

## DEVOIR: HOMOTOPIE, CATÉGORIE, HOMOLOGIE SIMPLICIALE

**Exercice 1. (contractibilité de la sphère de dimension infinie)** On munit  $\mathbb{R}^\infty$  du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$  et de la norme associée. On identifie  $\mathbb{R}^n$  avec le sous-espace de dimension  $n$  engendré par les  $n$ - premières coordonnées. Soit  $S^\infty = \bigcup S^n \subset \mathbb{R}^\infty$ .

1. Montrer que  $S^\infty$  s'identifie à la sphère unité de  $\mathbb{R}^\infty$ .
2. Montrer que  $S^\infty$  est contractile. (Indication: considérer l'application  $T : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  définie par  $T(x_1, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, \dots, x_n, \dots)$  et montrer qu'elle est homotope à l'identité.)

**Solution 1.** 1. On a muni  $\mathbb{R}^\infty$  du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$  (on remarque que la somme est toujours finie et que ceci définit bien un produit scalaire). La restriction de ce produit scalaire à tout  $\mathbb{R}^n$  est la structure euclidienne usuelle, il suit que la topologie induite sur  $\mathbb{R}^n$  et ses sous-espaces est la topologie usuelle. On notera  $\|x\|$  la norme associée. Comme tout élément de  $\mathbb{R}^\infty$  a un nombre fini de coordonnées non nulles, on a que  $S^\infty$  s'identifie à la sphère unité de  $\mathbb{R}^\infty$  pour ce produit scalaire et que tout élément est inclus dans un  $S^n$ . L'inclusion réciproque est immédiate.

2. L'application  $T$  est continue (elle est linéaire et de norme d'opérateur 1) et envoie  $S^\infty$  dans lui-même. De plus, pour tout  $x, T(x) \neq -x$  (en effet soit  $x_i$  la première coordonnée non-nulle de  $x$ , alors  $T(x)_i = 0 \neq x_i$ ). Il suit que l'application

$$H(t, x) = \frac{tT(x) + (1-t)x}{\|tT(x) + (1-t)x\|}$$

définit une application continue de  $H : I \times S^\infty \rightarrow S^\infty$ . La seule chose à vérifier est que  $tT(x) + (1-t)x$  ne s'annule pas. Ceci ne serait possible (pour des raisons de norme) que si  $t = 1-t$  ce qui donnerait  $T(x) = x$ , cas que l'on a déjà exclu.

On a  $H(0, x) = x$  et  $H(1, x) = T(x)$  (pour  $x \in S^\infty$ ) et donc  $T$  est homotope à l'identité de  $S^\infty$ . Il suffit maintenant de montrer que  $T$  est homotope à une application constante pour conclure. Pour cela on remarque que  $T(S^\infty)$  est l'équateur de  $S^\infty$ . En particulier, en notant  $N$  le point  $(1, 0, 0, \dots) \in S^\infty$ , le point  $tN + (1-t)T(x)$  n'est jamais nul quel que soit  $x \in S^\infty$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Il suit que l'application  $G : I \times S^\infty \rightarrow S^\infty$  définie par

$$G(t, x) = \frac{tN + (1-t)T(x)}{\|tN + (1-t)T(x)\|}$$

est une homotopie entre  $T$  et l'application constante  $x \mapsto N$ .

**Exercice 2. (Autour du degré et groupe fondamental du cercle)** On identifie  $S^1$  avec  $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ . On note  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  l'application quotient. On admettra que pour toute application continue  $S^1 \rightarrow S^1$ , il existe une application continue  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie que la composée  $f \circ \pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  est égale à  $\exp(2i\pi\alpha)$ . On appellera  $\alpha$  un relèvement de  $f \circ \pi$ .

On appelle enfin **degré de  $f$**  l'entier  $\deg(f) := \alpha(1) - \alpha(0)$ .

1. Montrer que si  $\alpha'$  est un autre relèvement, alors  $\alpha - \alpha'$  est constante à valeur dans  $\mathbb{Z}$ .
2. Démontrer que le degré de  $f$  est indépendant du choix de  $\alpha$  (ce qui justifie la notation).
3. Démontrer que si  $f$  est homotope à  $g$ , alors  $\deg(f) = \deg(g)$ .

4. (**Additivité du degré**) Soient  $f, g : S^1 \rightarrow S^1$  deux applications continues telles que  $f(1) = g(1)$ . On a le produit ponctuel  $(fg)(t) = f(t)g(t)$  et on note  $f \star g$  le produit induit par la composition des lacets:  $f \star g(t) = f(t^2)$  si  $\text{Im } t \geq 0$  et  $f \star g(t) = g(t^2)$  si  $\text{Im } t \leq 0$  (“dessiner” ce produit et se convaincre qu’il ne s’agit que de la composition de lacets vue en cours).
- (a) Montrer que  $fg$  et  $f \star g$  sont continues, homotopes mais distinctes en général (indication: penser à utiliser l’unité).
- (b) Montrer que  $\deg(fg) = \deg(f \star g) = \deg(f) + \deg(g)$ .
5. En déduire que le degré induit un morphisme de groupes surjectif  $\deg : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ . **On admettra dans la suite que le degré est un isomorphisme de groupes:  $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$**
6. Montrer qu’une application continue  $S^1 \rightarrow S^1$  qui n’a pas de point fixe est homotope à l’identité.
7. En déduire que toute application de degré différent de 1 a un point fixe.

**Solution 2.** 1. Par définition de  $\alpha, \alpha'$ , on a que  $\exp(2i\pi(\alpha - \alpha')) = \frac{f \circ \pi}{f \circ \pi} = 1$ . Ainsi  $\alpha - \alpha'$  est une application continue à valeur dans le discret  $\mathbb{Z}$ . Par connexité de  $\mathbb{R}$ , elle est donc constante.

2. Par la question 1, on a que  $(\alpha'(1) - \alpha'(0)) - (\alpha(1) - \alpha(0)) = (\alpha'(1) - \alpha(1)) - (\alpha'(0) - \alpha(0)) = 0$ .

*Remarque:* quitte à modifier  $\alpha$  par un multiple de  $2\pi$  on peut choisir le relèvement  $\alpha$  de  $f \circ \pi$  de sorte que  $\alpha(0)$  soit n’importe lequel des éléments dont l’image par  $\exp(2i\pi-)$  est  $f(1) = f \circ \pi(0)$ . De même, le degré de  $f$  et le degré de  $\frac{f}{f(1)}$  sont égaux (puisque les relèvements de  $f$  et  $f/f(1)$  ne diffèrent que d’une constante).

