendrés par les ensembles  $\widehat{U^K} = \{f : X \rightarrow Y, f(K) \subset U\}$  pour tous sous-ensembles  $U \subset Y$  ouvert et  $K \subset X$  compact.

Il n'est pas complètement évident de se rendre compte tout de suite que cette topologie est naturelle. C'est un peu plus évident si l'espace d'arrivée est métrique en vertu de la proposition suivante :

**Proposition 6.1.19.** Si  $Y$  est un espace métrisable, la topologie compacte-ouverte est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

La topologie-compacte ouverte est aussi la bonne topologie pour assurer que la composition ou l'évaluation  $X \times Y^X \rightarrow Y, (x, f) \mapsto f(x)$  sont continues, du moins sous des hypothèses de séparation et compacité suffisante.

**Lemme 6.1.20.** On suppose que  $X$  est localement compact, alors :

- (1) l'application d'évaluation  $ev : X \times Y^X \rightarrow Y$  définie par  $ev(x, f) = f(x)$  est continue.
- (2) Si de plus  $Y$  est localement compact et  $Z$  est séparé, l'application  $f \mapsto (y \mapsto f(-, y))$  induit un homéomorphisme  $Z^{X \times Y} \cong (Z^X)^Y$  et la composition  $(f, g) \mapsto g \circ f$  induit une application continue  $c : Y^X \times Z^Y \rightarrow Z^X$ .
- (3) Si  $Y, Z$  sont séparés, l'application qui à  $(f, g) \in Y^X \times Z^X$  associe l'application  $x \mapsto (f(x), g(x))$  est un homéomorphisme  $Y^X \times Z^X \cong (Y \times Z)^X$ .

*Exercice 6.1.21.* Démontrer le lemme 6.1.20.

**6.1.3. Espaces topologiques définis par des propriétés universelles.** Dans cette partie nous détaillons la topologie produit et la topologie de la réunion et plus généralement les espaces limites et colimites.

**Définition 6.1.22.** Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. La topologie produit sur  $\prod_{i \in I} X_i$  est la topologie la moins fine rendant continue les projections canoniques  $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j, (x_i) \mapsto x_j$ .

**Lemme 6.1.23.** Une base d'ouverts pour la topologie produit est donnée par les ouverts de la forme  $\prod_{i \in I} U_i$  où  $U_i$  est ouvert de  $X_i$  et seul un nombre fini de  $U_i$  sont différents de  $X_i$  entier.

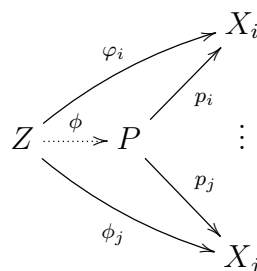
*Démonstration.* L'application  $p_j$  étant continue, il suit que pour tout  $U_j$  ouvert dans  $X_j$ ,  $U_j \times \prod_{i \neq j \in I} X_i = p_j^{-1}(U_j)$  doit être ouvert dans  $\prod_{i \in I} X_i$ . Une intersection finie d'ouvert étant ouverte il suit que les ensembles de la forme énoncée dans le lemme sont bien des ouverts pour la topologie produit. Considérons maintenant la topologie engendrée par ces ouverts (en prenant donc des réunions quelconques). Par définition, toute topologie rendant continue les  $p_j$  continue doit contenir ces ouverts et il suit que cette topologie est bien la moins fine.  $\square$

En particulier, pour un produit fini, un ouvert est une réunion de produits d'ouverts quelconque des  $X_i$ .

**Lemme 6.1.24.** Les applications continues de  $Z$  dans  $\prod_{i \in I} X_i$  sont en bijection avec les familles d'application continues  $(Z \xrightarrow{f_i} X_i)_{i \in I}$ .

Plus précisément, la topologie produit est, à homéomorphisme près, l'unique espace  $P$ , muni d'applications continues  $p_j : P \rightarrow X_j$ , tel que pour toute famille

d'applications  $\varphi_i : Z \rightarrow X_i$ , il existe une unique application  $\varphi : Z \rightarrow P$  rendant le diagramme<sup>155</sup>



commutatif.

*Exercice 6.1.25.* Démontrer le lemme 6.1.24.

*Démonstration.* Une application (ensembliste)  $f : Z \rightarrow \prod X_i$  est la donnée pour tout  $z \in Z$  d'un élément  $(f_i(z))_{i \in I} \in \prod X_i$  où chaque  $f_i(z) \in X_i$ . Par ailleurs, on a que  $f_i(z)$  est la composée  $p_i \circ f$  par définition de la projection. Ceci montre que toute application continue  $Z \rightarrow \prod X_i$  est uniquement déterminée par ses composantes  $f_i := p_i \circ f$ . Il reste à voir que  $f$  est continue si et seulement si les  $f_i$  le sont. Puisque la composée d'applications continues l'est et que les  $p_i$  sont continues, il reste à vérifier que  $f$  est continue si chaque  $f_i$  l'est. M Par le lemme 6.1.23, on est ramené au cas où  $U$  est de la forme  $(\prod_{j \in J} U_j) \times (\prod_{i \in I \setminus J} X_i)$  où les  $U_j$  sont des ouverts de  $X_j$ . Mais  $f_i^{-1}(U_i) = f^{-1}(p_i^{-1}(U_i))$  et donc  $f^{-1}(U) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(p_j^{-1}(U_j)) = \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j)$  est ouvert.

Ceci prouve la première assertion et le fait que la topologie vérifie la propriété équivalente énoncée dans le diagramme. L'unicité à homéomorphisme près résulte de l'unicité de l'application  $\phi$ . Soit  $P'$  une autre solution, alors les projections  $p_j : \prod X_i \rightarrow X_j$  détermine une unique application continue  $f : \prod X_i \rightarrow P'$ . et de même on obtient une unique application  $g : P' \rightarrow \prod X_i$  rendant les diagrammes commutatifs. En composant ces flèches on obtient une application  $f \circ g$  rendant le diagramme commutatif avec  $Z = P' = P$ . Comme l'identité est aussi solution, par unicité  $f \circ g = id$ . De même  $g \circ f = id$  et on a que  $f$  et  $g$  sont des homéomorphismes inverses l'un de l'autre.  $\square$

On dispose aussi d'une topologie canonique "duale" de la topologie produit, celle sur les réunions disjointes, appelée plus simplement coproduit.

Si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille d'ensemble, on note  $\coprod_{i \in I} X_i$  leur réunion disjointe (parfois appelée externe), c'est à dire l'ensemble  $\{(x_i, i), i \in I, x_i \in X_i\}$  formé des éléments de chaque ensemble (à ne pas confondre avec la réunion "interne" de sous-ensembles d'un même ensemble).

On a les inclusions canoniques  $i_j : X_j \hookrightarrow \coprod_{i \in I} X_i$  qui envoie un élément de  $X_j$  sur l'élément correspondant dans la réunion. On identifiera souvent  $X_i$  avec la composante de la réunion qui lui correspond (soit l'image  $i_i(X_i)$ ), et parfois on dira plus précisément la composante indiquée par  $i$ .

**Définition 6.1.26.** Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. La topologie coproduit sur  $\coprod_{i \in I} X_i$  est la topologie la plus fine rendant continue les inclusions canoniques  $i_j : X_j \hookrightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ .

<sup>155.</sup> on a représenté que deux objets  $X_i$  dans le diagramme mais ils y sont bien sûr tous

Les ouverts de la topologie coproduit sont très faciles à décrire ; ce sont juste les réunions d'ouverts :

**Lemme 6.1.27.** Un ouvert de la topologie coproduit est une réunion disjointe  $\coprod_{i \in I} U_i$  d'ouverts  $U_i \subset X_i$ .

