Structures de Modèles sur les complexes de chaines

Soit R un anneau (ou une k-algèbre) commutatif, unitaire. Rappelons que $Ch(R)$ est la catégorie des complexes $(C_{i\in\mathbb{Z}}, d)$ de chaînes de R-modules non-bornés et $Ch_{\geq 0}(R)$ sa sous-catégorie des complexes de chaines concentrés en degrés positifs ($C_i = 0$ si $i < 0$). Enfin on note $Ch_{\leq 0}(R)$ la sous-catégorie des complexes de chaines concentrés en degrés négatifs ($C_i = 0$ si $i > 0$); cette sous-catégorie est isomorphe (via $C^i = C_{-i}$) à celle des complexes de cochaînes concentrés en degrés positifs.

Définition 0.1 (*Structure de modèle projective*)**.** Soit $\mathbf{C} = Ch(R)$ ou $Ch_{\geq 0}(R)$. On définit la structure, dite projective, sur $\mathbf{C}$ en posant

Équivalences faibles $\mathcal{W}$ ce sont les quasi-isomorphismes (c'est à dire les morphismes de complexes induisant des isomorphismes en homologie).

Fibrations $\mathcal{F}$ ce sont les morphismes de complexes surjectifs (en tout degré) dans $Ch(R)$ et les morphismes de complexes surjectifs en tout degré > 0 dans $Ch_{\geq 0}(R)$.

Cofibrations $\mathcal{C}$ ce sont les morphismes de complexes qui ont la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques.

Dualement, On définit la structure, dite injective, sur $\mathbf{C}$ en posant

Équivalences faibles $\mathcal{W}$ ce sont les quasi-isomorphismes.

Cofibrations $\mathcal{C}$ ce sont les morphismes de complexes injectifs (en tout degré) dans $Ch(R)$ et les morphismes de complexes injectifs en tout degré < 0 dans $Ch_{\leq 0}(R)$.

Fibrations $\mathcal{F}$ ce sont les morphismes de complexes qui ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations acycliques.

On admet (pour le moment) le théorème suivant. Et on va illustrer la structure ainsi définie dans la suite.

Théorème 0.2. Les structures projectives ci-dessus munissent $Ch(R)$ et $Ch_{\geq 0}(R)$ d'une structure de catégorie de modèles. De plus,

1. Les cofibrations de $Ch_{\geq 0}(R)$ sont exactement les inclusions en tout degré dont le conoyau est projectif en tout degré.
2. Les cofibrations de $Ch(R)$ sont les morphismes de complexes, qui sont injectifs et de conoyau projectif en tout degré, et dont le conoyau est cofibrant.
3. Tout morphisme de complexe de $Ch(R)$, injectif en tout degré, dont le conoyau est un complexe borné inférieurement[1] de modules projectifs est une cofibration.

Exercice 1.

1. Énoncer l'analogue du théorème précédent pour la structure injective.
2. Démontrer que dans la structure projective, tous les objets sont fibrants et l'analogue dans la structure injective.
3. Démontrer que si $f : A \rightarrowtail B$ est une cofibration, alors $\mathrm{coker}(f)$ est cofibrant (indic: utiliser un pushout).

Dans l'exercice suivant on utilisera **pas** la caracérisation des cofibrations données par le théorème.

[1] c'est à dire que $C_i = 0$ pour $i << 0$

Exercice 2. Soit R un anneau et on munit $Ch(R)$ de la structure projective.

1. On veut montrer que que si un complexe (C_*, d) est cofibrant, alors C_n est projectif pour tout n.

   (a) Montrer que les morphismes de complexes $C_* \to D^n(M)$ sont en bijection avec les applications linéaires $C_n \to M$.

   (b) Vérifier, pour tout n, que $M \mapsto D^n(M)$ est un foncteur des R-modules dans les complexes de chaines acycliques.

   (c) Démontrer que C_* cofibrant, imlique que C_n est projectif (indic: utiliser les 2 questions précédentes pour produire une fibration acyclique).

2. Démontrer que toute cofibration $i : A_* \rightarrowtail B_*$ est injective degré par degré. (Indic; vérifier que $D^{n+1}(A_n) \to 0$ est une fibration acyclique et considérer un morphisme $A_* \to D^{n+1}(A_n) \to 0$).