3. On peut supposer que  $f(1) = g(1) = 1$  par le dernier point de la remarque. Par composition on a que  $f \circ \pi$  et  $g \circ \pi$  sont homotopes et soit  $\alpha$  un relèvement de  $f \circ \pi$ . On veut utiliser l’homotopie  $H$  de  $f$  vers  $g$  (avec  $H(-, 0) = f$ ,  $H(-, 1) = g$ ) pour construire une application continue  $H : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $H(-, 1)$  soit un relèvement de  $g$ . Soit  $t$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $H(t, -) : [0, 1] \rightarrow S^1$  admet un relèvement  $\alpha_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , c’est à dire que  $\exp(2i\pi\alpha_t(u)) = H(t, u)$ , et, d’après la remarque, on peut choisir ce relèvement de sorte que  $\alpha_t(0) = \alpha(t)$ . On en déduit que l’application  $\tilde{H} : (t, u) \mapsto \alpha_t(u)$  vérifie que  $\exp(2i\pi\tilde{H}(t, u)) = H(t, u)$ . On vérifie que cette application est continue ce qui découle du fait que  $\exp(2i\pi-)$  restreint à un petit interval (c’est à dire de diamètre  $< 1$ ) est un homéomorphisme. On déduit de cette construction que  $\tilde{H}(-, 1)$  est un relèvement de  $g$ .

Il reste à voir que  $\tilde{H}(1, 1) - \tilde{H}(0, 1) = \tilde{H}(0, 1) - \tilde{H}(0, 0)$ . Mais par le raisonnement de la question 1, on a que pour tout  $t$ ,  $\tilde{H}(1, t) - \tilde{H}(0, t)$  est à valeur dans  $\mathbb{Z}$ , qui est discret. Or c’est une expression qui dépend continuellement de  $t$ , donc constante ce qui conclut.

4. On conseille de faire un dessin (ou reprendre les notes du cours) pour représenter l’opération  $\star$  qui consiste simplement à recoller deux lacets et à les reparamétriser.

- (a) Il est clair<sup>1</sup> que les fonctions  $fg$  et  $f \star g$  sont continues (pour cette dernière car  $f(1) = g(1)$ ). Elles sont assez trivialement distinctes en général. Par exemple, si  $f$  est la fonction constante  $t \mapsto 2$ ,  $f.f(t) = 4$  alors que  $f \star f(t) = f(t) = 2$ ... En revanche ces deux produits sont tout le temps homotopes ! Premièrement,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  étant connexe par arcs, il existe un chemin continu qui relie  $f(1) = g(1)$  à 1 et donc une homotopie reliant ces lacets à des lacets vérifiant  $\tilde{f}(1) = 1 = \tilde{g} = 1$ . On est donc ramené au cas  $f(1) = g(1) = 1$ . Remarquons que la fonction constante 1 est l’unité du produit ponctuel:  $f1 = f = 1f$ . Montrons que c’est aussi le cas pour  $\star$  à des “homotopies près”, c’est à dire que  $f \star 1 \simeq 1 \star f$  pour tout  $f$  (vérifiant  $f(1) = 1$  bien-sûr). C’est assez intuitif si on pense en terme de chemin ! Si on veut écrire des

<sup>1</sup>se rappeler que l’espace des fonctions continues de  $S^1$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  est un groupe topologique

homotopies explicites, il suffit de considérer l'application  $H : [0, 1] \times S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  définie par

$$H(t, \exp(2i\pi\theta)) = \begin{cases} f\left(\exp\left(2i\pi\frac{2t}{1+u}\right)\right) & \text{pour } 0 \leq \theta \leq \frac{1+u}{2} \\ 1 & \text{pour } \frac{1+u}{2} \leq \theta \leq 1. \end{cases}$$

On vérifie que  $H$  est continue et que  $H(0, t) = f \star 1(t)$  et  $H(1, t) = f(t)$  pour tout  $t$ . On définit de même une homotopie explicite entre  $1 \star f$  et  $f$ . Par ailleurs, il est immédiat de vérifier que si  $H$  est une homotopie entre  $f_0$  et  $f_1$ , alors pour tout  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $Hg(t, u) = H(t, u)g(u)$  est une homotopie entre  $f_0g$  et  $f_1g$ . On en déduit facilement que si  $f_0 \simeq f_1$  et  $g_0 \simeq g_1$  alors  $f_0g_0 \simeq f_1g_1$ .

Le simple fait que les unités (à des "homotopies près") coïncident (et que le produit ponctuel préserve les homotopies) est maintenant suffisant pour établir le résultat. En effet, on a pour tout  $f, g$

$$fg \simeq (f \star 1)(1 \star g) = f \star g.$$

*Remarque :* on laisse au lecteur le soin de vérifier que le résultat énoncé marche avec n'importe quel groupe topologique connexe à la place de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

- (b) Comme les produits sont homotopes, le degré de  $fg$  et de  $f \star g$  est le même par la question 3. La dernière égalité est un calcul immédiat en revenant à la définition du produit  $\star$ : en effet si on prend un relèvement  $\alpha$  de  $f$  et un relèvement  $\beta$  de  $g$  tel que  $\beta(0) = \alpha(1)$ , on obtient que  $t \mapsto \alpha(2t)$  et  $t \mapsto \beta(2t-1)$  (resp. pour  $t \leq 1/2$  et  $t \in [1/2, 1]$ ) est un relèvement de  $f \star g$  sur  $[0, 1]$ . Il suit que  $\deg(f \star g) = \beta(1) - \alpha(0) = \beta(1) - \beta(0) + \beta(0) - \alpha(0) = \deg(g) + \deg(f)$ .

5. La question 3 assure que degré passe au groupe fondamental pour définir une application  $\pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Il découle du (b) de la question précédente que  $\deg$  est un morphisme de groupes. Il reste à voir la surjectivité mais il est immédiat que  $z \mapsto z^n$  est de degré  $n$  (il suffirait de fait de montrer qu'il existe une application de degré 1, par exemple l'identité).

*Remarque* Pour terminer la preuve que le degré est un isomorphisme de groupes, il suffit maintenant de montrer que toute application continue  $f : S^1 \rightarrow S^1$  est homotope à  $z \mapsto z^{\deg(f)}$ . Ceci peut se voir en montrant que la restriction du relèvement  $\alpha$  à  $[0, 1]$  est homotope à  $t \mapsto t \deg(f)$  (ce qui se fait par  $u \mapsto (t \mapsto ut \deg(f) + (1-u)\alpha(t))$ ) puis en composant cette homotopie avec la projection sur le cercle et en vérifiant qu'elle passe au quotient.

6. Par hypothèse, l'application  $g : S^1 \rightarrow S^1$  définie par  $g(z) = f(z)/z$  est à valeur dans  $S^1 - \{1\}$ . Or  $S^1 - \{1\}$  est homéomorphe à l'intervalle, donc est contractile. Il en découle que  $g$  est homotope à l'application constante  $z \mapsto -z = \exp(i\pi)z$  (c'est à dire une rotation d'angle  $\pi$ ). Il est clair qu'une telle rotation est homotope à l'identité (regarder  $h(t, z) = \exp(it\pi)z$ ).
7. Par invariance homotopique du degré, toute application n'ayant pas de point fixes est homotope à l'identité et le résultat suit.

**Exercice 3** (Bonnet d'âne). Soit  $T$  un triangle dans  $\mathbb{R}^2$  (avec son intérieur) et notons  $p, q, r$  ses sommets. On appelle *bonnet d'âne* le triangle dont on a identifié les arêtes de la façon suivante:  $[p, q]$  avec  $[q, r]$  et  $[p, q]$  avec  $[p, r]$ . On appelle bonnet d'âne l'espace obtenu, noté  $A$

1. Peut-on utiliser un collapse pour calculer l'homologie de  $A$  ?
2. Calculer l'homologie de  $A$  (à coefficient dans  $\mathbb{Z}$  ou un corps au choix).