En particulier, si chaque  $X_i$  est connexe (resp. connexe par arcs) alors les composantes connexes (resp. connexes par arcs) sont exactement les  $X_i$ .

**Lemme 6.1.28.** Les applications continues de  $\coprod_{i \in I} X_i$  dans un espace topologique  $W$  sont en bijection avec les familles d'application continues  $(X_i \xrightarrow{g_i} W)_{i \in I}$ , la bijection étant donnée par les compositions avec les inclusions canoniques :  $(\coprod X_i \xrightarrow{\psi} W) \mapsto (g \circ i_j)_{j \in I}$ .

Plus précisément, la topologie coproduit est, à homéomorphisme près, l'unique espace  $C$ , muni d'applications continues  $i_j : X_j \rightarrow C$ , tel que pour toute famille d'applications  $\psi_i : X_i \rightarrow W$ , il existe une unique application  $\psi : C \rightarrow W$  rendant le diagramme<sup>156</sup>

$$\begin{array}{ccccc}
 X_i & & & & \\
 & \searrow \psi_i & & & \\
 & & C & \xrightarrow{\phi} & W \\
 & \nearrow i_i & & & \\
 \vdots & & & & \\
 & \nearrow i_j & & & \\
 X_j & & & & \\
 & \searrow \psi_j & & &
 \end{array}$$

commutatif.

Les deux exemples précédents de topologie (co)produit sont typiques des exemples de topologie (co)limite. La présentation de leur propriété universelle en terme de diagramme est facile et relativement anecdotique dans leur cas, mais elle est en revanche le bon moyen de comprendre des exemples plus compliqués et le bon moyen de comprendre les généralisations dans des catégories quelconques de ces notions. Deux exemples du même type sont donnés par les produits fibrés (définition 6.1.44) et coproduit fibré/recollement (définition 6.1.40) :

**Définition 6.1.29.**

**Lemme 6.1.30** (Propriété universelle de la topologie quotient). L'espace quotient  $X/\tilde{\mathcal{R}}$  vérifie que toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  qui est constante sur les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$ , se factorise de manière *unique* sous la forme

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \pi \searrow & & \nearrow \tilde{f} \\
 & X/\mathcal{R} & .
 \end{array}$$

Autrement dit, il existe une unique application continue  $\tilde{f} : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$  qui relève  $f$ , c'est à dire telle que  $f = \tilde{f} \circ \pi$ .

Tout autre espace topologique  $\tilde{X}$  muni d'une application  $p : X \rightarrow \tilde{X}$  vérifiant la même propriété de factorisation que la topologie quotient est *canoniquement* homéomorphe à  $X/\mathcal{R}$ .

<sup>156</sup>. on a représenté que deux objets  $X_i$  dans le diagramme mais ils y sont bien sûr tous

*Exercice 6.1.31.* Démontrer cette propriété.

Un cas particulier qui revient souvent est lorsque la relation d'équivalence est induite par une structure de groupes. De manière générale, les groupes topologiques ont des propriétés assez remarquables. Rappelons qu'un groupe topologique est un groupe muni d'une structure d'espace topologique tel que la multiplication  $G \times G \rightarrow G$  et l'inverse  $G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$  sont continues. Une action continue d'un groupe topologique sur un espace  $X$  est une application continue  $G \times X \rightarrow X$  qui est une action de groupe sur les ensembles sous-jacent.

**Définition 6.1.32.** Soit  $X$  un espace topologique et  $G$  un groupe agissant continuellement sur  $X$ . On note  $X/G$  l'espace quotient associé à la relation d'équivalence  $x \sim y$  si il existe  $g \in G$  tel que  $x = g \cdot y$ .

*Notation 6.1.33.* Si  $F$  est un sous-espace de  $X$ , on notera  $X/F$  l'espace topologique quotient de  $X$  par la relation d'équivalence engendrée par  $f \sim f'$  pour tout  $f, f' \in F$ .

*Exemple 6.1.34.* L'espace topologique  $S^1$  est le quotient  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  du groupe topologique  $(\mathbb{R}, +)$  par son sous-groupe  $\mathbb{Z}$ .

De manière générale, la topologie quotient est la topologie qui réalise l'idée intuitive de recollement de sous-espaces comme on peut s'en convaincre via les exemples précédents.

On prendra garde, cependant, qu'en général, un espace quotient n'a pas de raison d'être encore séparé... et donc pas compact non plus (au sens francophone du mot compacité, cf paragraphe 6.1.1).

*Exercice 6.1.35.* Montrer que le quotient  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  est un espace topologique de cardinal non-dénombrable dont la topologie est la topologie grossière.

Voici maintenant quelques propriétés spécifiques à la topologie quotient

**Proposition 6.1.36.** Soit  $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$  la projection canonique sur un espace quotient.

- (1) Si  $X$  est connexe (resp. par arcs) alors  $X/\mathcal{R}$  est connexe (resp. par arcs).
- (2) Si  $G$  est un groupe, l'application quotient  $p : X \rightarrow X/G$  est ouverte.
- (3) Si  $H \subset G$  est un sous-groupe d'un *groupe topologique*  $G$ , alors  $G/H$  est séparé si et seulement si  $H$  est fermé.
- (4) Si  $X/\mathcal{R}$  est séparé, alors le graphe  $\{(x, y), x \sim y\} \subset X \times X$  est fermé. Réciproquement, si ce graphe est fermé et que  $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$  est ouverte, alors  $X/\mathcal{R}$  est séparé.
- (5) Si  $X$  est compact, alors  $X/\mathcal{R}$  est séparé si et seulement si le graphe de  $\mathcal{R}$  est fermé dans  $X^2$ .

*Exercice 6.1.37.* Démontrer cette proposition (on pourra utiliser qu'un espace compact est normal).

On le voit, la propriété d'être séparé n'est pas complètement aisé à garantir dans un quotient. Il existe cependant une condition assez agréable pour garantir cela dans de nombreux exemples intéressants.

**Corollaire 6.1.38.** Si  $X$  est compact et  $F$  est un fermé alors l'espace quotient  $X/F$  est compact, en particulier séparé.

*Exercice 6.1.39.* Démontrer ce corollaire.

**Définition 6.1.40 (Recollements).** Soit  $X, Y$  deux espaces topologiques,  $A$  une partie non-vide de  $X$  et  $f : A \rightarrow Y$ , une application continue. On munit  $X \amalg Y$  de la topologie coproduit. Le *recollement de  $X$  sur  $Y$  par  $f$*  est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y := (X \amalg Y) / (x \sim f(x), x \in A).$$

Plus généralement, si  $A \xrightarrow{f} X$  et  $A \xrightarrow{g} Y$  sont deux applications continues, on appelle encore *recollement de  $X$  et  $Y$  le long de  $f, g$*  (ou par abus de terminologie le long de  $A$ ) l'espace quotient

$$X \cup_A Y := (X \amalg Y) / (g(x) \sim f(x), x \in A).$$

Cet espace topologique est aussi appelé **coproduit fibré** de  $X, Y$  par  $f, g$  ou encore **pushout** (pour garder la terminologie anglaise) de  $X$  et  $Y$  par  $A$ .

*Remarque 6.1.41.* On prendra garde que le recollement  $X \cup_A Y$  dépend de  $f$ , et  $g$  et pas seulement de  $A$ ! On fait donc un abus de notation.

Par construction, les inclusions canoniques de  $X, Y$  dans le coproduit suivi par l'application quotient donne des applications canoniques  $j_X : X \rightarrow X \cup_A Y$ ,  $j_Y : Y \rightarrow X \cup_A Y$  qui vérifient par définition de la relation d'équivalence sur le quotient que  $j_X \circ f = j_Y \circ g$ . Par composition, si  $h : X \cup_A Y \rightarrow W$  est une application continue, on obtient alors deux applications  $h \circ j_X : X \rightarrow W$  et  $h \circ j_Y : Y \rightarrow W$ . Nous énonçons maintenant la propriété fondamentale du recollement/coproduit fibré, tout d'abord par une phrase simple puis diagrammatiquement.