3. En déduire que pour toute cofibration $i : A_* \rightarrowtail B_*$, en notant $P_* = \text{coker}(i)$; on a $B_n \cong A_n \oplus P_n$ où P_n est projectif.

4. Le but de cette question est de montrer qu'un complexe de chaines de $Ch(R)$ peut être composé de projectifs mais non-cofibrant.

   (a) On considère l'anneau quotient $R = K(x]/(x^2)$ où K est un corps. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $P_n = R$ et on considère l'applciation $d_n : P_n \to P_{n-1}$ donnée par la multiplication par x dans $R : r \mapsto x \cdot r$. Démontrer que $P_* = (P_n, d_n)$ est un complexe de chaines d'homologie nulle. En déduire que si P_* est cofibrant, alors $0 \to P*$ est uen cofibration acyclique.

   (b) On considère $p : R \to K = R/(x)$ la projection canonique et on munit K de sa structure de R-module induite. Démontrer que $S^0(p); S^0(R) \to S^0(K)$ est une fibration dans $Ch(R)$.

   (c) Démontrer que l'on a un morphisme de complexes de chaines $P_* \to S^0(K)$ qui vaut p en degré 0 et que, pour tout R-module M, si $u : P_* \to S^0(M)$ est un morphisme de complexes de chaines, alors, $u(d_1(P_1)) = 0$.

   (d) En supposant que P_* est cofibrant, déduire des questions précédentes une contradiction.

5. On veut démontrer lque tout complexe de chaines $P_* \in CH_{\geq 0}(R)$ constitué de modules projectifs est cofibrant. Soit $f : X_* \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y*$ une fibration acyclique dans $Ch_{\geq 0}(R)$ et
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X_* \arrow[d, "f"] \\ P_* \arrow[r, "q"'] & Y_* \end{tikzcd}$$
un diagramme commutatif. On va construire un relevé $\tilde{q}_* : P_* \to X_*$ par récurrence.

   (a) Démontrer que $\ker(f)$ est un complexe de chaines d'homologie nulle en tout degré et que $f_0 : X_0 \to Y_0$ est surjective.

   (b) En utilisant que P_0 est projectif, construire un $\tilde{q}_0 : B_0 \to X_0$ qui convient.

   (c) On suppose désormais avoir construit $\tilde{q}_0, \ldots, \tilde{q}_{n-1}$ qui fassent commuter les diagrammes et commutent avec les différentielles.

      i. En utilisant que P_n est projectif, construire un $h_n : B_n \to X_n$ qui rende commutatif le diagramme en degré n.

      ii. Démontrer que $d \circ h_n - \tilde{q}_{n-1} \circ d : P_n \to X_{n-1}$ est à valeur dans $Z_{n-1}(\ker(f))$ (c'est à dire les cycles de $\ker(f)$).

      iii. En utilisant que P_n est projectif, montrer qu'il existe une application $\psi : P_n \to \ker(f)_n$ telle que
$$d \circ \psi = d \circ h_n - \tilde{q}_{n-1} \circ d.$$

iv. Vérifier que $\tilde{q}_n = h_n - \psi$ donne le relevé voulu.

Exercice 3. (*Homotopy equivalence in chain complexes*) We recall that two morphisms of chain complexes $f, g : X \to Y$ are *chain homotopic* if there exists $h : X_* \to Y_{*+1}$ such that $dh + hd = f - g$. Let I be the chain complex concentraed in degree 0 et 1 given by $I_0 = R \oplus R$, $I_1 = R$ with differential $\partial(r) = (r, -r)$.

1. Give for any chain complex X, a factorisation $id \coprod id : X \coprod X \to X$ of the form $\overset{i_0 \coprod i_1}{\hookrightarrow} X \otimes I \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ with $i_0(r) = (r, 0, 0)$ et $i_1(r) = (0, r, 0)$.

2. Prove that two chain complexes morphisms $f, g : X \to Y$ are chain homotopic if and only if there exists a chain complex morphism $H : X \otimes I \to Y$ such that $H \circ i_0 = f$ and $H \circ i_1 = g$.

3. Prove that if X is cofibrant, f and g are chain homotopic if and only if they are homotopic in the sense of the model structure. (Hint: use that every chain complex is fibrant and that $X \otimes I$ is a strong cylinder object).

4. Deduce that for any complex A, we have a natural (in A) isomorphism

$$H_n(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(Ch(R))}(S^n(R), A).$$