**Solution 3.** 1. Pour utiliser un collapse (comme vu en TD), il faut avoir une face maximale "libre", ce qui n'est pas le cas ici quelle que soit la subdivision simpliciale du bonnet d'âne que l'on prend.

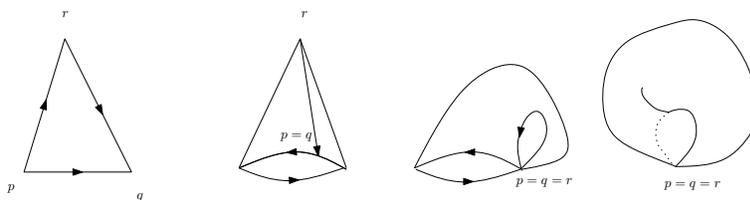


Figure 1: Le bonnet d'âne

2. Le plus simple est d'utiliser le complexe quasi-simplicial donné par les recollements de l'énoncé et représenté par la figure (3). Par construction, ce complexe quasi-simplicial a un sommet  $s$ , une arête  $e$  (donnée par la classe de  $[p, q]$ ) et un 2-simplexe  $T$ . Le complexe de chaîne associé est donc  $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ . La différentielle  $d_1$  est nulle car  $d_1(e) = s - s$ . On a que  $d_2(T) = e - e - e = -e$  d'après le dessin. C'est donc un isomorphisme et il suit que l'homologie du bonnet d'âne est nulle en tout degré  $> 0$  et vaut  $\mathbb{Z}$  en degré 0. On peut remarquer que le calcul qu'on a fait donne le même résultat quel que soit le coefficient  $R$  que l'on prend pour l'homologie.

**Exercice 4** (Le cube). On considère le cube  $[0, 1]^3$  et on le découpe en 48 tétraèdres de la façon suivante : On découpe chaque face en huit triangles en ajoutant un sommet au centre de la face et en traçant toutes les arêtes depuis ce nouveau sommet vers les sommets et les milieux d'arêtes de cette face. Ensuite, on rajoute un sommet au centre du cube et tous les tétraèdres dont les sommets sont le sommet au centre et 3 sommets d'un triangle dans le bord du cube. On note  $C$  le complexe simplicial ainsi obtenu.

1. Calculer la caractéristique d'Euler de ce complexe ainsi que  $H_0(C)$ .
2. Montrer que  $H_3(C)$  et  $H_2(C)$  sont nuls. En déduire  $H_1(C)$ .
3. Peut-on utiliser un collapse pour calculer l'homologie du cube ?

**Solution 4.** Ici, évidemment, le but était d'utiliser des techniques simpliciales, pas d'utiliser directement l'invariance par homotopie de l'homologie simpliciale déduite du cours (qui donne immédiatement que l'homologie est triviale).

1. Le cube étant connexe, il suit que  $H_0(C, R) \cong R$  pour tout anneau de coefficient  $R$ . Cette triangulation du cube a 27 sommets: 26 sur les faces et 1 au centre. Il est également composé de 48 tétraèdres, exactement 1 par triangle obtenu en triangulant chaque face en 8. En ce qui concerne les arêtes, elles ont de 2 types: celle reliant le sommet interne à un sommet externe (les arêtes internes), il y en a donc 26 et celles reliant des sommets externes. Sur la face avant il y en a exactement  $2+5+2+5+2=16$  et de même sur sa face opposée. Sur les faces latérales, il y en a  $16 - 4$  (puisque on a 4 arêtes en commun entre une face latérale et celles à l'avant et à l'arrière). Enfin, on a  $16 - 8 = 8$  arêtes supplémentaires sur la face du haut ainsi que sur celle du bas. Au total on a donc  $26 + 2(16 + 12 + 8) = 98$  arêtes. Enfin pour le nombre de faces, on a 48 faces externes sur les faces du cube. Ensuite chaque arête externe contribue exactement pour une face interne (reliant ses sommets avec le sommet interne) et ce sont les seules faces internes possibles puisqu'on a un seul sommet interne. Il suit qu'on a donc  $48 + 2(16 + 12 + 8) = 120$  triangles. Au total on a donc

$$\chi_C = 27 - 98 + 120 - 48 = 1.$$

2. Le moyen le plus simple pour calculer les groupes d'homologie est d'utiliser l'exercice sur les collapses de la feuille de TD sur l'homologie simpliciale, c'est à dire d'utiliser l'exercice 3. En

effet, en partant des faces libres<sup>2</sup> du haut du cube, on peut le collapser jusqu'à obtenir le carré (et sa triangulation induite) donné par sa face inférieure. Puis on peut collapser ce carré sur une arête (découpée en deux simplexes) puis soit conclure directement soit encore collapser cela sur un point ! On en déduit que tous les  $H_{i \geq 1}(C)$  sont nuls !

**Résolution sans collapse:** on pouvait aussi bien sûr calculer à la main. Le premier point consiste à montrer que  $H_3(C)$  fait 0. Pour cela, le plus simple est d'orienter tous les tétraèdres du cube avec l'orientation induite par l'orientation canonique de  $\mathbb{R}^3$  (et par exemple les sommets dans l'ordre lexicographique induit et les faces et arêtes avec l'orientation induite par celle des sommets, mais ce choix n'a pas d'importance pratique). Remarquons que lorsque l'on prend la différentielle d'un tétraèdre, alors on obtient une composante qui est un triangle externe et les 3 autres sont des triangles internes. Comme chaque triangle externe est un vecteur de la base de  $C_2(C) = \bigoplus_{C^{(2)}, R}$  qui n'appartient qu'à un *seul* tétraèdre, il suit que toute combinaison linéaire

non-nulle de tétraèdres a une différentielle non-nulle. Donc  $Z_3(C) = \{0\}$  et ainsi  $H_3(C) = \{0\}$ . Pour le calcul de  $H_2$ , on peut procéder de manière analogue à celle du calcul de l'homologie simpliciale de  $\mathbb{R}P^2$  ou du tore en TD. L'argument précédent montre que toutes les faces externes  $f$  sont égales, à un bord près (ce bord étant précisément  $d(\Delta_f)$  où  $\Delta_f$  est l'unique tétraèdre contenant cette face externe  $f$ ) à une combinaison linéaire de faces internes. Ainsi, toute 2-chaine  $c \in C_2(C, R)$  est égale à une 2-chaine  $\tilde{c}$  du complexe simplicial  $\tilde{C}$  composé de  $C$  dont on a retiré tous les (intérieurs des) 3-simplexes et toute les 2-faces externes:  $c = \tilde{c} + d(\sigma)$  (on a en fait que l'on peut prendre  $\sigma = \sum_{\Delta \in C^{(3)}} \pm \Delta$ ). Comme  $d \circ d(\sigma) = 0$ , on a que  $c$  est un cycle si et seulement si  $\tilde{c}$  est un cycle. Mais chaque 2-simplexe de  $\tilde{C}$  a une et une seule arête portée sur le bord. Et chaque arête du bord n'appartient qu'à un unique 2-simplexe de  $\tilde{C}$ . Ainsi lorsqu'on prend la différentielle, on obtient encore qu'aucune combinaison linéaire non-nulle de 2-simplexes de  $\tilde{C}$  n'est nulle. Ainsi  $Z_2(C) = Z_2(\tilde{C}) = 0$  et on a que  $H_2(C, R) = 0$ .