**Lemme 6.1.42** (Propriété universelle du recollement). Le pushout  $X \cup_A Y$  est le pushout dans la catégorie des espaces topologiques. Autrement dit, l'ensemble des applications continues de  $X \cup_A Y \rightarrow W$  est en bijection avec l'ensemble des couples  $(X \xrightarrow{\phi} W, Y \xrightarrow{\psi} W)$  d'applications continues vérifiant  $\phi \circ f = \psi \circ g$ . La bijection est précisément donnée par  $h \mapsto (h \circ j_X, h \circ j_Y)$ .

Beaucoup de constructions en topologie algébrique sont des coproduits fibrés/recollements, c'est par exemple le cas des cônes et cylindres d'une application 1.8.6.

*Exemple 6.1.43* (Bouquets de sphères). Soit  $I$  un ensemble. On se donne un point base  $x_i \in S^n$  dans la sphère de dimension  $n$  pour tout  $i \in I$ . On appelle *bouquet de sphères* (indiqué par l'ensemble  $I$ ), noté  $\bigvee_I S^n$ , le recollement  $X = \bigsqcup_I S^n \cup_{\bigsqcup_I \{x_i\}} \{pt\}$  donné par l'unique application  $f : \bigsqcup_I \{x_i\} \rightarrow \{pt\}$ .

Une notion “duale” ou plutôt en langage catégorique la co-notion associée à celle de coproduit fibré est celle de produit fibré.

**Définition 6.1.44.** Soit  $X \xrightarrow{f} Z, Y \xrightarrow{g} Z$  deux applications continues. Le *produit fibré* de  $X$  et  $Y$  au dessus de  $Z$ , appelé aussi tiré-en-arrière de  $Y$  par  $f$  (ou pullback en anglais) est l'espace topologique

$$X \times_Z Y := \{(x, y) \in X \times Y, f(x) = g(y)\}$$

vu comme un sous-espace du produit  $X \times Y$ .

Le produit fibré vérifie également une propriété universelle.

**Lemme 6.1.45.** L'espace topologique  $X \times_Z Y$  de la définition 6.1.44, muni des deux applications  $p_x : (x, y) \mapsto x$ ,  $p_Y : (x, y) \mapsto y$ , est un produit fibré dans la catégorie **Top** des espaces topologiques. C'est à dire que l'ensemble des applications continues d'un espace topologique  $T$  dans  $X \times_Z Y$  est en bijection avec les couples  $(T \xrightarrow{\phi_X} X, T \xrightarrow{\phi_Y} Y)$  d'applications continues vérifiant  $f \circ \phi_X = g \circ \phi_Y$ ; la bijection étant explicitement donnée par  $h \mapsto (p_X \circ h, p_Y \circ h)$ .

*Exercice 6.1.46.* Démontrer le lemme 6.1.45.

Ce lemme garantit donc que le tiré-en-arrière est l'unique (à homéomorphisme près) espace topologique vérifiant la propriété de factorisation donnée par le diagramme (38). Les constructions de tiré-en-arrière sont très importantes en géométrie (quelle soit différentielle ou algébrique).

**6.1.4. Complexes cellulaires.** Les complexes cellulaires, aussi appelés CW-complexes, sont une bonne (et large) sous-catégorie des espaces topologiques, obtenus à partir de recollements (définition 6.1.40) de boules de dimension  $n$ , qui a été cruciale dans le développement des notions d'homotopie faible.

**Définition 6.1.47.** On appelle  $i$ -cellule (ou cellule de dimension  $i > 0$ ) fermée un espace homéomorphe à  $D^i$  la boule unité compacte de dimension  $i$ , alors qu'un espace homéomorphe à  $D^i \setminus S^{i-1}$  sera appelé  $i$ -cellule ouverte. Une 0-cellule est juste un espace homéomorphe à un point.

Si  $e$  est une  $n$ -cellule fermée, on note  $\partial e$  son bord (qui est homéomorphe à  $S^{n-1}$ ) et  $\overset{\circ}{e} = e \setminus \partial e$  est une cellule ouverte. Soit maintenant  $f : \partial e \rightarrow X$  une application continue définie sur le bord d'une cellule. On dispose du recollement de  $e$  sur  $X$  suivant  $f$ , c'est à dire l'espace topologique quotient

$$X \cup_f e := (X \coprod e) / (f(x) \sim x \text{ pour } x \in \partial e).$$

On dispose en particulier de l'application évidente (dite caractéristique)  $e \rightarrow X \cup_f e$  dont la restriction à  $\overset{\circ}{e}$  est un homéomorphisme sur son image.

**Définition 6.1.48** (CW-complexe). Un espace topologique  $X$  est appelé un CW-complexe si il existe une suite  $(X^{(n)})_{n \geq 0}$  telle que

- (1)  $X^{(0)}$  est une réunion disjointe de 0-cellules (c'est à dire un espace discret);
- (2)  $X^{(n)}$  est obtenu à partir de  $X^{(n-1)}$  à partir de recollement de cellules de dimension  $n$  sur  $X^{(n-1)}$ ;
- (3)  $X = \bigcup_{n \geq 0} X^{(n)}$  est muni de la topologie de la réunion<sup>157</sup>, c'est à dire que la topologie de  $X$  est déterminée par celle des  $X^{(n)}$  de la manière suivante :  $F \subset X$  est fermé si et seulement si  $F \cap X^{(n)}$  est fermé pour tout  $n$ .

Un CW-complexe est fini si il est obtenu à partir d'un nombre fini<sup>158</sup> de cellules.

On appelle  $X^{(n)}$  le  $n$ -squelette de  $X$ . On appelle une suite  $X^{(n)}$  vérifiant les propriétés ci-dessus une *décomposition cellulaire* de  $X$ .

La *dimension* d'un CW-complexe est le maximum (dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ) des dimensions des cellules ouvertes de  $X$ .

<sup>157.</sup> c'est à dire la colimite dans **Top** du diagramme  $X^{(0)} \rightarrow X^{(1)} \rightarrow \dots$

<sup>158.</sup> on peut vérifier que si une décompositon cellulaire de  $X$  est finie, alors toute décomposition de  $X$  va être finie par compacité des boules

On notera qu'un CW-complexe  $X$  admet (sauf pour ceux de dimension 0) une infinité de décompositions cellulaires.

Soit  $Y$  un sous-espace d'un complexe cellulaire  $X = \bigcup X^{(n)}$ . On dit que  $Y$  est un sous-complexe cellulaire de  $X$  si, la suite  $(Y^{(n)} := Y \cap X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une décomposition cellulaire de  $Y$  (en particulier  $Y$  est donc un CW-complexe). Autrement dit un sous-complexe cellulaire de  $X$  est un espace qui est la réunion d'un certain nombre de cellules de  $X$ .

*Exemple 6.1.49.* • Un complexe simplicial, cf 3.1.3,  $K$  a une structure naturelle de CW-complexe donné par sa filtration  $K^{(i)}$  par les  $i$ -simplexes. La principale différence entre les complexes simpliciaux et les CW complexes tient au fait que les applications de recollement d'un complexe simplicial sont en fait des injections cellulaires.