Si maintenant  $R$  est un corps, on obtient par la formule d'Euler Poincaré que  $H_1(C, R) = 0$  aussi. Dans le cas général (qui n'était pas forcément demandé), il faut appliquer la technique sus-mentionnée établie pour  $\mathbb{R}P^2$ , pour montrer que toute 1-chaine se ramène à un bord près à 1 chaine porté par un complexe simplicial qui n'a plus de 2-simplexes. On peut alors conclure directement en utilisant les calculs fait pour les graphes en TD (ou à la main en reprenant les simplifications faites et en ce rendant compte que le 1-simplexe ainsi obtenu a des sommets qui n'appartiennent qu'à une seule arête ce qui ramène comme dans les cas précédents au cas d'un point, et est un cas particulier de collapse)!

3. Les faces extérieures du cube présentent des faces libres que l'on peut donc collapser. En faisant ainsi on peut supprimer toute la face supérieure du cube et l'intérieur des tétraèdres basée sur elle. Les tétraèdres qui étaient collés sur ceux qu'on vient d'enlever présentent maintenant des faces libres. Ce qui permet de les collapser aussi. On finit en itérant par obtenir que l'homologie du cube est isomorphe à celle de la réunion des 5 faces restantes du cube. Et on peut désormais collapser ces faces de manière à n'avoir plus que la face inférieure. Qui elle même ce colapse sur un de ses bords. Puis un point ! Et on a bien obtenu que l'homologie de cette triangulation du cube est celle du point.

**Exercice 5** (Exemples de calculs d'homologie). Soit  $D^1$ , le disque fermé (dans  $\mathbb{R}^2$ ) de bord  $S^1$  et soit  $S^1 \times D^1$  le tore plein que l'on pourra considérer comme plongé dans  $\mathbb{R}^3$ . Considérons quatre points distincts  $\{a, b, c, d, \}$  de  $S^1$  et posons  $X = S^1 \times S^1 \cup \{a, b, c, d\} \times D^1$ . Autrement dit,  $X$  est l'espace obtenu en collant quatre disques disjoints dans le tore  $T_2 = S^1 \times S^1$  (faire un dessin).

1. Calculer pour tout  $i$  les groupes  $H_i(X)$ .

---

<sup>2</sup>ceci marche parcequ'on a précisément des faces libres. Ca ne marche pas avec une triangulation du tore parce qu'on identifie les faces du bord du carré dont on prend le quotient

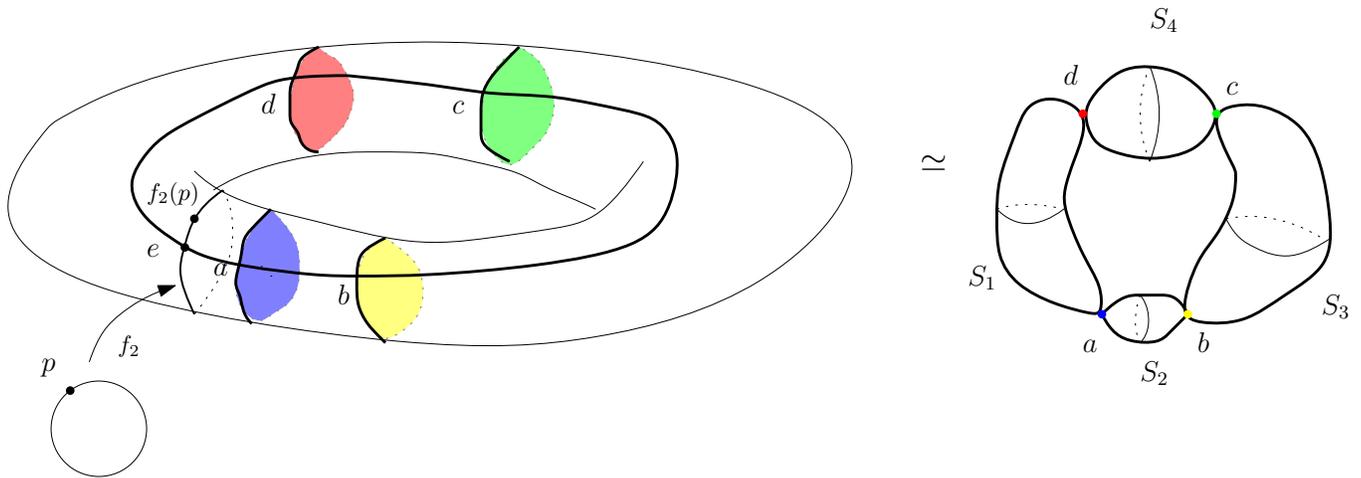


Figure 2: Un tore sur lequel on a recollé 4 disques, le collier de sphères auquel il est homotope. On a tracé le cercle image de l'application  $f_2$ .

2. Soit  $\{p\}$  un point de  $X$  n'appartenant à aucun des cercles  $\{x\} \times S^1$ ,  $x = a, b, c, d$ . Calculer  $H_i(X - \{p\})$ .
3. Soit  $e \in S^1$  avec  $e \neq a, b, c, d$ . On considère les applications suivantes de  $S^1$  dans  $X$ :

$$f_1 : p \mapsto (a, p), \quad f_2 : p \mapsto (e, p).$$

Calculer les applications  $f_{i*} : H_1(X) \longrightarrow H_1(S^1)$  pour  $i = 1, 2$ .

4. Calculer les groupes d'homologie à coefficient dans  $\mathbb{Z}$  de la bouteille de Klein  $K$  (c'est à dire l'espace quotient de  $\mathbb{R}^2$  par la relation d'équivalence engendrée par  $(x, y) \sim (x + 1, y)$  et  $(x, y) \sim (-x, y + 1)$ ).
5. Calculer les groupes d'homologie du plan projectif  $\mathbb{R}P^2$  à coefficient dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , à coefficient dans  $\mathbb{R}$  et à coefficient dans  $\mathbb{Z}$  et les comparer.

**Solution 5.** On a représenté  $X$  dans la figure 2. Quitte à contracter les 4 disques en  $a, b, c, d$ , l'espace  $X$  est homotope à un collier de 4 sphères 2 à 2 tangentes. On note  $S_1, S_2, S_3$  et  $S_4$  (où  $S_1 \cap S_2 = a, \dots, S_4 \cap S_1 = d$ ) ces sphères.

1. On est donc, par invariance homotopique, ramené à un exercice similaire à celui du TD (avec les 3 sphères tangentes 2 à 2). On peut bien sûr prendre aussi un modèle simplicial direct de la figure obtenu en prenant quatre 2-simplexes (des triangles pleins donc)  $T_a, T_b, T_c, T_d$ , et de les relier entre eux par des prismes supportés sur leurs arêtes (faire un dessin !) et on subdivise les carrés donnés par les faces des prismes reliant deux arêtes parallèles de  $T_i, T_{i+1}$  en deux triangles comme on veut. Dans la suite on calcule l'homologie pour le complexe simplicial du collier de sphères auquel est homotope  $X$ .