- Les graphes sont exactement les CW-complexes de dimension 1.
- La sphère  $S^n$  a une décomposition cellulaire donnée par une unique cellule de dimension 0 et une cellule de dimension  $n$ . On peut aussi l'obtenir en recollant deux disques sur  $S^{n-1}$  (en ayant au préalable construit  $S^{n-1}$  de manière cellulaire). En particulier n'importe quel équateur d'une sphère  $S^n$  est un sous CW-complexe.
- Les espaces projectifs  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  sont des complexes cellulaires de dimension respective  $n$  et  $2n$ . Les  $\mathbb{P}^i \leq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  sont des sous CW complexes de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ .
- Le tore,  $\mathbb{R}P^2$ , la bande de Mobius ou la bouteille de Klein et de nombreux complexes simpliciaux ont des décompositions cellulaires avec moins de cellules que de simplexes à l'instar de la sphère.
- Toute variété différentiable est un CW-complexe, tout comme toute variété topologique de dimension plus petite que 3. Ce n'est pas le cas de toutes les variétés topologiques, mais en revanche toute variété topologique est homotope à un CW-complexe.

Par construction,  $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$  est une réunion disjointe de  $n$ -cellules ouvertes (en tant qu'espace topologique). On notera aussi que  $X$  est la réunion  $X = \bigcup_{n \geq 0} (X^{(n)} \setminus X^{(n-1)})$  disjointe de ses cellules ouvertes (attention, la topologie n'est cependant pas celle de la réunion disjointe). Par ailleurs, les images (par les applications caractéristiques) des cellules fermées sont fermées dans  $X$  (cette propriété n'est en général pas vraie pour les cellules ouvertes).

D'autres propriétés topologiques utiles sont résumées dans la Proposition suivante :

**Proposition 6.1.50.** Soit  $X$  un CW-complexe et  $X = \bigcup X^{(n)}$  une décomposition cellulaire.

- $X$  est séparé et tout point de  $X$  admet une base de voisinages contractibles.
- $X$  est paracompact.
- Pour tout  $n$ ,  $X^{(n)}$  est fermé dans  $X$ .
- Si  $K \subset X$  est compact, alors il rencontre un nombre fini de cellules ouvertes de  $X$ . En particulier  $X$  est compact si et seulement si il est fini.
- Pour tout  $n$ , le quotient  $X^{(n)} / X^{(n-1)}$  est homéomorphe à un bouquet  $\bigvee_{\alpha \in I_{X^{(n)}}} S^n$  de sphères (cf exemple 6.1.43) (où  $I_{X^{(n)}}$  est l'ensemble des cellules de dimension  $n$  de la décomposition cellulaire de  $X$ ).



- Si  $Y$  est un sous complexe fermé de  $X$ , alors  $Y$  est un rétracte par déformation d'un voisinage ouvert de  $X$ .

**Définition 6.1.51** (Morphismes cellulaires). Soient  $X = \bigcup X^{(n)}$ , et  $Y = \bigcup Y^{(n)}$  deux décompositions cellulaires de CW-complexes. Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est dite cellulaire si, pour tout  $n$ ,  $f(X^{(n)}) \subset Y^{(n)}$ .

En particulier, l'inclusion d'un sous-complexe est cellulaire.

*Remarque 6.1.52.* Un des grands intérêts de la définition d'un CW-complexe et que l'on peut construire facilement des applications continues issues d'un CW-complexe : en effet, par définition de la topologie de la réunion, on peut les construire inductivement, sur chaque  $X^{(n)}$  et pour les construire sur  $X^{(n)}$  en les connaissant sur  $X^{(n-1)}$  il suffit de donner des applications définies sur les  $n$ -cellules qui coïncident sur leur bord à celle sur  $X^{(n-1)}$ .

## 6.2. (R)APPELS ET NOTATIONS SUR LES CATÉGORIES

Nous précisons ici quelques notations et exemples de la théorie des catégories que nous utilisons.

**Définition 6.2.1** (Catégorie). Une catégorie  $\mathbf{C}$  est la donnée d'une collection d'*objets*, notée  $\text{Obj}(\mathbf{C})$  et pour tout couple  $(A, B)$  d'objets, la donnée d'un ensemble de *morphismes*, noté  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$  et dont on désignera souvent un élément  $f$  sous la forme  $f : A \rightarrow B$ , pour tout objet  $A$  d'un morphisme appelé *identité* de  $A$  dans  $A$ , noté  $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$  et d'un opérateur de composition, pour tout triplet  $(A, B, C)$  d'objets,

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C) \xrightarrow{\circ} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, C)$$

(noté pour  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  par  $g \circ f$ ) satisfaisant les propriétés suivantes :

- (1) La composition est associative :  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$  pour tout  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $h : C \rightarrow D$ ;
- (2) la composition est unitaire :  $\text{id}_B \circ f = f = f \circ \text{id}_A$  pour tout  $f : A \rightarrow B$ .

Un morphisme  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$  sera appelé un *isomorphisme* si il existe un morphisme  $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$  tel que  $f \circ g = \text{id}_B$  et  $g \circ f = \text{id}_A$ .

Une sous-catégorie de  $\mathbf{C}$  est simplement une sous-classe d'objets et des sous-ensembles des morphismes entre ces objets qui contiennent les identités et est stable par composition. Elle est dite *pleine* si les morphismes entre objets de la sous-catégorie sont exactement ceux entre ces objets dans  $\mathbf{C}$ .

Soit  $\mathbf{C}, \mathbf{D}$  deux catégories. Un **foncteur**  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  associe à tout objet  $X$  de  $\mathbf{C}$  un objet  $F(X)$  de  $\mathbf{D}$  et à tout couple  $(A, B)$  d'objets de  $\mathbf{C}$ , une application  $F(-) : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(B))$  vérifiant

- $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ ,
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ .

On peut composer deux foncteurs :  $G \circ F(X) = G(F(X))$ ,  $G \circ F(f) = G(F(f))$  et cette opération est associative et unitaire (l'unité étant le foncteur identité  $f \mapsto f$ ).

Puisque un foncteur préserve les compositions et l'identité, il suit aisément qu'un foncteur  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  envoie tout isomorphisme de  $\mathbf{C}$  sur un isomorphisme de  $\mathbf{D}$ .

*Remarque 6.2.2.* Il existe une notion plus générale de catégorie, où on remplace les ensembles par un univers plus grand. Nous n'en aurons en fait pas vraiment l'usage.

*Terminologie 6.2.3.* Un objet  $A$  d'une catégorie  $\mathbf{C}$  est dit

- *initial* si pour tout objet  $X$  de  $\mathbf{C}$ , il existe un unique morphisme  $A \rightarrow X$  dans  $\mathbf{C}$ ,
- *terminal* si pour tout objet  $X$  de  $\mathbf{C}$ , il existe un unique morphisme  $X \rightarrow A$  dans  $\mathbf{C}$ ,
- *nul* si il est terminal et initial dans  $\mathbf{C}$ .

il est facile de voir que, s'il existe, un objet initial ou terminal est unique à isomorphisme près.

Voici quelques exemples de catégories qui reviendrons souvent :

*Exemple 6.2.4.* • La catégorie **Top** des espaces topologiques dont les objets sont bien entendu les espaces topologiques et les morphismes les applications continues. La composition et l'identité sont simplement celles des fonctions usuelles. En particulier les isomorphismes de **Top** sont précisément les homéomorphismes. Cette catégorie admet un objet initial donné par l'espace vide  $\emptyset$  et un objet terminal donné par un singleton  $\{*\}$ .

- Une variante utile de la catégorie des espaces topologiques sera la catégorie **Top**<sub>\*</sub> des espaces pointés. Ses objets sont les espaces  $(X, *)$  topologiques munis<sup>159</sup> d'un point distingué  $* \in X$ . Les morphismes  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  entre espaces pointés sont donc les applications continues qui préservent les points bases, i. e., telles que  $f(x_0) = y_0$ .

On notera que **Top**<sub>\*</sub> n'est cependant pas une sous-catégorie de **Top**. Par ailleurs, le singleton est un objet nul de **Top**<sub>\*</sub>.