Ceci ayant été fait, on remarque tout d'abord que le complexe simplicial est de degré 2, donc n'a pas d'homologie en degré  $\geq 3$  et est connexe ce qui donne  $H_0(X)$ . Puis, pour calculer l'homologie en degré 2, cela ne dépend que des  $i$ -cellules avec  $i = 3, 2, 1$  et donc c'est la même homologie que la réunion de 4 sphères ce qui donne que  $H_2(X, R) \cong R^4$  quel que soit le groupe de coefficients  $R$  (si on utilise directement le modèle simplicial de  $X$ , il faut calculer le noyau de la différentielle sur  $C_2(X)$ , ce qui se fait par une méthode similaire au cube qui permet de se rendre compte que sur les prismes les faces doivent apparaître avec les mêmes coefficients—au signe dépendant de l'orientation choisie—et de conclure que le noyau de la différentielle est  $R^4$ ). Enfin, pour

calculer l'homologie en degré 1, on utilise que les simplexes de dimension  $\leq 2$ , et donc on a le même calcul si on suppose que les sphères sont pleines, auquel cas, l'espace obtenu est homotope à un cercle et on obtient que  $H_1(X, R) \cong R$ . Évidemment, si on en fait pas cette dernière simplification, on peut faire comme dans l'exercice sus-mentionné du TD et montrer que tout 1-cycle est, à un bord près, un multiple d'un cycle canonique obtenu en prenant une somme de 4 simplexes allant de  $a$  vers  $b$  puis  $c$  puis  $d$  puis retournant en  $a$  (ceci marche pour le modèle simplicial de  $X$  tout aussi bien).

**Autre méthode: utilisation de l'homologie singulière et de Mayer Vietoris.** On donne ici, pour entainement, une solution en utilisant l'homologie singulière. En pratique, on peut combiner les idées simpliciales et singulières et c'est souvent le plus efficace. Appliquons la suite de Mayer-Vietoris à la réunion de  $F_1$  et  $F_2$  où  $F_1$  est un voisinage de  $S_1 \cup S_2$  (obtenu en rajoutant deux petits disques ouverts centrés  $d$  et  $b$  et inclus respectivement dans  $S_4, S_3$ ) et  $F_2$  un voisinage de  $S_3 \cup S_4$  (obtenu en rajoutant deux petits disques ouverts en  $d$  et  $b$  et inclus respectivement dans  $S_4, S_3$ ). Notons que  $F_1 \cap F_2$ , qui est la réunion disjointe de deux copies de deux disques collés en un point, est homotope à  $\{b, d\}$ , la réunion disjointe de deux points. Par ailleurs, toujours par le même argument on a que  $F_1$  et  $F_2$  sont homotopes à un bouquet de deux sphères de dimension 2:  $F_1 \simeq S_1 \cup S_2 \cong S^2 \vee S^2$  (et de même pour  $F_2$ ). D'après le cours on a donc que  $H_{i \neq 0, 2}(F_1, R) \cong 0$ ,  $H_0(F_1, R) \cong R$  et  $H_2(F_1, R) \cong R \oplus R$ . Sachant que  $X$  est connexe, la suite exacte de Mayer-Vietoris pour  $X = F_1 \cup F_2$  s'écrit :

$$0 \longleftarrow R \longleftarrow R \oplus R \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longleftarrow R \oplus R \longleftarrow H_1(X, R) \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow H_2(X, R) \longleftarrow R^2 \oplus R^2 \longleftarrow 0 \dots$$

Il suit que  $H_0(X, R) \cong R$ ,  $H_1(X, R) \cong \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cong R$ ,  $H_2(X, R) \cong R^4$  et  $H_{i > 2}(X, R) \cong 0$ .

2. On distingue 2 cas.

- : Si  $p \in \{x\} \times D^2$ ,  $x \in \{a, b, c, d\}$ . Pour simplifier, on suppose que  $x = d$ . Un disque privé d'un point est homotope à son bord ce qui nous assure que  $X$  est homotope à un Tore auquel on a ajouté les disques  $\{y\} \times D^2$ ,  $y = b, c, d$ . De même qu'en **i**), on est ramené à un bouquet de 3 sphères (recollées deux à deux), exercice qui a été vu en TD dans la feuille consacrée à l'homologie simpliciale.
- : Si  $p \notin \{x\} \times D^2$ ,  $x \in \{a, b, c, d\}$ . On peut contracter les 4 disques en un point comme dans la question **i**). On obtient que  $X$  est homotope à un bouquet de 4 sphères consécutives dont l'une est privée d'un point. Mais une sphère privée d'un point est homéomorphe au plan  $\mathbb{R}^2$ , qui est contractile. On en déduit finalement que  $X$  est encore homotope à un bouquet de 3 sphères comme dans le premier cas.

Un raisonnement similaire à la question **1**) (ou comme dans la feuille de TD sur l'homologie simpliciale) donne alors que

$$H_0(X - \{p\}, R) \cong R, \quad H_1(X - \{p\}, R) \cong R, \quad H_2(X - \{p\}, R) \cong R^3 \quad \text{et} \quad H_{i > 2}(X, R) \cong 0.$$

3. Les applications  $f_1$  et  $f_2$  décrivent des cercles parallèles distincts de  $X$ . L'astuce consiste à remarquer que  $f_1$  et  $f_2$  sont homotopes dans  $X$  (il suffit de faire une rotation ramenant  $e$  sur  $a$ ). On en déduit que les applications induites en homologie sont égales:  $f_{1*} = f_{2*}$ . Remarquons que  $f_1$  se factorise sous la forme  $f_1 : S^1 \xrightarrow{g} D^2 \cong \{a\} \times D^2 \xrightarrow{i} X$ . Donc,  $f_{1*} = i_* \circ g_*$ . Comme le disque  $D^2$  est contractile,  $g_*$  est nulle en degré  $n > 0$ , donc  $f_{1*}$  aussi. Il reste à calculer  $f_{1*} : H_0(S^1, R) \cong R \rightarrow R \cong H_0(S^1, R)$  qui est l'application linéaire envoyant la (classe d'homologie correspondant à la) composante connexe de 1 dans  $S^1$  sur celle de  $(a, 1)$  dans  $\{a\} \times S^1$ . Comme il n'y a qu'une seule composante connexe dans les deux cas, on a donc que  $f_{1*}$  est l'identité en degré 0.

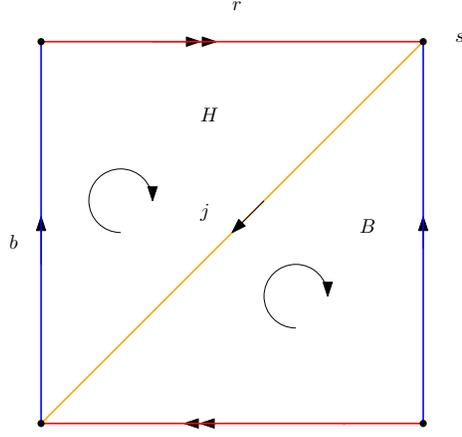


Figure 3: un modèle quasi-simplicial de la bouteille de Klein

4. On peut traiter chacun des deux exercices suivants soit par Mayer-Vietoris, soit par des méthodes (quasi-)simpliciales. Nous verrons en TD la méthode par Mayer-Vietoris pour la bouteille de Klein. Nous traitons ici le cas quasi-simplicial pour celui-ci donc.

Rappelons que  $K^2$  est homéomorphe au carré  $[0, 1]^2$  où on a recollé les bords gauche et droite et recollé les bords inférieurs et supérieurs mais en changeant le sens. On a un modèle quasi-simplicial  $K$  comme dans la figure (3). Ce modèle a à un seul sommet  $s$ , 3 arêtes, dénotées  $b, r, j$  (de couleur respectives bleue, rouge, jaune) et 2 triangles  $H, B$ . Le tout orienté comme sur la figure. Par connexité  $H_0(K, R) \cong R$ . On note que la caractéristique d'Euler est  $1 - 3 + 2 = 0$ . On a alors que  $C_{i \geq 3}(K) = 0$  d'où  $H_{i \geq 3}(K) = 0$ . On a aussi  $d(H) = b + r + j$  et  $d(B) = -b + r - j$ . Ces deux vecteurs étant linéairement indépendants sur  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$  on en déduit que  $H_2(K) \cong 0 \cong H_2(K, \mathbb{R})$ . Si on est à coefficient dans  $\mathbb{R}$ , sachant que  $H_0(K, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$  et la caractéristique d'Euler nulle, on en déduit que  $H_1(K, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ . Calculons maintenant sur  $\mathbb{Z}$ . Par ailleurs  $d(b) = s - s = 0, d(r) = s - s = 0, d(j) = s - s = 0$ , donc  $Z_1(K) = C_1(K) = \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r \oplus \mathbb{Z}j$ . Vu notre calcul sur le bord des 2 cellules, on a alors que  $r$  est homologue à  $b + j$ . On a alors

$$\mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r \oplus \mathbb{Z}j / d(\mathbb{Z}B \oplus \mathbb{Z}H) \cong \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r / (d(\mathbb{Z}B \oplus \mathbb{Z}H) \cap (\mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r)) \cong \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r / 2\mathbb{Z}(b+r) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

en notant que  $\mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r = \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}(b+r)$ . Ainsi on a  $H_1(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et on peut constater un résultat différent du calcul sur  $\mathbb{R}$  (de la torsion apparaît).

5. On considère le modèle quasi-simplicial  $P$  du plan projectif donné par la figure (4). Ce modèle est donc composé de 2 triangles  $H$  et  $B$  orienté dans le sens anti-trigonométrique. Il y a 2 sommets, noté  $s$  et  $t$  et 3 arêtes, notées  $b, r, v$  orientées comme sur la figure 4. Sa caractéristique d'Euler est donc 1.

Soit  $R$  un anneau quelconque. On a que le complexe de chaînes quasi-simpliciales à coefficient dans  $R$  de  $\mathbb{R}P^2$  est donné par  $C_i(P) = R^{P^{(i)}} = \bigoplus_{P^{(i)}} R$  donc est nul pour  $i \geq 3$ , et vaut respectivement

$$C_2(P, R) = R^2 \cong RH \oplus RB, \quad C_1(P, R) = R^3 \cong Rb \oplus Rr \oplus Rv \quad \text{et} \quad C_0(P, R) = R^2 \cong Rs \oplus Rt$$

en degrés 2, 1 et 0. Il reste à calculer les différentielles: on a que  $d(b) = t - s$ ,  $d(r) = s - t$  et  $d(v) = s - s = 0$ . Enfin  $d(H) = b + r + v$  et  $d(B) = b + r - v$ . Conclusion le complexe est donné (dans les bases ordonnées choisies ci-dessus) par

$$\dots 0 \longrightarrow R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}} R^2 . \quad (0.1)$$

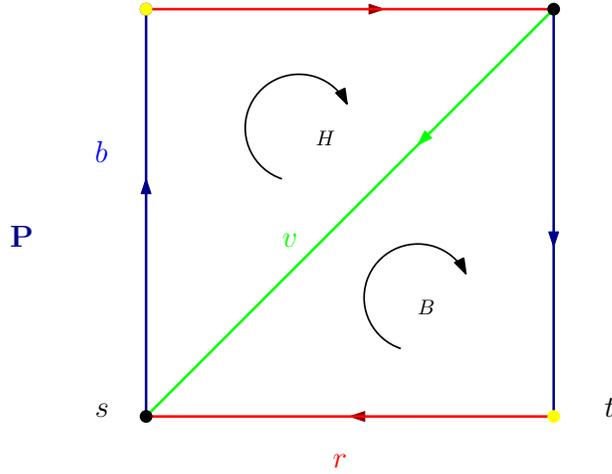


Figure 4: Une triangulation quasi-simpliciale de  $\mathbb{R}P^2$

D'après le cours, par connexité, nous savons que  $H_0(P, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ . Il nous reste à considérer les 3 cas pour les autres groupes d'homologie.

**Cas de  $\mathbb{R}$ :** les vecteurs  $b + r + v$  et  $b + r - v$  sont linéairement indépendants (comme on le voit directement ou en extrayant un déterminant  $2 \times 2$  non-nul). Donc la différentielle  $d : C_2(P, \mathbb{R}) \rightarrow C_1(P, \mathbb{R})$  est injective et donc  $H_2(P, \mathbb{R}) = 0$ . Par la formule d'Euler Poincaré, on en déduit que  $H_1(P, \mathbb{R})$  est un espace vectoriel de dimension  $1 - (1 + 0) = 0$ , donc  $H_1(P, \mathbb{R}) = 0$ .

**Cas de  $\mathbb{Z}$ .** Le même argument que ci-dessus nous donne que  $H_2(P, \mathbb{Z}) \cong 0$ . Et donc que le rang de  $H_1(P, \mathbb{Z})$  est nul. Mais ce groupe n'est pas forcément trivial; il peut être de torsion. On a par un calcul direct que  $\ker\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{Z}(b + r) \oplus \mathbb{Z}v$ . Il reste à calculer son

quotient par  $\text{im}(R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} R^3) = d(H) + d(B) = \mathbb{Z}(b + r + v) + \mathbb{Z}(b + r - v)$ . Comme  $b + r - v = d(B)$  est un bord, on a que  $\mathbb{Z}(b + r) \oplus \mathbb{Z}(v) / \mathbb{Z}(b + v - r) \cong \mathbb{Z}(b + v)$ . On a que  $d(H) = b + v + r = 2(b + v)$  dans le groupe abélien quotient  $\mathbb{Z}(b + r) \oplus \mathbb{Z}(v) / \mathbb{Z}(b + v - r)$ . On en déduit que

$$H_1(P, \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}(b + r) \oplus \mathbb{Z}v) / \mathbb{Z}(b + r + v) + \mathbb{Z}(b + r - v) \cong \mathbb{Z}(b + r) / 2\mathbb{Z}(b + r) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

**Cas de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .** Dans ce cas, nous avons que  $b + r - v = b + r + v$  et donc  $H_2(P, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \ker(C_2(P, \mathbb{R}) \rightarrow C_1(P, \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(H + B)$  est un espace vectoriel de dimension 1 sur le corps à 2 éléments. Encore une fois par formule d'Euler Poincaré, on en déduit que  $H_1(P, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est un  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel de dimension  $1 + 1 - 1 = 1$ , donc isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Comparaison:** Par comparaison des différentes théories homologiques, nous avons donc que

$$\begin{aligned} H_0(\mathbb{R}P^2) &= \mathbb{Z} & H_1(\mathbb{R}P^2) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & H_2(\mathbb{R}P^2) &= 0, & H_{i \geq 3}(\mathbb{R}P^2) &= 0 \\ H_0(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}) &= \mathbb{R} & H_1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}) &= 0, & H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}) &= 0, & H_{i \geq 3}(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}) &= 0 \\ H_0(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & H_1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & H_{i \geq 3}(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= 0. \end{aligned}$$

On voit que les nombres de Betti  $\beta_i(\mathbb{R}P^2, R)$  varient en fonction de l'anneau de coefficient (mais bien sûr pas la caractéristique d'Euler qui ne dépend que de la structure quasi-simpliciale).