- La catégorie **Ens** sera celle dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont toutes les applications.

On peut bien entendu regarder plusieurs sous-catégories intéressantes de **Ens** : par exemple celle des ensembles finis (où on ne garde que les ensembles finis et conserve tous les morphismes), celle des surjections (où on se restreint seulement aux applications qui sont surjectives), celle des injections etc. Un isomorphisme dans n'importe laquelle de ces catégories est simplement une bijection.

- Si  $M$  est un monoïde, alors on peut lui associer une catégorie  $BM$  qui a un *unique* objet noté  $*$  et telle que  $\text{Hom}_{BM}(*, *) = M$  de telle sorte que la composition et l'identité soient données respectivement par la multiplication et l'unité de  $M$ . Réciproquement, si on fixe un objet  $X$  dans une catégorie  $\mathbf{D}$ , alors  $(\text{Hom}_{\mathbf{D}}(X, X), \circ)$  est un monoïde.
- A l'opposé d'un monoïde, tout ensemble  $E$  donne lieu à une catégorie dont les objets sont les éléments de la catégorie et les flèches sont l'identité seulement. Un exemple avec plus de structure (et utile) est le cas d'un ensemble partiellement ordonné  $X, \leq$  : Les objets de la catégorie associée sont encore les éléments de  $X$  et on se donne en sus exactement un morphisme  $x \rightarrow y$  pour toute paire d'objets  $x \leq y$ . Une telle catégorie n'a un objet initial ou terminal que si elle admet un minimum ou maximum.
- La catégorie **Cat** des catégories est la catégorie dont les objets sont les catégories et les morphismes entre deux catégories  $\mathbf{C}, \mathbf{D}$  les foncteurs de  $\mathbf{C}$

<sup>159</sup>. en particulier, ils ne sont pas vides

vers  $\mathbf{D}$ . Elle a pour sous-catégorie pleine (d'une taille ensembliste plus raisonnable) la catégorie  $\mathbf{Cat}^{small}$  des petites catégories, c'est à dire celles dont les objets forment un ensemble.

Une autre source de catégorie qui reviendra beaucoup, seront celles qui sont associées à des données linéaires et sont en fait additives.

**Définition 6.2.5.** Une catégorie *additive* est une catégorie dont les ensembles de morphismes sont munis d'une structure de groupe abélien de sorte que la composition de morphismes soit bilinéaire et qui est de plus munie d'un objet nul, c'est à dire d'un objet à la fois initial et terminal.

*Exemple 6.2.6* (Catégorie des groupes abéliens, modules). Soit  $k$  un anneau commutatif unitaire. On notera  $k\text{-}\mathbf{Mod}$  la catégorie, dite des  $k$ -modules, dont les objets sont les  $k$ -modules et les morphismes sont les applications  $k$ -linéaires. En particulier, on a la catégorie  $\mathbf{Ab} := \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$  la catégorie des groupes abéliens. La somme de deux morphismes de groupes abéliens est encore un morphisme de groupes abélien et donne la structure additive dont l'objet nul est évidemment le module nul  $\mathbf{0}$ . Cette catégorie est une sous-catégorie de la catégorie  $\mathbf{Gp}$  de tous les groupes qui elle n'est pas additive.

Parmi les sous-catégories de  $k\text{-}\mathbf{Mod}$ , on notera  $k\text{-}\mathbf{Mod}^f$  celle des  $k$ -modules de type fini (c'est à dire admettant un nombre fini de générateurs).

Plus généralement la catégorie  $Ch(k)$  des complexes de chaînes est une catégorie additive.

**Définition 6.2.7** (Transformations et équivalences naturelles). Soient  $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  deux foncteurs. Une *transformation naturelle* de  $F$  vers  $G$  est la donnée, pour tout objet  $X \in \mathbf{C}$ , d'un morphisme  $\tau_X : F(X) \rightarrow G(X)$  dans  $\mathbf{D}$  vérifiant que pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\mathbf{C}$  le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \tau_X \downarrow & & \downarrow \tau_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

est commutatif.

Une *équivalence*<sup>160</sup> *naturelle* entre  $F$  et  $G$  est une transformation naturelle pour laquelle les  $\tau_X$  sont des isomorphismes.

*Exemple 6.2.8.* Si on fixe  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  deux catégories, on dispose de la catégorie  $Fun(\mathbf{C}, \mathbf{D})$  des foncteurs de  $\mathbf{C}$  vers  $\mathbf{D}$  dont un objet est un foncteur et les morphismes  $\text{Hom}_{Fun(\mathbf{C}, \mathbf{D})}(F, G)$  sont les transformations naturelles de  $F$  vers  $G$ . la composition des transformations naturelles  $\tau, \tau'$  étant donnée par la composition des flèches :  $\tau' \circ \tau(X) = \tau'_X \circ \tau_X$  et l'identité étant la transformation naturelle telle que  $\tau_X = \text{id}_X$  pour tout objet.

Intuitivement on doit penser qu'être naturellement équivalent est la "bonne" notion identifiant les mêmes foncteurs. Ceci conduit naturellement à la bonne notion d'équivalence de catégories

**Définition 6.2.9** (Équivalence de catégories). Un foncteur  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  est une *équivalence de catégorie* si il existe un foncteur  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  tel que les foncteurs  $F \circ G$

<sup>160</sup>. ou isomorphisme naturel



**Lemme 6.2.15.** Si  $W$  et  $W'$  sont deux objets qui sont des coproduits fibrés (en particulier on peut donc les munir respectivement des morphismes  $j_X, j_Y, j'_X, j'_Y$ ) alors  $W$  et  $W'$  sont isomorphes. Il existe par ailleurs un unique tel isomorphisme compatible avec les choix des  $j_X, j_Y, j'_X, j'_Y$ .

*Exercice 6.2.16.* Démontrer le lemme 6.2.15.

**Définition 6.2.17.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie et  $X \xrightarrow{f} Z, Y \xrightarrow{g} Z$  deux morphismes. On appelle produit fibré ou pullback (en anglais) de  $f$  et  $g$ , un objet  $P$ , muni de morphismes  $P \xrightarrow{p_X} X, P \xrightarrow{p_Y} Y$  vérifiant  $f \circ p_X = g \circ p_Y$ , tel que pour tout couple de morphismes  $\phi_X : Z \rightarrow X, \phi_Y : Z \rightarrow Y$  rendant commutatif le diagramme (sans la flèche en pointillée) suivant

$$(38) \quad \begin{array}{ccccc} T & & & & \\ & \searrow \phi_X & & & \\ & & P & \xrightarrow{p_X} & X \\ & \swarrow \phi_Y & \downarrow p_Y & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

$\exists! h$  (sur la flèche pointillée  $T \rightarrow P$ )

il existe *un unique* morphisme  $h : T \rightarrow P$  rendant le diagramme complet commutatif<sup>163</sup>. On appellera  $p_X, p_Y$  les morphismes *structuraux* (ou plus parfois canoniques).

Là encore le produit fibré n'existe pas forcément pour des morphismes quelconques dans une catégorie quelconque. En revanche, si il existe, il est unique à isomorphisme près :

**Lemme 6.2.18.** Si  $P$  et  $P'$  sont deux objets qui sont des produits fibrés, alors  $P$  et  $P'$  sont isomorphes. Il existe par ailleurs un unique tel isomorphisme compatible avec les choix de morphismes structuraux reliant  $W, W'$  à  $X, Y$ .

*Exemple 6.2.19.* Le recollement  $X \cup_A Y$  d'espaces topologiques est un coproduit fibré dans la catégorie **Top** des espaces topologiques (cf. 6.1.42). De même le produit fibré d'espace topologiques est bien le produit fibré dans **Top**.

De manière plus générale on a une notion de limites et colimites associées à des diagrammes, c'est à dire un ensemble d'objets et de morphismes entre eux.

**Définition 6.2.20.** Un diagramme dans une catégorie  $\mathbf{C}$  est un foncteur  $I \rightarrow \mathbf{C}$  où  $I$  est une petite catégorie, c'est à dire une catégorie avec un ensemble d'objets. Pour une petite catégorie  $I$  fixée, un tel foncteur est appelé diagramme de forme  $I$ .

*Exemple 6.2.21.* Soit  $I$  un ensemble, vu comme une catégorie discrète (cf 6.2.4). Alors un diagramme est simplement une famille indexée par  $I$  d'objets de  $\mathbf{C}$ .

Ainsi pour  $I = \mathbb{N}$  vu comme un ensemble ordonné via la relation d'ordre, un diagramme dans  $\mathbf{C}$  est alors juste la donnée d'une suite d'objets et de morphismes reliant ceux d'indice consécutifs :

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \rightarrow \dots$$

<sup>163</sup>. c'est à dire rendant les deux triangles, ainsi créés par la flèche pointillée, commutatifs

*Exemple 6.2.22.* Soit  $P$  la catégorie avec 3 objets  $a, b, c$  et deux flèches non triviales  $a \rightarrow b$  et  $c \rightarrow b$ , alors un diagramme de type  $P$  est simplement la donnée de

$$X \xrightarrow{f} W \xleftarrow{g} Y$$

alors que pour la catégorie  $C$  avec 3 objets  $a, b, c$  et deux flèches non triviales  $b \rightarrow a$  et  $b \rightarrow c$ , alors un diagramme de type  $C$  est simplement la donnée de

$$X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} Y$$

**Définition 6.2.23 (Limites et colimites).** Soit  $I$  une petite catégorie et  $D : I \rightarrow \mathbf{C}$  un diagramme de type  $I$  dans une catégorie  $\mathbf{C}$ .

- Une **limite** de  $D$  est un objet  $L_D \in \mathbf{C}$ , muni de morphismes  $\alpha_i : L_D \rightarrow D(i)$  pour tout objet  $i \in I$  vérifiant que pour toute flèche  $i \xrightarrow{f} j$  dans  $I$ , on a  $\alpha_j = D(f) \circ \alpha_i$ , et satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tout objet  $Z$  muni de morphismes  $Z \xrightarrow{h_i} D(i)$  pour tout objet  $i$  vérifiant que pour toute flèche  $i \xrightarrow{f} j$  dans  $I$  on a  $h_j = D(f) \circ h_i$ , il existe un **unique** morphisme  $h : Z \rightarrow L_D$  vérifiant que pour tout objet  $i \in I$ , on a  $h_i = \alpha_i \circ h$ .
- Une **colimite** de  $D$  est un objet  $C_D \in \mathbf{C}$ , muni de morphismes  $\beta_i : D(i) \rightarrow C_D$  pour tout objet  $i \in I$  vérifiant que pour toute flèche  $i \xrightarrow{f} j$  dans  $I$ , on a  $\beta_j = \beta_i \circ D(f)$ , et satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tout objet  $W$  muni de morphismes  $D(i) \xrightarrow{f_i} W$  pour tout objet  $i$  vérifiant que pour toute flèche  $i \xrightarrow{f} j$  dans  $I$  on a  $f_j = f_i \circ D(f)$ , il existe un **unique** morphisme  $f : C_D \rightarrow W$  vérifiant que pour tout objet  $i \in I$ , on a  $f_i = f \circ \beta_i$ .

**Lemme 6.2.24.** Si une limite de  $D$  existe, elle est unique à isomorphisme près. De même si une colimite existe elle est unique à isomorphisme près.

En particulier on parlera de *la* limite ou colimite d'un diagramme.

*Démonstration.* Cela découle de l'unicité des morphismes  $h, f$  dans la définition comme dans la preuve du lemme 6.1.24.  $\square$

*Notation 6.2.25.* On note en général  $\lim_{i \in I} D(i)$  la limite d'un diagramme  $D$  et  $\text{colim}_{i \in I} D(i)$  la colimite d'un diagramme.

**Définition 6.2.26 (Produits et coproduits).** Soit  $I$  un ensemble vu comme une catégorie discrète (cf exemple 6.2.4). Alors un diagramme de forme  $I$  est équivalent à la donnée d'une famille  $(X_i)_{i \in I}$  d'objets et la *limite* de ce diagramme est appelée le produit indicé par  $I$  de la famille. Il est noté  $\prod_{i \in I} X_i$ .

La *colimite* de ce diagramme est appelé le *coproduit* et est notée  $\coprod_{i \in I} X_i$ .

*Exemple 6.2.27.* Il suit des lemmes 6.1.30 et 6.1.24 que les topologies produit et coproduit sont bien les produits et coproduits de la catégorie **Top**.

En revanche dans la catégorie des espaces pointés, le coproduit est différent. En effet dans **Top**<sub>\*</sub>, on a  $\coprod_{i \in I} (X_i, x_i) \cong \bigvee (X_i, x_i) \cong \coprod_{i \in I} X_i / (x_i \sim x_j, \forall i, j \in I)$  le bouquet des espaces  $X_i$ , muni du point base donné par la classe  $[x_i]$  dans le quotient.

*Exercice 6.2.28.* Démontrer que les produits et coproduits *finis* (c'est à dire que  $I$  est fini) sont isomorphes dans **Ab** ou  $k\text{-Mod}$ . Identifier les produits et coproduits infinis et vérifier qu'ils sont différents dans ces mêmes catégories.

*Exemple 6.2.29.* Dans toute catégorie  $\mathbf{C}$ , le produit fibré est la limite des diagrammes de forme  $P$  alors que les coproduits fibrés sont les colimites des diagrammes de forme  $C$  comme dans l'exemple 6.2.22. par ailleurs, si  $\mathbf{C}$  a un objet initial  $O$  alors le coproduit de deux objets s'identifie avec le coproduit fibré  $X \cup_O Y$ . La remarque duale est en vigueur pour le produit de deux objets dans une catégorie avec un objet final  $*$  :  $X \times Y \cong X \times_* Y$ .

**Définition 6.2.30.** Soit  $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \rightarrow \dots$  une tour d'espace topologique, c'est à dire un foncteur de (la catégorie associée à)  $\mathbb{N}$  muni de sa relation d'ordre dans **Top**. On appelle *réunion topologique* de cette tour la colimite  $\text{colim}_{i \in \mathbb{N}} X_i$  de ce diagramme dans **Top**.

*Exemple 6.2.31.* La topologie d'un complexe cellulaire est la réunion topologique de la tour donnée par les inclusions  $X^{(0)} \hookrightarrow X^{(1)} \hookrightarrow \dots$ .

**Lemme 6.2.32.** La réunion topologique existe pour toute tour  $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \rightarrow \dots$  et est donné par  $\coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i / (f_i(x_i) \sim x_i)$ .

Si les  $f_i$  sont des inclusions de sous-espaces topologiques, alors, les applications canoniques  $\alpha_i X_i \rightarrow \text{colim}_{i \in \mathbb{N}} X_i$  sont injectives, que  $\text{colim}_{i \in \mathbb{N}} X_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i(X_i)$  s'identifie à la réunion des  $X_i$  et que  $\alpha_i$  est un homéomorphisme sur son image. De plus  $F$  est fermé dans  $\text{colim}_{i \in \mathbb{N}} X_i$  si et seulement si  $F \cap \alpha_i(X_i) \cong F \cap X_i$  est fermé dans  $X_i$  (on identifie  $X_i$  avec son image vu la phrase précédente).

*Exercice 6.2.33.* Démontrer ce lemme.