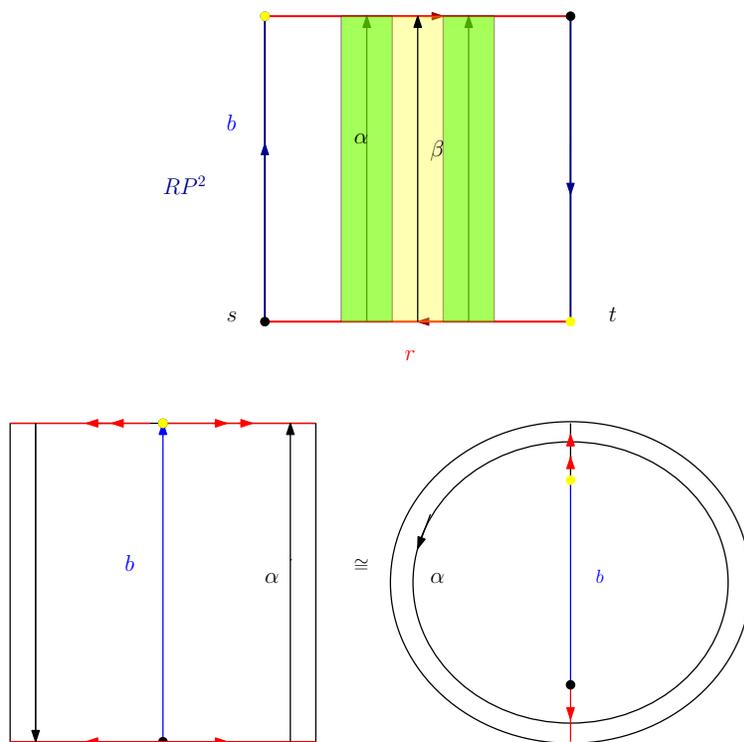


Figure 5: Un recouvrement de  $\mathbb{R}P^2$  par une bande de Möbius, représentée en jaune, et un disque en blanc. Leur intersection est composée de la partie verte. En dessous on représente le disque vu à partir du quotient du rectangle et son identification avec un disque

Les calculs que nous avons fait et la description explicite du complexe donnée en (0.1) nous donne de manière générale que, pour tout anneau  $R$ ,  $H_{i \geq 3}(\mathbb{R}P^2, R) = 0$ ,  $H_0(\mathbb{R}P^2, R) \cong R$ ,  $H_2(\mathbb{R}P^2, R) \cong \ker(R \xrightarrow{2} R)$  le noyau de la multiplication par 2 dans  $R$  et  $H_1(\mathbb{R}P^2, R) \cong R/2R$ .

**Autre méthode.** On peut aussi faire les calculs d'homologie de  $\mathbb{R}P^2$  en utilisant Mayer-Vietoris. Pour cela on utilise que  $\mathbb{R}P^2$  est obtenu comme la réunion d'un disque et d'une bande de Möbius, comme dans la figure 5. Voir la figure 5 où la bande de Möbius est représentée en jaune (et vert). On notera dans cette figure que l'intersection du disque et de la bande de Möbius est la partie verte, qui est homotope au lacet  $\alpha$  en son centre. La bande de Möbius, notée  $J$ , dessinée en jaune (au centre sur notre figure) est homotope au lacet  $\beta$ . Le disque est noté  $B$  et est contractile. La longue suite de Mayer-Vietoris nous donne donc

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow 0 \rightarrow H_i(\mathbb{R}P^2, R) \rightarrow 0 \dots 0 \rightarrow H_2(\mathbb{R}P^2, R) \rightarrow H_1(J \cap B, R) \cong R \\ \rightarrow H_1(J, R) \oplus H_1(B, R) \cong R \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^2, R) \rightarrow R \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \rightarrow \end{pmatrix} R^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rightarrow \end{pmatrix} R \rightarrow 0 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la connexité par arcs des espaces en question au niveau du  $H_0$ . Comme les trois premiers termes forment une suite exacte, on en déduit que  $H_i(\mathbb{R}P^2, R) \cong 0$  pour  $i \geq 3$  et une suite exacte

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{R}P^2, R) \rightarrow R \xrightarrow{i_*} R \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^2, R) \rightarrow 0$$

où  $i_* : R \cong H_1(S^1, R) \cong H_1(J \cap B, R) \rightarrow H_1(J, R) \cong R$  est l'application induite par l'inclusion de  $\alpha$  dans  $J$  en homologie. On a donc que  $H_2$  est le noyau de  $i_*$  et  $H_1$  le quotient  $R/i_*(R)$ . Or le lacet  $\alpha$  fait 2 fois le tour de la bande de Möbius et en particulier est homotope à  $\beta \star \beta$  (c'est à dire le lacet obtenu

en suivant  $\beta$  deux fois de suite). D'après le cours, on peut en déduire que c'est donc la multiplication par 2 ce qui redonne immédiatement les résultats obtenus plus haut.

Rappelons maintenant deux démonstrations du fait que  $i_*$  est la multiplication par 2. La première consiste à remarquer que par invariance par homotopie, il suffit de calculer la classe du lacet  $\beta \star \beta \simeq \alpha$  dans  $H_1(J)$ . Rappelons que tout lacet  $S^1 \rightarrow J$  est un 1-cycle singulier. Or pour tout lacet  $f \star g$  dans  $J$ , on a que  $f \star g - f - g = d(\sigma)$  où  $\sigma : \Delta^2 \rightarrow J$  est le 2-simplexe défini par  $\sigma(x_0, x_1, x_2) = f(x_0, x_1 + x_2)$  pour  $x_0 \geq x_2$  et  $\sigma(x_0, x_1, x_2) = f(x_0 + x_1, x_2)$  pour  $x_0 \leq x_2$ .