*Exercice 6.2.34.* Démontrer que, si ils existent, la colimite (resp. limite) d'un diagramme sur  $I = \emptyset$  est un objet initial (resp. final).

*Exercice 6.2.35* (Limite d'une tour). Soit  $\mathbb{N}$  muni de sa relation d'ordre comme dans l'exemple 6.2.21. Un diagramme de type  $\mathbb{N}^{op}$  est une tour  $\dots \rightarrow X_2 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} X_0$ .

Dans la catégorie des espaces topologique la limite de toute tour existe et est donnée par le sous-espace  $\{(x_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n, \forall i \in \mathbb{N}, f_i(x_{i+1}) = x_i\}$  de l'espace produit  $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ , c'est à dire par le sous-espace des suites compatibles aux  $f_i$ .

*Exercice 6.2.36* (Polynômes et séries formelles). Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire et considérons le diagramme dans **Ring**, la catégorie des anneaux unitaires, donné par la tour  $A_0[x] \hookrightarrow A_1[x] \hookrightarrow \dots$  donné par les inclusions des polynômes  $A_i[x]$  de degré inférieur ou égal à  $i$  dans ceux de degré inférieur ou égal à  $i+1$ . Alors  $\text{colim}_{i \in \mathbb{N}} A_i[x] \cong A[x]$  l'anneau des polynômes.

En revanche si on regarde le diagramme  $\dots A_2[x] \twoheadrightarrow A_1[x] \twoheadrightarrow A_0[x]$  donné par les projections canoniques  $A_i[x] \twoheadrightarrow A_i[x]/(x^i) \cong A_{i-1}(x)$ , on obtient que la limite  $\lim_{i \in \mathbb{N}} A_i[x] \cong A[[x]]$  est isomorphe à l'anneau des séries formelles à coefficient dans  $A$ .

Le même calcul marche dans  $A - \mathbf{Mod}$  (mais donne seulement une structure de module) à la place de la catégorie des anneaux.

**Définition 6.2.37.** Une catégorie  $I$  est dite filtrée si elle est non-vide et vérifie que

- pour tout objets  $i, j \in I$ , il existe un objet  $k$  "au dessus d'eux", c'est à dire qu'il existe des morphismes  $i \rightarrow k$  et  $j \rightarrow k$ ;
- pour toute paire de morphismes  $f, g : i \rightarrow j$ , il existe une flèche  $h : j \rightarrow k$  telle que  $h \circ f = h \circ g$ .

Une catégorie est dite cofiltrée si  $I^{op}$  est filtrée<sup>164</sup>.

Une **colimite filtrée** est une colimite sur une catégorie  $I$  qui est filtrée (c'est à dire que l'on regarde des diagrammes de type  $I$  où  $I$  est filtrée).

Une **limite cofiltrée** est une colimite sur une catégorie  $I$  qui est cofiltrée.

Une généralisation est la notion de (co)limite  $\kappa$ -(co)filtrée pour un cardinal  $\kappa$ .

**Proposition 6.2.38.** Soit  $I, J$  des petites catégories et  $\mathbf{F}$  une catégorie filtrante. On a alors des isomorphismes naturels de foncteurs :

- $\text{colim}_J(\text{colim}_{i \in I}(D(i, -))) \xleftarrow{\cong} \text{colim}_{I \times J} D \xrightarrow{\cong} \text{colim}_I(\text{colim}_{j \in J}(D(-, j))),$
- $\text{lim}_J(\text{colim}_{i \in I}(D(i, -))) \xrightarrow{\cong} \text{lim}_{I \times J} D \xleftarrow{\cong} \text{lim}_I(\text{colim}_{j \in J}(D(-, j)))$  pour tout  $I \times J$ -diagramme,
- $\text{colim}_{\mathbf{F}}(\text{lim}_{j \in J} D(-, j)) \xrightarrow{\cong} \text{lim}_J(\text{colim}_{k \in \mathbf{F}}(D(k, -)))$  pour tout diagramme de type  $\mathbf{F} \times J$ .

*Exercice 6.2.39.* Démontrer que dans **Top** toutes les limites et colimites existent.

*Exercice 6.2.40.* Démontrer que dans  $k\text{-Mod}$  toutes les limites et colimites existent.

**6.2.2. Adjonction.** La notion de foncteurs adjoints est une des plus importante de la théorie des catégories.

**Définition 6.2.41.** Deux foncteurs  $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  et  $D : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  sont adjoints si et seulement si on a un isomorphisme naturel de bifoncteur<sup>165</sup>

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}}(G(\cdot), \cdot) \xrightleftharpoons[\text{Ad}]{\text{Ag}} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\cdot, D(\cdot)) .$$

Ici on a noté Ag et Ad les équivalences inverses l'une de l'autre.

On dit que  $G$  est adjoint à gauche de  $D$  et que  $D$  est adjoint à droite de  $G$ .

Concrètement, la définition est équivalente à dire que pour tout  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X')$  et  $g \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}(Y, Y')$  on a un diagramme commutatif dont les flèches horizontales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{D}}(G(X), Y) & \xrightleftharpoons[\text{Ad}(X, Y)]{\text{Ag}(X, Y)} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, D(Y)) \\ g_* \downarrow & & \downarrow D(g)_* \\ \text{Hom}_{\mathbf{D}}(G(X), Y') & \xrightleftharpoons[\text{Ad}(X, Y')]{\text{Ag}(X, Y')} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, D(Y')) \\ G(f)^* \uparrow & & \uparrow f^* \\ \text{Hom}_{\mathbf{D}}(G(X'), Y') & \xrightleftharpoons[\text{Ad}(X', Y')]{\text{Ag}(X', Y')} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X', D(Y')) \end{array} \quad (\text{Adj})$$

Nous avons utilisé la notation standard suivante : pour  $g : Y \rightarrow Z$ ,  $h : X \rightarrow Y$ , l'application  $g_* : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(X, Z)$  est simplement la composition par  $g$  ; c'est à dire l'application  $f \mapsto g \circ f$  alors que  $h^* : f \mapsto f \circ h$ .

164. c'est à dire qu'elle est non vide et vérifie que pour tout objets  $i, j \in I$ , il existe un objet  $k$  "en dessous d'eux", c'est à dire qu'il existe des morphismes  $k \rightarrow i$  et  $k \rightarrow j$  et que de plus, pour toute paire de morphismes  $f, g : j \rightarrow i$ , il existe une flèche  $h : k \rightarrow j$  telle que  $f \circ h = g \circ h$

165. c'est à dire une équivalence naturelle entre foncteurs de  $\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Ens}$



La partie supérieure du diagramme traduit donc le fait que  $\text{Ag}(X, \cdot)$  et  $\text{Ad}(X, \cdot)$  est un morphisme de foncteur (pour la deuxième variable) alors que la partie basse traduit le fait que  $\text{Ag}(\cdot, Y)$  et  $\text{Ad}(\cdot, Y)$  est un morphisme de foncteur (pour la première variable). Puisque  $\text{Ag}$  et  $\text{Ad}$  sont inverse l'un de l'autre, on a  $\text{Ag}(X, Y) = \text{Ad}(X, Y)^{-1}$  pour tous objets  $X, Y$ .

**Proposition 6.2.42.** Soit  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  un foncteur. Il existe, à équivalence naturelle près, au plus un foncteur  $G$  qui soit adjoint à gauche de  $F$  et au plus un foncteur  $D$  qui soit adjoint à droite de  $F$ .

On peut donc parler, s'ils existent, de l'adjoint à gauche ou l'adjoint à droite d'un foncteur et définir une adjonction en ne spécifiant qu'un seul des foncteurs.

*Exercice 6.2.43.* Démontrer la proposition.

*Exemple 6.2.44.* Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux commutatifs unitaires. On munit  $B$  de la structure de  $A$ -module induite :  $(a, b) \mapsto f(a)b$  ce qui donne un foncteur canonique  $Rf : B\text{-}\mathbf{Mod} \rightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$ . Le produit tensoriel par  $B$  au dessus de  $A$ ,  $N \mapsto B \otimes_A N$ , définit un foncteur qui est adjoint à gauche de  $Rf$ .

*Exemple 6.2.45.* Le foncteur de la catégorie des groupes dans **Ens** qui envoie un groupe sur son ensemble sous-jacent et ne change pas les morphismes a un adjoint à gauche qui a un ensemble associé le groupe libre engendré par cet ensemble.

En prenant  $X = D(Y)$  et  $Y = G(X)$  respectivement dans le diagramme (Adj), on obtient pour tous objets  $X \in \mathbf{C}$  et  $Y \in \mathbf{D}$ , des isomorphismes

$$(39) \quad \text{Hom}_{\mathbf{D}}(G(D(Y)), Y) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(D(Y), D(Y)),$$

$$(40) \quad \text{Hom}_{\mathbf{D}}(G(X), G(X)) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, D(G(X))).$$

**Définition 6.2.46** ((co)unité d'une adjonction). Soit  $G$  un adjoint à gauche de  $D$ .

- L'*unité* de l'adjonction est la transformation naturelle  $(\varepsilon : X \rightarrow D(G(X)))$  induite par  $\text{id}_{G(X)}$  dans l'isomorphisme (40).
- La *counité* de l'adjonction est la transformation naturelle  $(\eta_Y : G(D(Y)) \rightarrow Y)$  induite par  $\text{id}_{D(Y)}$  dans l'isomorphisme (39).

**Proposition 6.2.47.** Soit  $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  et  $D : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  deux foncteurs et  $\varepsilon : \text{Id}_{\mathbf{C}} \rightarrow DG$  et  $\eta : GD \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{D}}$  deux transformations naturelles.

- (1) Les transformations  $\varepsilon$  et  $\eta$  sont respectivement l'unité et la counité d'une adjonction<sup>166</sup> entre  $G$  et  $D$  si et seulement si les composées

$$D(Y) \xrightarrow{\varepsilon(D(Y))} DGD(Y) \xrightarrow{D(\eta(Y))} D(Y) \quad \text{et} \quad G(X) \xrightarrow{G(\varepsilon(X))} GDG(X) \xrightarrow{\eta(G(X))} G(X)$$

sont des identités.

- (2) Le foncteur  $G$  est pleinement fidèle si et seulement si  $\varepsilon$  est un isomorphisme, et  $D$  est pleinement fidèle si et seulement si  $\eta$  est un isomorphisme.

*Exercice 6.2.48.* Démontrer cette proposition.

**Corollaire 6.2.49.** Une adjonction entre deux foncteurs  $G$  et  $D$  est une équivalence de catégories si et seulement si son unité et sa counité sont des isomorphismes naturels.

<sup>166.</sup> par construction,  $G$  est alors forcément l'adjoint à gauche

*Remarque 6.2.50.* Si  $F$  est une équivalence de catégorie et que  $G$  est une équivalence inverse, alors  $F$  et  $G$  sont nécessairement adjoints ; chacun étant à la fois inverse à droite et à gauche de l'autre.

Une des propriétés fondamentales des foncteurs adjoints est la suivante.

**Proposition 6.2.51.** Si  $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  est un adjoint à gauche de  $D : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ , alors  $G$  commute avec les colimites et  $D$  commute avec les limites :

$$\operatorname{colim}_I G(X_i) \xrightarrow{\cong} G(\operatorname{colim}_{\mathbf{I}^*} X_i), \quad D(\lim_{\mathbf{I}^*} Y_i) \xrightarrow{\cong} \lim_{\mathbf{I}^*} D(Y_i).$$

Plus précisément, la proposition dit que les morphismes canoniques  $\operatorname{colim}_I G(X_i) \rightarrow G(\operatorname{colim}_{\mathbf{I}^*} X_i)$ ,  $D(\lim_{\mathbf{I}^*} Y_i) \rightarrow \lim_{\mathbf{I}^*} D(Y_i)$  respectivement induits par les propriétés universelles des (co)limites<sup>167</sup> sont des isomorphismes. Ce sont donc des isomorphismes naturels entre les foncteurs respectifs.

*Remarque 6.2.52.* Notons que si  $\mathbf{C}$  est une catégorie abélienne, le noyau d'un morphisme est une limite alors que le conoyau est une colimite. On peut alors noter que si on a une adjonction entre catégorie abélienne, alors l'adjoint à gauche est exact à droite et l'adjoint à droite est exact à gauche au sens de la définition 1.5.1.

Lorsque l'on travaille dans des catégories suffisamment “petites”, le fait de commuter avec des (co)limites est en fait équivalent à être un adjoint.

**Théorème 6.2.53** (Un des théorèmes de l'adjoint). Soit  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  un foncteur entre catégories localement présentables. Alors  $F$  est un adjoint à gauche si et seulement si il commute aux colimites. C'est un adjoint à droite si et seulement si il commute aux limites et est accessible.

Une catégorie localement présentable est une catégorie qui est

- admet un ensemble de générateurs  $\kappa$ -compact 2.3.18 pour un certain cardinal  $\kappa$  (en particulier tout objet est une colimite  $\kappa$ -filtrée de ces objets).
- elle admet toutes les colimites.

Un foncteur dans une telle catégorie est accessible si il commute aux colimites  $\kappa$ -filtrées.

*Exemple 6.2.54.* Toute catégorie de préfaisceau d'ensembles est une catégorie localement présentable. De plus toute catégorie de modèle combinatoire 2.6.14 est une catégorie localement présentable.

<sup>167</sup>. via les morphismes obtenus en appliquant  $G$  aux morphismes canoniques  $X_j \rightarrow \operatorname{colim}_I X_i$  et  $D$  aux morphismes canoniques  $\lim_I Y_i \rightarrow Y_j$

## RÉFÉRENCES

- [1] Henri Paul de Saint Gervais, **Analysis Situs** Topologie algébrique des variétés, site web disponible en ligne  
<http://http://analysis-situs.math.cnrs.fr/>
- [2] A. Bousfield, V. Gugenheim, *On PL de Rham theory and rational homotopy type*, Mem. Amer. Math. Soc. 8 (1976), no. 179.
- [3] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 139. Springer-Verlag, New York, 1997
- [4] D. Dugger, *Combinatorial Model Categories Have Presentations* Advances in Mathematics Volume 164, Issue 1, 1 December 2001, Pages 177-201
- [5] D. Dugger, *Replacing model categories with simplicial ones*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 353, number 12 (2001), 5003-5027.
- [6] W. Dwyer, J. Spaliński, *Homotopy theories and model categories*, Handbook of algebraic topology, 73-126, North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [7] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, *Rational homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics, 205. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [8] G. Friedman, *An elementary illustrated introduction to simplicial sets*, disponible sur ArXiv.
- [9] P. G. Goerss and J. F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, reprint of the 1999 edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [10] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002
- [11] K. Hess. *Rational Homotopy Theory : A Brief Introduction*.
- [12] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, 63. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [13] J.-P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, The University of Chicago Press, disponible en ligne sur la page de l'auteur.
- [14] D. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Mathematics 43, Springer, 1967.
- [15] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. (2) 90 (1969) 205-295.
- [16] J. Lurie, *Higher Topos Theory*, Annals of mathematical Studies.
- [17] P. Schapira, *Categories and Homological Algebra*, Notes de cours, disponible en ligne : <https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.schapira/lectnotes/>
- [18] E. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1966.
- [19] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 47 (1977), 269-331 (1978).
- [20] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994
- [21] G. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics, 61. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.