Pour la deuxième, on note encore que l'application  $S^1 \xrightarrow{\alpha} J$  est homotope à l'application  $[0, 1] \rightarrow J$  donnée par  $t \mapsto \beta(2t)$  si  $t \leq 1/2$  et  $t \mapsto \beta(2t - 1)$  si  $t \geq 1/2$ , autrement dit à  $\beta \star \beta$  encore. Ainsi, note application se factorise sous la forme  $S^1 \xrightarrow{pinch} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\beta \vee \beta} S^1$  où la première application  $pinch : S^1 \rightarrow ([0, 1]/(0 \sim 1))/(0 \sim 1/2) \cong S^1 \vee S^1$  est obtenue en identifiant 1 et  $-1$  dans  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Les applications induites  $S^1 \xrightarrow{pinch} S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1 \vee \{1\} = S^1$  et  $S^1 \xrightarrow{pinch} S^1 \vee S^1 \rightarrow \{1\} \vee S^1 = S^1$  en quotientant l'un des deux cercles du bouquet sont homotopes à l'identité, et donc induisent l'identité en homologie. Par naturalité de la suite exacte associée à un écrasement on a aussi que l'application induite  $j_1 : S^1 \rightarrow S^1 \vee \{1\} \hookrightarrow S^1 \vee S^1$  en homologie est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} R \cong H_1(S^1, R) \xrightarrow{j_{1*}} H_1(S^1 \vee S^1, R) \cong R \oplus R$$

et celle associée à l'autre inclusion est évidemment  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On en déduit que l'application  $H_1(S^1 \vee S^1, R) \cong R \oplus R \rightarrow H_1(S^1, R) \cong R$  est donnée par  $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = j_{1*}(x) + j_{2*}(y) \mapsto x + y$  puisque les composées  $S^1 \xrightarrow{j_k} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\text{Id} \vee \text{Id}} S^1$  sont l'identité.

Et de même que  $pinch_* : H_1(S^1) \cong R \rightarrow H_1(S^1 \vee S^1) \cong R \oplus R$  est donnée par  $z \mapsto (z, z)$ . Ainsi, on obtient, comme  $\beta$  est notre générateur de  $H_1(S^1, R)$  que  $H_1(S^1, R) \xrightarrow{\alpha} H_1(J, R)$  est l'application  $x \mapsto 2x$ .

**Exercice 6** (Modules projectifs). Soit  $R$  un anneau (commutatif, unitaire). Un  $R$ -module  $P$  est dit projectif si, pour tout morphisme  $f : P \rightarrow N$  de  $R$ -modules et tout morphisme surjectif  $p : M \rightarrow N$  de  $R$ -modules, il existe un morphisme  $\tilde{f}$  tel que  $f = p \circ \tilde{f}$ :

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \tilde{f} \swarrow & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{p} & N \end{array}$$

1. Démontrer que si  $R$  est un corps, tout module est projectif.
2. Démontrer que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  n'est pas un  $\mathbb{Z}$ -module projectif (on pourra s'inspirer du premier exercice de la feuille de TD sur les complexes de chaînes).
3. Démontrer que  $P$  est projectif si et seulement si pour toute suite exacte courte  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  de  $R$ -modules, la suite induite

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, A) \xrightarrow{f \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, C) \rightarrow 0$$

est exacte courte.

**Solution 6.** 1. Si  $R$  est un corps, tout module est un espace vectoriel, la forme  $\bigoplus_{s \in S} R$  où  $S$  est une base. Rappelons qu'un module  $\bigoplus_{s \in S} R$  est dit libre. Montrons maintenant que tout module libre (sur n'importe quel anneau !) est projectif. C'est assez facile: soit  $f : \bigoplus_{s \in S} R \rightarrow N$  une application linéaire. Il suffit de définir  $\tilde{f}$  comme on le souhaite sur la base  $S$  pour définir une application linéaire. Comme  $p : M \rightarrow N$  est surjective, pour tout  $s \in S$ , on peut choisir un élément  $\tilde{f}(s) \in M$  tel que  $p(\tilde{f}(s)) = f(s)$ . Par linéarité de  $f$  et  $p$ , l'application linéaire associée à  $\tilde{f}$  vérifie la propriété cherchée.

2. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & & \parallel \\ \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} & \xrightarrow[p]{} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{array}$$

où  $p$  est le morphisme canonique qui envoie la classe de  $x$  modulo  $2n$  sur la classe de  $x$  modulo  $n$ ; ce morphisme est surjectif. Montrons qu'il ne peut pas exister d'application  $\tilde{\text{Id}} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$  telle que  $p \circ \tilde{\text{Id}} = \text{Id}$  ce qui impliquera que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  n'est pas projectif; en particulier on doit avoir que  $p(\tilde{\text{Id}}(1)) = 1$ . Un morphisme de groupe abélien  $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$  est entièrement défini par l'image de 1. Comme  $nf(1) = f(n) = f(0) = 0$  on doit avoir que  $nf(1)$  est un multiple de  $2n$ . Ainsi  $f(1)$  est pair. Mais alors  $p(f(1))$  ne peut pas être égal à 1 ce qui montre que  $\tilde{\text{Id}}$  ne peut exister. On pouvait de même remplacer  $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$  par  $\mathbb{Z}$  avec la projection canonique, puis remarquer que  $\text{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \{0\}$

3. Soit  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  une suite exacte courte. Pour tout module  $P$ , on a un complexe

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, A) \xrightarrow{f \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, C)$$

où la première application est  $(\phi : P \rightarrow A) \mapsto (f \circ \phi : P \rightarrow B)$  et la deuxième est  $(\psi : P \rightarrow B) \mapsto (g \circ \psi : P \rightarrow C)$ . Comme  $f \circ g = 0$ , on a bien que la composée de deux applications linéaires est nulle. Montrons que le premier morphisme  $f \circ -$  est injectif. En effet si  $f \circ \phi : P \rightarrow B$  est nulle, alors  $\phi$  est nulle puisque  $f$  est injective. Montrons maintenant que  $\ker(g \circ -) = \text{im}(f \circ -)$ . Puisque on sait déjà qu'on a un complexe, il suffit de montrer l'inclusion du noyau de  $g \circ -$  dans l'image de  $f \circ -$ . Soit  $g \circ \psi = 0$ , alors pour tout  $m \in P$ , on a que  $\phi(m) \in \ker(g)$ , donc il existe  $a \in A$  tel que  $\phi(m) = f(a)$  car la suite  $A \rightarrow B \rightarrow C$  est exacte. Mais comme en plus  $f$  est injective, ce  $a$  est unique. On le note  $\psi(m)$ . L'unicité garantit que l'application  $m \mapsto \psi(m)$  est bien linéaire et par construction on a  $\phi = f \circ \psi$ .

Jusqu'à présent nous n'avons pas utilisé d'hypothèse sur  $P$  et nous avons que pour que la suite  $\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, A) \xrightarrow{f \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, C)$  soit exacte il faut et il suffit que le dernier morphisme  $\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, C)$  soit surjectif. Or ce morphisme est surjectif précisément si pour tout morphisme  $\psi : P \rightarrow B$ , il existe un morphisme  $\tilde{\psi}$  rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow \tilde{\psi} & \downarrow \psi \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

Donc si  $P$  est projectif, on a bien que ce dernier morphisme est surjectif pour toute suite exacte  $A \rightarrow B \rightarrow C$ .

Réciproquement, si ce résultat est vrai pour toute suite exacte, alors pour toute surjection  $p : M \twoheadrightarrow N$ , on a une suite exacte  $\ker(p) \hookrightarrow M \twoheadrightarrow N$  et la condition de surjectivité assure donc que pour toute  $f : P \rightarrow N$ , on a l'existence de  $\tilde{f}$  telle que  $p \circ \tilde{f} = f$ .